COURS

DE

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

COURS

DE

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

SPÉCIALEMENT ÉCRIT POUR LES PHYSICIENS ET LES INGÉNIEURS

CONFORME AU PROGRAMME DU CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

SERVANT D'INTRODUCTION AUX COURS

DE MÉCANIQUE ET DE PHYSIQUE DU MÊME AUTEUR

PAR

H. BOUASSE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT

AVANT-PROPOS

Ce Cours est destiné à mettre les Physiciens et les Ingénieurs en état de lire les ouvrages et les mémoires qui concernent leurs travaux. Il subira diverses sortes de critiques, au surplus contradictoires : comme toujours, j'en appelle au bon sens des étudiants.

Pleins de sollicitude pour ces derniers, les uns diront qu'il est trop long et trop difficile.

Pour la longueur, on remarquera qu'il prend l'étudiant au baccalauréat et qu'il renferme tout ce qu'il lui sera nécessaire de connaître en Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique, Calcul différentiel et intégral... Dans ces conditions, il est impossible d'être bref.

Pour la difficulté, je pourrais le comparer aux Cours actuels de Spéciales : ce serait me donner la partie trop belle, et, pour tout dire, manquer de sérieux : il n'est rien de comparable aux Cours de Spéciales.

Si mon Cours paraît difficile à quelques-uns, c'est qu'il choque leurs habitudes. Mais il faut espérer qu'avant longtemps les classes de Spéciales seront employées d'une façon plus intelligente et plus conforme aux besoins de la quasi-totalité de leurs élèves. Sous la poussée du public qui commence à comprendre qu'on le berne, l'esprit des classes élémentaires elles-mêmes sera modifié. On n'assistera plus à ce scandale de bacheliers gavés d'une théorie indigeste, mais ignorant la règle de trois, c'est-à-dire, après l'on ne sait combien d'années de Mathématiques, n'ayant même pas acquis la notion de fonction dans ce qu'elle a de plus vulgaire.

Quand le lycée préparera des élèves ayant des connaissances utilisables, mon Cours ne paraîtra difficile à personne.

En second lieu, les questions ne sont faciles ou difficiles que par rapport à un étalon qui change lorsqu'on modifie le but de l'enseignement. Un théorème difficile à établir rigoureusement devient évident si l'on se contente d'un acquiescement intuitif et, pour ainsi dire, expérimental.

Du reste, la question de difficulté est secondaire : celle d'utilité emporte tout. Quand un théorème a des applications techniques, c'est

à nous, professeurs, de trouver le moyen de le rendre assimilable : nous sommes payés pour cela.

Malheureusement, si dans leurs discours les Mathématiciens de métier sont d'accord avec nous sur la nécessité, non seulement d'un enseignement utilitaire pour les futurs physiciens et ingénieurs, mais d'un enseignement initial plus concret pour leurs futurs professeurs, candidats à l'Agrégation de mathématiques, ils tombent où leurs préoccupations les entraînent. L'histoire du Certificat de Mathématiques générales montre qu'ils n'ont pas su diriger la bonne volonté d'une Administration à qui nous ne pouvons refuser l'honneur de croire qu'elle veut qu'on l'éclaire.

Nous avons réclamé le Certificat de Mathématiques générales pendant de longues années; il nous a été accordé sous le titre demandé par nous de « Mathématiques préparatoires aux Sciences expérimentales »; il devait rendre capables de leur métier les Physiciens et les Ingénieurs sortis de nos mains. On a commencé par en changer le titre, puis on a modifié son esprit. On en a fait « un échelon de culture », un abrégé du Cours d'Analyse. Notre manie du trompe-l'œil, notre surenchère à la baisse, l'ont transformé dans nombre de Facultés en une sorte de Bachot si misérable[1], qu'on a trouvé juste d'en exempter les boursiers. Tout cela en dix ans.

Il s'agissait de créer un enseignement dans un esprit qui ne fût pas celui des Cours d'Analyse. A quel degré l'état d'âme des éminents Mathématiciens qui sont chargés de ce Cours, est opposé aux raisons mêmes de son existence, il suffit de feuilleter les Cours publiés pour s'en convaincre. Certes, ils sont admirables dans leur genre : reste à savoir si ce genre est celui qu'il faut. Or leurs auteurs envisagent les Mathématiques, non comme un « outil », mais comme une « culture ». Leur préoccupation est de servir d'intermédiaire entre le Bachot et le Cours d'Analyse, de suppléer les Spéciales absentes. Leurs méthodes sont celles des traités complets : ils se refusent à désorienter ceux de leurs élèves qui voudraient ensuite devenir professeurs de Faculté et membres de l'Institut pour les Mathématiques.

Ils n'oublient qu'un point, mais qui est gros : que leurs élèves n'ont pas ce désir et qu'ils sont précisément chargés de leur fournir TOUT le bagage mathématique nécessaire à leurs travaux ultérieurs, avec la manière de s'en servir.

[1] Dernière invention de la Sorbonne : le « Certificat d'Astronomie approfondie ». Pour sauver l'Astronomie française qui se meurt, je conseille de changer non les programmes, mais l'esprit des programmes. Qui de nous ne se souvient avec horreur de son Cours d'Astronomie ? Il me semble pourtant qu'une combinaison de Mécanique céleste et d'observations réellement exécutées (forme et faits se logeant dans la forme) ravirait nos étudiants « de surface » eux-mêmes, comme un beau spectacle intellectuel projeté sur un magnifique écran naturel.

Mais là où les anciens voyaient une raison d'extase, nous trouvons pour nos élèves un sujet de changements de coordonnées.

Soyons justes. Bien des circonstances rendent quasiment impossible la tâche des professeurs de Mathématiques générales. Certes, la scolarité d'un an serait suffisante s'ils s'adressaient à des élèves convenablement préparés. Mais, par la faute de l'Enseignement secondaire coupable du mauvais recrutement de leurs Instituts techniques, les Facultés imposent aux professeurs de Mathématiques générales des élèves dont les connaissances mathématiques sont rudimentaires.

Je ne suis certes pas hostile aux Instituts techniques des Facultés, ni jaloux de leurs succès : tout mon enseignement est orienté vers l'utile; mais je déteste le gâchis.

Les Instituts devraient être pour l'Enseignement supérieur une fontaine de Jouvence; ils sont en train de le ruiner par suite de leur recrutement déplorable, que systématise la théorie insensée « de la porte ouverte ». En effet, de ce qu'il est absurde d'exiger le Bachot, c'est-à-dire de l'histoire, de la géographie, de l'allemand, de l'hygiène,... pour permettre aux étudiants d'apprendre la Physique et la Chimie à la Faculté, et d'obtenir un diplôme en témoignage de la science acquise, il ne résulte pas qu'on doive ouvrir les portes des Instituts à des gens évidemment incapables de profiter de l'enseignement et dont la présence est une gêne pour leurs camarades et leurs professeurs. Tout élève entré dans un Institut doit être sûr d'obtenir le diplôme au bout de la scolarité imposée, après un travail honnête.

On est en train de transformer les Facultés en je ne sais quelles écoles primaires préparatoires à elles-mêmes. Pour ambitieux et zélés (!?) que nous soyons, nous ne pouvons pas englober tous les enseignements, « le maternel y compris. » Abattons « les cloisons étanches »! Encore faut-il que chacun ait son rôle bien déterminé, le remplisse et n'accapare pas le rôle du voisin. Si le voisin s'acquitte mal de la tâche qui lui revient en raison de la division du travail, obligeons-le à mieux apprécier ses devoirs. Le Lycée nous doit des élèves préparés : obligeons-le à nous les fournir.

Qu'attend l'Administration, rompant avec les théories qui sont à la base de la soi-disant réforme de 1902, pour créer au LYCÉE *l'enseignement* UTILE *que la nation réclame et sans lequel l'effort actuel des Universités sera stérile, sinon néfaste?*

Il est raisonnable, il est nécessaire que la première année des Instituts techniques soit presque exclusivement consacrée à l'étude des Mathématiques et de la Mécanique. Mais ce n'est possible que si les étudiants admis ont des connaissances solides dont un sérieux examen d'entrée doit être la justification...

Le Certificat de Mathématiques générales n'est pas un abrégé du Certificat d'Analyse pour esprits faibles : les Physiciens et les Ingénieurs ne sont pas des amoindris. L'ENSEIGNEMENT UTILITAIRE DES MATHÉMATIQUES A SA VALEUR PROPRE ET SES MÉTHODES.

Je prie donc les Mathématiciens de métier de discuter le choix des

questions, l'importance relative que je leur donne, l'ordre dans lequel je les traite, non de leur point de vue, mais du nôtre. Inutile de feindre que j'aie l'intention de leur apprendre les mathématiques : on n'importe pas des chouettes à Athènes; je sais fort bien que ce livre très élémentaire ne contient autant dire pas un théorème qui ne fût connu d'Euler. Inutile de m'apprendre que plusieurs théories sont fondamentales dont je ne parle pas, alors que j'insiste sur des questions ordinairement négligées. Il s'agit ici de MATHÉMATIQUES UTILITAIRES; *nous sommes juges en dernier ressort de ce dont nous avons besoin.*

Il va sans dire que, sur mon propre terrain, je sollicite les critiques. Dans une entreprise aussi neuve, il serait admirable de réussir du premier coup. J'espère qu'après avoir compris la relativité de leurs classifications, changé momentanément leur échelle d'importance et de difficulté, accepté notre idéal (sans abandonner le leur), les Mathématiciens de métier nous suggéreront les améliorations de détail que leur sagacité les met sans peine à même de découvrir. Au surplus, leur mauvaise humeur serait inefficace : les bruits hors la route n'ont jamais empêché les caravanes de passer.

Il est certain qu'on me reprochera de ne pas être rigoureux, de m'efforcer à trop de clarté aux dépens de la Logique. Comme je ne veux pas laisser au lecteur l'impression pénible que je lui propose une vulgarisation de contremaître, comme je prétends qu'à côté des Mathématiques pour Professeurs de Faculté, il y a place pour des Mathématiques tout aussi rigoureuses dans leur genre et tout aussi scientifiques, je pèserai à mes balances « la précision et la rigueur » dont nos géomètres sont si fiers.

La définition des aires présente quelques difficultés. Qu'à cela ne tienne! supprimons les aires! Un professeur, après avoir démontré que le produit de la base d'un triangle par sa hauteur est le même pour les trois bases et les hauteurs correspondantes, prend ce produit pour définition *de l'aire du triangle et construit sur cette définition*, d'où la notion d'aire est absente, *une théorie* en soi parfaite de ce qu'il appelle *aire du triangle. Toutes les difficultés sont écartées... jusqu'au moment de l'application. Alors elles se représentent en groupe compact : il a reculé pour mieux sauter.*

Qu'a-t-il gagné, si l'application est nécessaire?

Je ne conteste pas l'idéale beauté de cette marche; je conteste qu'il soit raisonnable de la préférer à la méthode vulgaire, s'il s'agit de mesurer effectivement ce que tout le monde appelle « aire du triangle ».

Un professeur définit la fraction 3/4, comme un 3, une barre et un 4. C'est fort joli jusqu'au moment où je veux utiliser les fractions. A cet instant critique, il faudra bien reprendre la vieille définition d'un objet coupé en quatre et dont on a trois parties.

Pourquoi se montrer difficile dans la démonstration, quand on est forcé de ne pas l'être dans l'application? Pourquoi feindre de se confiner dans un domaine idéal, quand ses affaires sont uniquement dans un domaine réel? Vous hésitez à représenter les fonctions par des courbes et à profiter des lumières intuitives qui résultent de cette figuration? soit. Pourquoi voulez-vous que je me prive de cette aide, puisque mon unique souci est de tracer des courbes et de les étudier? Au surplus, tous vos dédains ne vous empêchent pas de procéder comme nous, quand par hasard vous calculez un phénomène. Méphistophélès contemple en souriant Faust hurler de grandes phrases romantiques : il sait que, tout à l'heure, près de Marguerite, Faust se conduira comme un muletier!

Certains me reprocheront le caractère expérimental de mes démonstrations, auquel plusieurs esprits sont réfractaires. Pour Dieu, ne recommençons pas à tourner dans le cercle! Ceux qui sont réfractaires à la nature expérimentale de mes démonstrations, ont tort de se destiner aux Sciences expérimentales ou d'en parler!

Je me résume. Un jour l'Administration accueillit une idée que je m'obstine à trouver juste et féconde : ENSEIGNER, POUR CEUX QUI EN ONT BESOIN, DES MATHÉMATIQUES UTILISABLES. *Cette œuvre, j'essaie de la reprendre.*

Le monde entier goûte la clarté et l'élégance de l'enseignement français. Pour ramener chez nous ceux qui parmi les étudiants étrangers sont désirables, il est un procédé excellent, c'est de leur offrir un ensemble de Cours rattachés à un plan longuement mûri, dérivant d'une pensée maîtresse, où l'étudiant voit la fusion de la Science idéale et de l'Utile.

Je remercie sincèrement M. Turrière, agrégé de Mathématiques, professeur au lycée d'Alençon, et M. E. Bertrand, préparateur à la Faculté, d'avoir bien voulu relire les épreuves de ce livre. *M. Turrière et moi préparons un recueil d'exercices qui, je l'espère, faciliteront la mise en pratique des conseils que, dans le dernier chapitre, je me permets de donner aux étudiants.*

COURS

DE

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

CHAPITRE I

BUT ET PROCÉDÉS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. Notion de fonction.

On dit qu'une quantité y est *fonction* d'une autre quantité x, lorsqu'on suppose établie entre ces quantités une relation telle que la variation de l'une entraîne la variation de l'autre. Il ne faut attacher à la notion de fonction aucune idée de causalité; y est fonction de x, $y = f(x)$ (lisez $y = f$ de x), parce que nous *établissons* entre y et x une relation, ni plus ni moins et quel que puisse être le caractère artificiel de cette relation. Dans les applications, le phénomène dont y est la mesure ne dépend pas nécessairement du phénomène dont x est la mesure.

Il résulte de là que rien ne nous empêche, après avoir pris y comme fonction de x, $y = f(x)$, de prendre x comme fonction de y, $x = \varphi(y)$. Par exemple, considérons la température d'un corps comme une fonction du temps : cela ne signifie évidemment pas que le temps est la cause de la température. Il existe simplement une relation de simultanéité entre les indications d'un thermomètre et les indications d'une pendule. Dès lors il est aussi légitime de considérer le temps comme fonction de la température.

En un sens, le temps est la variable fondamentale, puisque les phénomènes se déroulent tous dans le temps ; mais le temps n'est cause d'aucun d'eux.

2. Fonctions continues, fonctions discontinues.

1°. — Il est clair qu'un corps ne passe pas d'une température t_0 à une température t_1 sans passer par toutes les températures intermédiaires. Ce n'est pas qu'on puisse alléguer de cette proposition une démonstration *en forme ;* mais nous ne concevons pas la proposition inverse.

Il est moins clair qu'un corps ne passe pas d'une vitesse à une autre vitesse sans passer par toutes les vitesses intermédiaires ; quand

on choque une bille, il semble que la vitesse passe *brusquement* de zéro à une valeur maxima. Mais tout est de s'entendre sur le sens du mot souligné. Quand on attelle une locomotive à un train, on voit bien que le coup de tampon ne produit pas une variation brusque de la vitesse du train : les ressorts des tampons sont fléchis, puis ils réagissent : on peut, du reste, déterminer la loi de variation de la vitesse.

Voici donc des quantités dont les variations sont *continues*, en ce sens qu'elles ne passent pas d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Pour représenter une fonction y de la variable x, traçons deux axes de coordonnées Ox, Oy, rectangulaires pour préciser. Prenons

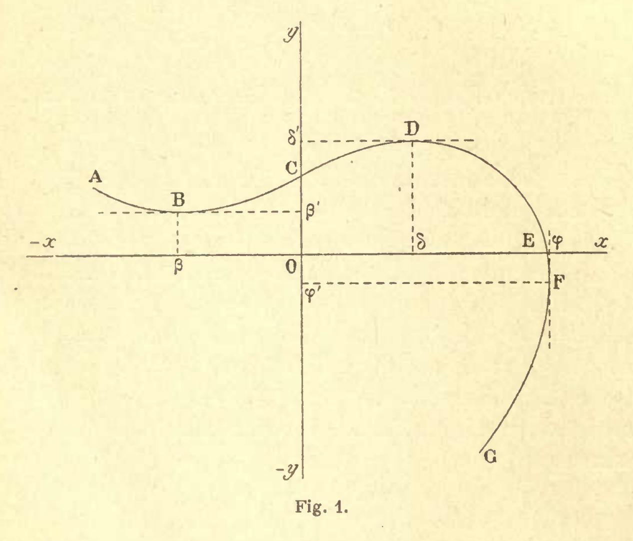


Fig. 1.

sur Ox une longueur $x = \overline{O\delta}$, égale à une valeur de la variable ; suivant $y = \overline{\delta D}$, portons la valeur correspondante de la fonction. Chaque groupe x, y, de valeurs détermine un point du plan. Rien n'empêche qu'au même x correspondent plusieurs valeurs différentes de y, et inversement qu'au même y correspondent plusieurs valeurs de x.

Nous obtenons ainsi une série de points. Il est bien évident que nous ne pouvons *matériellement* en déterminer qu'un nombre fini.

Si la fonction à représenter est continue, ces points pourront être, sinon matériellement déterminés, du moins conçus comme aussi rapprochés qu'on voudra ; ils formeront une courbe.

Il faut bien distinguer la courbe expérimentale avec toutes ses imperfections, avec ses inévitables ressauts et son épaisseur, de la courbe idéale sans épaisseur ; la première n'est que le signe graphique et conventionnel de la seconde. Mais cette représentation, pour grossière qu'elle soit, est un admirable outil d'intuition : il per-

met de comprendre d'un coup d'œil ce qu'une page de raisonnements embrouillerait.

2°. — Certaines fonctions ne sont évidemment pas continues. La fortune d'un négociant, par exemple, résulte d'une série d'opérations en nombre fini ; chacune d'elles ajoute à l'actif ou au passif une somme évaluable en centimes. Si donc nous portons en abscisses les temps, en ordonnées la valeur de la fortune, la représentation consistera en une série de points isolés ABCDE... que rien n'autorise à réunir par un trait continu. En fait, on les joint par des droites pour la commodité de l'œil, afin qu'il suive plus aisément l'ordre dans lequel les points doivent être pris.

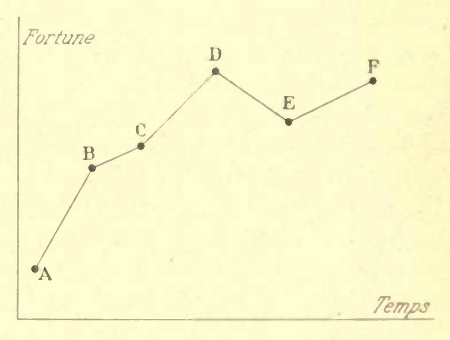


Fig. 2.

La population d'un pays croît ou décroît par unités. Un tas de blé est composé d'un nombre fini de grains tout de même qu'un tas de farine. Nous croyons pouvoir augmenter ce tas *d'une manière continue*, parce que nous donnons au mot continu un sens large qui n'est pas le sien, ou parce que nos moyens de mesure ne sont pas assez perfectionnés. Mais il est évident que si nous prenons le nombre de grains pour variable et le poids du tas pour fonction, la représentation consistera en un nombre fini de points isolés.

3. But des mathématiques.

Le but des mathématiques est l'étude des fonctions, de leurs représentations et de leurs corrélations géométriques. Leur utilité pratique provient d'une sorte de division du travail entre les expérimentateurs (physiciens et ingénieurs) et les mathématiciens proprement dits. Ceux-ci se sont proposé l'étude des fonctions *in abstracto* et de certaines fonctions particulières. Ils ont ainsi créé, en apparence, indépendamment de tout souci utilitaire, par des procédés au premier abord complètement artificiels, une sorte de musée de fonctions où les expérimentateurs viennent chercher ce dont ils ont besoin pour la représentation et l'étude des phénomènes.

Bien entendu, aucune de ces fonctions continues ou discontinues n'est la représentation rigoureuse des faits ; mais on peut trouver parmi elles une représentation schématique, approchée, de première approximation. Il ne faut donc pas que le lecteur s'arrête au caractère nettement artificiel de toutes ces constructions : ce sont comme des ensembles de raisonnements *passe-partout* qui, solidement établis, n'auront plus à être indéfiniment recommencés. Peu importe com-

ment on les introduit pour la première fois, pourvu que ce soit simplement et clairement.

Quand les fonctions ont une importance particulière, on leur donne des noms ; par exemple, nous parlerons du cosinus ou du sinus d'un arc. Mais il ne faut pas que le lecteur prenne le change : les fonctions nommées n'ont pas des propriétés essentiellement différentes des fonctions innommées. Que celles-ci pour une raison quelconque deviennent plus usuelles, on leur imposera un nom.

En définitive, pour nous physiciens et ingénieurs, tout aboutit à des calculs. Une fonction sera donc applicable quand nous en aurons construit une table numérique : de notre point de vue, c'est là sa véritable existence. Il nous importe généralement assez peu de savoir comment en réalité on a construit la table, de quelles séries ou de quelles formules d'approximations successives on s'est servi ; mais il nous importe de concevoir l'opération comme possible.

Le calcul différentiel nous apprend à étudier les fonctions indépendamment de toute définition particulière. Il représente des opérations *non effectuées* et qui ne pourront l'être qu'après spécification du problème particulier à résoudre. On trouvera donc partout deux ordres de questions : l'étude des méthodes, l'application de ces méthodes.

Ces considérations deviendront peu à peu évidentes.

4. Notion de limite, position limite.

Soit une courbe dont les points sont repérés par la distance $\overline{OA} = s$, à un point O pris pour origine. Ce sera, si l'on veut, le rail d'une voie ferrée dont les dimensions transversales sont indéfiniment réduites ; les points de ce rail sont repérés par leur distance à un point O, distance mesurée sur le rail même. Un mobile se déplace sur la courbe avec une vitesse variable. Nous nous proposons de définir la direction et la grandeur de la vitesse à chaque instant, et par conséquent en chaque point A. Nous admettrons, (personne ne mettra le fait en doute), que le mobile possède à chaque instant une vitesse de grandeur et de direction parfaitement déterminées.

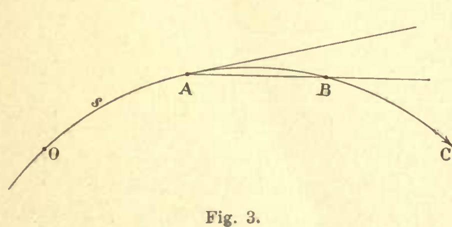


Fig. 3.

Considérons un point B voisin du point A, situé à une distance Δs du point A. Le symbole d'accroissement Δ signifie que pour obtenir le point B à partir du point A, il faut ajouter, à la grandeur s qui caractérise le point A, un accroissement, *une différence* Δs. Le mobile qui passe en A au temps t, passe en B au temps $t + \Delta t$.

La vitesse du mobile entre les temps t et $t + \Delta t$, ou encore entre les positions s et $s + \Delta s$, a une direction qui n'est pas exactement

AB et qui varie d'un instant à l'autre. Mais la corde AB a une direction qui, elle, est parfaitement déterminée dès que nous avons fixé le point B. D'autre part, nous pouvons admettre que la direction *vraie* de la vitesse au point A s'approche d'autant plus d'être la direction AB que B est plus voisin de A. *Le problème consiste donc à déterminer cette direction quand le point* B *s'approche* INDÉFINIMENT *de* A; *par définition, c'est la* LIMITE *de la direction* AB.

Nous rencontrons ici une première application des considérations générales qui précèdent. S'il s'agit d'une courbe *expérimentale réellement tracée,* le problème n'a pas de solution précise. On sait l'impossibilité de fixer la direction d'une sécante quand les points d'intersection avec la courbe sont très rapprochés, ne serait-ce qu'à cause de l'épaisseur du trait. Mais les mathématiques fournissent des courbes *idéales, sans épaisseur,* dont les courbes réelles ne sont que la représentation grossière et dont les points sont définis par une propriété rigoureusement déterminée. Sur ces courbes nous faisons non pas une construction graphique, mais un raisonnement. Si la courbe expérimentale peut être assimilée à la courbe idéale (à l'approximation des expériences), notre raisonnement vaudra pour la courbe réelle à la même approximation.

Voici deux exemples qui montreront comment, de la définition géométrique des courbes, il est possible de tirer la position limite de la sécante.

5. Détermination de la tangente à une courbe.

1°. — Traçons une courbe (fig. 4) lieu des points également distants d'un point fixe O : c'est un *cercle*. Soit une sécante AB. Considérons le triangle isoscèle OAB ; nous avons les relations :

$$\alpha + 2\beta = \pi, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

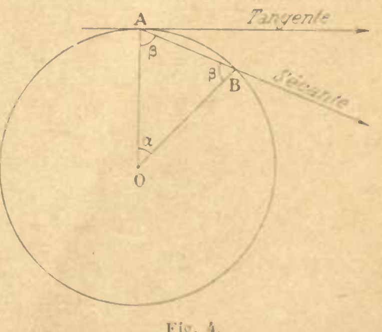


Fig. 4.

L'angle β est donc parfaitement déterminé pour toutes les positions de B, si rapprochées qu'on les suppose de A, *pourvu que* B *reste distinct de* A. Évidemment le triangle disparaît, et *par suite tout raisonnement sur l'angle* β *devient impossible*, quand B coïncide avec A. Déterminer la valeur limite de β, et conséquemment la position limite de la sécante (*qui par définition deviendra tangente*), c'est poser que nous avons le droit de *poursuivre* notre raisonnement jusqu'aux valeurs évanouissantes de la distance AB ; c'est *extrapoler par continuité* hors du champ où β est effectivement mesurable. Pour obtenir un résultat, nous considérons donc la distance AB, ou, ce

qui revient au même, l'angle α, non pas comme très petits, mais comme diminuant indéfiniment jusqu'à s'annuler. Nous admettons comme exact pour $\alpha = 0$, ce qui est de plus en plus approché lorsque α diminue *jusqu'au moment de s'annuler.*

Quand α s'annule, les relations (1) demeurant vraies si petit que soit α et, PAR SUITE DE NOTRE HYPOTHÈSE, *demeurant vraies pour* $\alpha = 0$, β devient alors droit. D'où la conclusion : *la limite de la position de la sécante (qui devient tangente par définition) est normale au rayon.*

On voit l'avantage du théorème. Supposons un cercle réellement tracé à l'aide d'un compas. Pour déterminer la tangente, nous nous garderons de mener une sécante dont les points d'intersection avec le cercle soient très rapprochés. Nous utiliserons notre théorème ; *nous construirons une normale à l'extrémité du rayon*, ce qui est une opération très précise. Voilà comment l'étude d'un cas idéal amène à un résultat éminemment pratique. Raisonnant sur le cercle sans épaisseur, n'utilisant les figures que pour concrétiser les raisonnements, nous parvenons à des résultats applicables à nos représentations grossières.

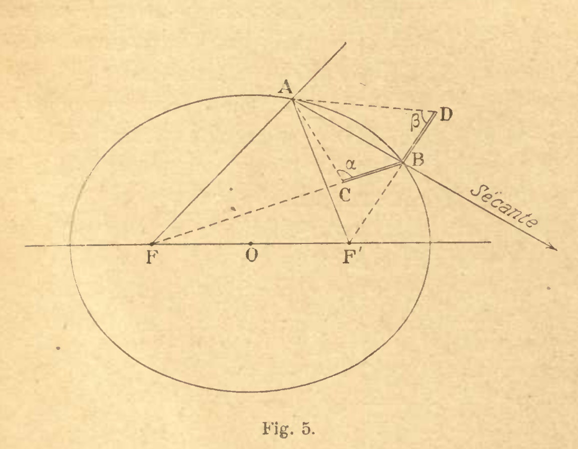


Fig. 5.

2°. — Voici un exemple plus compliqué (fig. 5 et 6).

Soit une courbe lieu des points dont la somme des distances $\overline{AF} + \overline{AF'}$ à deux points fixes F et F' (foyers) est constante et égale à $2a$: c'est une *ellipse.*

Traçons la sécante AB. Construisons les triangles isoscèles AFC, AF'D. On trouve aisément : $\overline{BC} = \overline{BD}$.

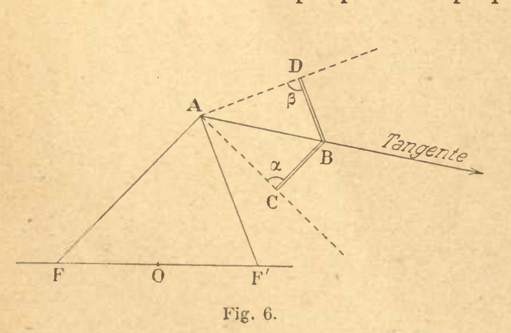


Fig. 6.

Cherchons vers quelle forme tend la figure quand B se rapproche de A. D'après le *1*°, FC tendant vers FA, F'D tendant vers F'A, les angles α et β tendent à devenir droits ; les droites AC et AD tendent à devenir perpendiculaires respectivement sur FA et F'A (fig. 6).

La condition $\overline{BC} = \overline{BD}$ subsiste, si petite que soit la distance $\overline{AB}$.

Donc la sécante tend vers une position telle que l'un de ses points se trouve à égale distance des positions limites des droites AC et AD ; elle tend donc à être bissectrice de ces positions limites et par suite bissectrice extérieure des droites fixes FA et F'A qui leur deviennent perpendiculaires. D'où le théorème : *la tangente à une ellipse au point* A *bissecte l'angle des droites qui le joignent aux foyers.*

Insistons sur l'hypothèse de la continuité qui est à la base de tous nos raisonnements. Le résultat ne devient exact que *par extrapolation,* juste au moment où toute conclusion *directe* devient impossible. C'est un paradoxe dont il serait vain d'atténuer l'étrangeté.

Une droite qui passe par deux points A et B *confondus* n'est pas déterminée : c'est évident. Mais si la confusion s'opère après que nous avons défini la direction suivant laquelle le point B s'approche du point A, la direction *limite* reste définie, *à la condition qu'elle ne change pas brusquement au dernier moment,* c'est-à-dire *à condition qu'il y ait continuité.*

6. Valeur limite. Dérivée. Différentielles.

1°. — Reprenons la figure 3 et cherchons à définir la valeur numérique de la vitesse vraie au point A. La vitesse moyenne entre les points A et B, vitesse mesurable et pour laquelle il n'existe pas de difficulté *théorique,* est le quotient :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Nous admettons intuitivement comme exact que nous aurons la vitesse vraie au point A, en prenant des points B de plus en plus voisins de A. Ce n'est pas que l'expérience devienne ainsi plus précise ; au contraire, les erreurs croîtraient rapidement et rendraient bientôt le résultat illusoire Personne n'aura l'idée, pour déterminer la vitesse d'un train, de mesurer le temps qu'il met à parcourir un mètre ou un centimètre.

Mais les mathématiques nous fournissent des lois idéales de mouvement que nous pouvons étudier *a priori,* pour lesquelles les erreurs expérimentales ne sont pas à craindre, et auxquelles nous pourrons ensuite comparer les mouvements réels.

2°. — Supposons choisie une de ces lois. Tant que le point B reste distinct du point A, nous avons des valeurs correspondantes parfaitement déterminées de Δs et de Δt ; le quotient reste lui-même parfaitement déterminé.

Quand le point B se confond avec le point A, nous avons simultanément $\Delta s = 0$, $\Delta t = 0$; le quotient $\Delta s : \Delta t$ prend la forme $0 : 0$ *qui ne signifie absolument rien.* Mais le calcul différentiel nous permet *d'extrapoler par continuité une valeur limite.*

En effet, admettons calculée la valeur *exacte* du quotient $\Delta s : \Delta t$

en fonction de Δs. Si elle tend vers une valeur parfaitement déterminée quand Δs diminue, nous pouvons admettre qu'elle aura rigoureusement cette valeur pour $\Delta s = 0$.

Nous définirons ainsi la limite du quotient :

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \text{dérivée de } s \text{ par rapport à } t.$$

3°. — Fixons les idées par un exemple. Prenons comme loi du mouvement :

$$s = at^2 + bt + c; \qquad (1)$$

on a :

$$s + \Delta s = a(t + \Delta t)^2 + b(t + \Delta t) + c,$$

$$\Delta s = (2at + b)\Delta t + a\Delta t^2, \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + b + a\Delta t. \qquad (2)$$

Ainsi le quotient $\Delta s : \Delta t$ a une valeur (2) parfaitement déterminée, quels que soient Δt et par suite Δs. Cette valeur s'approche indéfiniment de $2at + b$, quand Δt tend vers 0. Nous poserons que la valeur limite est exactement $2at + b$, pour $\Delta t = 0$, et nous écrirons :

$$\frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + b.$$

4°. — D'une manière générale, soit $s = f(t)$ la loi du mouvement. Le symbole signifie que la *fonction* s est reliée à la *variable* t par un procédé que je ne spécifie pas pour le moment, mais dont il me suffit de savoir qu'il permet de calculer la ou les valeurs de s quand je donne la valeur de t; par définition, s est fonction de t.

Si le temps (qui est ici la variable) subit un accroissement Δt, l'espace (qui est ici la fonction) subit un accroissement Δs. J'écris donc :

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t).$$

D'où : $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t), \quad \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

Jusqu'ici rien de nouveau. Supposons que Δt tendant vers 0, le dernier quotient tende vers une valeur bien déterminée; *je poserai que pour* $\Delta t = 0$, *cette valeur est rigoureusement exacte;* ce sera la dérivée de s par rapport à t :

$$\frac{ds}{dt} = \lim \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad \text{pour} \quad \Delta t = 0. \qquad (3)$$

Quant au calcul de cette dérivée, on ne peut évidemment l'effectuer qu'après avoir choisi la définition de la fonction f : *l'opération* (3) *n'est qu'indiquée.*

Les quantités ds et dt s'appellent des *différentielles.*

Par définition, elles ne sont ni grandes ni petites; *ce sont des quantités qui tendent vers zéro.* Ceci posé, dans la pratique on les

représente sur les figures et on les traite comme les *différences finies*, Δs, Δt, dont elles sont les limites. Cela n'a pas d'inconvénient pourvu qu'on n'oublie pas les définitions.

7. Représentation de la dérivée. Pente moyenne, pente vraie.

1°. — Soit une fonction $y = f(x)$, représentée par la courbe ABM. Menons la sécante AB. Quand on passe du point A au point B, l'abscisse augmente de $\overline{AC} = \Delta x$, l'ordonnée de $\overline{CB} = \Delta y$. La *pente* de la sécante est complètement définie par le rapport $\Delta y : \Delta x$. C'est la *pente moyenne* de la fonction $y = f(x)$, entre les points A et B.

Fig. 7.

A mesure que le point B se rapproche du point A, la sécante tend vers la tangente; simultanément la *pente moyenne* tend vers une limite qui est la *pente vraie* du point A. *La dérivée* $dy : dx$ *mesure donc la pente de la tangente au point* A.

Une fois la limite $dy : dx$ calculée pour le point A, pour déterminer la direction de la tangente, nous prendrons (fig. 8), à partir de A parallèlement à Ox, une longueur *quelconque* $\overline{AC}$, puis parallèlement à Oy une longueur :

$$\overline{CD} = AC \frac{dy}{dx}; \qquad (1)$$

Fig. 8.

nous déterminons ainsi un point D : *la droite* AD *est la tangente cherchée.*

Remarque.

Il importe de préciser ce qu'il faut entendre par prendre une longueur Δx parallèlement à un axe. Cela veut dire prendre une longueur égale à Δx fois l'unité choisie parallèlement à Ox. Mais l'unité n'a pas nécessairement la même valeur parallèlement aux deux axes; elle peut être le centimètre sur Ox, le millimètre sur Oy, par

exemple. Dans ce cas, pour avoir la tangente, il faut prendre parallèlement à Oy un nombre n de millimètres, parallèlement à Ox un nombre N de centimètres tels qu'on ait :

$$\frac{n}{N} = \frac{dy}{dx}.$$

2°. — Quand la fonction $y = f(x)$ nous est donnée, par le fait nous est donnée sa dérivée. Autrement dit, soit construite la courbe idéale représentative de la fonction $y = f(x)$: il est clair que sa pente nous est connue; peu importe actuellement la difficulté possible du calcul dans chaque cas particulier. Nous pouvons donc considérer la pente $dy : dx$ elle-même comme une fonction de x, donnée quand $y = f(x)$ est donnée :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x).$$

Inversement, soit donnée la fonction $\varphi(x)$, c'est-à-dire la pente la courbe pour toutes les valeurs de x. Il en résulte non pas une courbe, mais une infinité de courbes obtenues en transportant l'une d'elles parallèlement à l'axe Oy. Les deux courbes AE, A'E', par exemple (fig. 9), telles que pour tous leurs points on ait :

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{EE'} = \ldots,$$

ont évidemment des tangentes parallèles et des pentes égales pour les points placés sur la même verticale. Nous résumons ce qui précède en disant que *deux fonctions qui ont la même dérivée pour toutes les valeurs de la variable, ne diffèrent que par une constante.*

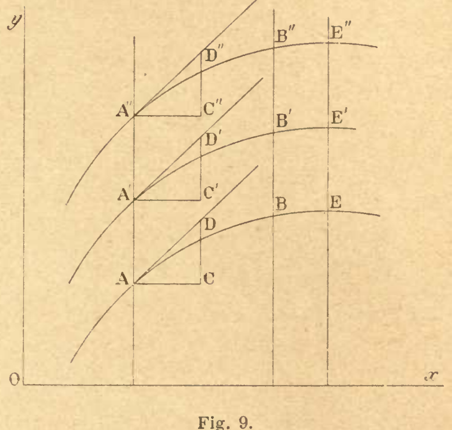


Fig. 9.

Autrement dit, toutes les fonctions qui satisfont à la relation :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x),$$

rentrent dans la forme générale : $y = f(x) + C$, où C est une constante *arbitraire.*

8. Étude d'une fonction au moyen de sa dérivée. Maximums et minimums, tangentes verticales.

1°. — Nous ne pouvons calculer la dérivée que si la fonction est connue. Mais rien ne nous empêche de chercher à quoi peut servir la dérivée *supposée connue.* Le lecteur se reportera au § 3; le calcul

différentiel nous apprend, y disons-nous, à étudier les propriétés des fonctions *indépendamment de leur spécification;* la méthode étant expliquée *in genere,* nous l'utiliserons ensuite *in specie.*

Supposons donc connue la dérivée; que nous apprendra-t-elle?

Si elle est *positive* entre certaines limites de la variable, cela signifie qu'entre ces limites *la pente est positive;* x croissant, y croît également. Il revient du reste au même de dire que x décroissant, y décroît également; ou enfin que x et y varient dans le même sens. Dans nos conventions d'axes, la courbe représentative parcourue de gauche à droite (x croissant) monte (y croissant).

C'est ce qui a lieu sur l'arc BCD (fig. 1) ou encore sur l'arc GF.

Si elle est négative, cela signifie que la pente est négative; parcourue de gauche à droite (x croissant), la courbe représentative descend (y décroissant). C'est ce qui a lieu sur les arcs AB et DF.

Si elle est nulle, la pente est nulle. Nous définissons ainsi les *maximums* (point D) et les *minimums* (point B).

D'après la manière même dont la dérivée est obtenue, nous pouvons considérer la quantité $dy : dx$ comme un véritable quotient. Nous avons donc :

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Si $dy : dx$ est très grand (point F), $dx : dy$ est très petit. Donc les abscisses pour lesquelles $dy : dx$ croît au delà de toute limite, sont celles pour lesquelles la fonction inverse $x = \varphi(y)$, présente un maximum ou un minimum. Autrement dit, quand $dy : dx$ croît au delà de toute limite, la tangente à la courbe est verticale.

2°. — Les remarques précédentes s'appliquent à toutes les fonctions; en revanche, elles ne nous apprennent rien d'immédiatement utilisable pour chacune d'elles. L'utilisation est subordonnée au calcul préalable de la dérivée.

On se demandera quel est le profit d'utiliser la dérivée, puisqu'en définitive elle ne nous apprend rien qu'un calcul direct ne puisse donner. Ayant soigneusement construit la courbe représentative point par point, comme conséquence de la définition de la fonction, nous savons où la pente est positive, où négative, où nulle.

C'est exact; mais on ne peut sans perte excessive de temps calculer un grand nombre de points; la connaissance de la dérivée détermine la direction de la tangente et, par suite, laisse deviner l'allure de la courbe au voisinage d'un point; enfin elle fournit directement certains résultats que le calcul d'un grand nombre de points donnerait moins exactement.

Par exemple, soit : $y = 6x^2 + 3x + 1$,

l'équation de la courbe. Le calcul du § 6 nous apprend qu'on a :

$$dy : dx = 12x + 3.$$

Nous voulons savoir pour quelle valeur de x, y prend sa valeur minima. Au lieu de construire la courbe point par point, nous écrivons que la dérivée est nulle :

$$12x + 3 = 0, \qquad x = -0,25.$$

3°. — Mais la dérivée a un autre avantage immédiat : elle nous permet, au voisinage d'un point, de remplacer la courbe par sa tangente : l'approximation dépend évidemment de la forme de la courbe au voisinage de ce point; nous apprendrons à l'évaluer (§ 38, *3°*).

Nous avons trouvé plus haut la formule (fig. 8) :

$$\mathrm{CD} = \overline{\mathrm{AC}}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a};$$

$(dy : dx)_{x=a}$ est la valeur de la dérivée quand, dans son expression générale, on substitue à x et à y les valeurs correspondantes particulières au point A : $x = a$, $y = b$.

Soit ξ, η, les coordonnées d'un point quelconque D de la tangente. On a : $\overline{\mathrm{CD}} = \eta - b$, $\overline{\mathrm{AC}} = \xi - a$.

D'où l'équation de la tangente :

$$\eta - b = (\xi - a)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}, \qquad \eta - f(a) = (\xi - a)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}. \quad (1)$$

Au voisinage du point A, nous pouvons généralement substituer l'équation (1) à l'équation exacte :

$$y = f(x).$$

9. Dérivées partielles : principe fondamental.

1°. — Nous supposons, dans ce qui précède, que la fonction y ne dépend que d'une variable x. Généralement elle dépend de plusieurs variables x, z, t, ... qui peuvent être *indépendantes* (c'est-à-dire qu'on peut supposer varier les unes sans les autres), ou qui peuvent être liées par une relation quelconque, peu importe. On a donc :

$$y = f(x, z, t, \ldots).$$

Quand x, z, t, ... deviennent $x + \Delta x$, $z + \Delta z$, $t + \Delta t$, ..., y subit un accroissement Δy qui dépend d'une manière complexe de Δx, Δz, Δt, ... En particulier, il est généralement impossible d'isoler la partie de l'accroissement qui dépend de Δx, de celle qui dépend de Δz, ...; Δx et Δz entrent simultanément dans certains termes.

Par exemple, soit $y = xz$.

On a : $y + \Delta y = (x + \Delta x)(z + \Delta z) = xz + x\Delta z + z\Delta x + \Delta x\Delta z$,

$$\Delta y = x\Delta z + z\Delta x + \Delta x\Delta z.$$

L'accroissement de Δy, quand x croît de Δx, ne peut être calculé sans connaître l'accroissement simultané Δz de la variable z.

Mais quand Δx et Δz tendent simultanément vers zéro, le terme $\Delta x \Delta z$ décroît beaucoup plus vite que les deux autres. *A la limite*, il devient négligeable.

2°. — En généralisant, nous obtenons ce *principe* dont nous nous défendons de donner une démonstration, quittes à le vérifier dans tous les cas particuliers : *On peut calculer la limite de l'accroissement de la fonction pour un accroissement infiniment petit de l'une des variables dont elle dépend, sans s'occuper des accroissements infiniment petits simultanés des autres variables;* autrement dit, *on calcule cette limite en supposant constantes les autres variables.*

Nous écrivons : $dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz + \frac{\partial y}{\partial t}dt + \ldots$

$\frac{\partial y}{\partial x}$ (qu'on écrit encore $\partial y : \partial x$ ou $\partial y / \partial x$) est *la dérivée partielle de y par rapport à x*; elle ne diffère en rien d'une dérivée ordinaire. Le mot *partiel* rappelle seulement que y dépend non seulement de x, mais encore d'une ou plusieurs autres variables :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'_x = \lim \frac{f(x + \Delta x, z, t, \ldots) - f(x, z, t, \ldots)}{\Delta x}, \quad \text{pour} \quad \Delta x = 0.$$

Reprenons l'exemple : $y = xz$.

Nous avons : $dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = x;$

$$dy = zdx + xdz.$$

Remarque.

Si on a identiquement $y = f(x, z, t, \ldots) = 0$, la relation devant être satisfaite en particulier pour les valeurs $x, z, t, \ldots$ des variables et les valeurs infiniment voisines $x + dx, z + dz, \ldots$, on a identiquement :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots = 0,$$

ou, suivant la notation de Lagrange :

$$f'_x dx + f'_z dz + f'_t dt + \ldots = 0.$$

10. Infiniment petits d'ordres divers.

1°. — Il n'y a pas de règles générales de dérivation; c'est évident, puisque nous sommes libres d'inventer des fonctions en nombre quelconque. Dans chaque cas particulier, nous devons appliquer la définition :

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ce qu'on appelle parfois *règles de dérivation* est l'ensemble des résultats pour les fonctions *usuelles;* nous les établirons plus loin.

Mais on peut faciliter les calculs au moyen de remarques géné-

rales; par exemple, il est commode de classer les infiniment petits en différents ordres.

2°. — On prend un infiniment petit α comme *principal;* il sert de terme de comparaison, d'*unité* pour évaluer *au même instant* les autres infiniment petits.

On appelle infiniment petits du *premier ordre* α', tous ceux dont les rapports avec α ont des limites finies quand α s'annule. Ils rentrent donc dans la forme générale :

$$\alpha' = \alpha(p + \alpha''),$$

où p est une quantité finie et α'' un infiniment petit. Quand α s'annule, le quotient $\alpha' : \alpha$ tend vers p.

On appelle infiniment petits *du second ordre* β, tous ceux dont les rapports avec α sont des infiniment petits du premier ordre. Ils rentrent donc dans la forme générale :

$$\beta = \alpha\alpha'(p + \alpha'').$$

On définit de même de proche en proche les infiniment petits d'un ordre quelconque. On verra aisément qu'un infiniment du $n^{ième}$ ordre rentre dans la forme générale :

$$\delta = \alpha^n (p + \alpha');$$

p est une quantité finie, α' un infiniment petit.

3°. — Précisons ces notions sur un exemple.

En vertu des propriétés du cercle, on a (fig. 10) :

$$\overline{BC} \,.\, \overline{BD} = \overline{BA}^2, \qquad \overline{AE} \,.\, \overline{ED} = \overline{CE}^2. \qquad (1)$$

Prenons $\overline{AB}$ comme infiniment petit principal. Joignons le point variable B au point fixe D; cherchons comment s'annulent les lignes $\overline{CA}$, $\overline{CE}$, CB, $\overline{AE}$, quand B tend vers A.

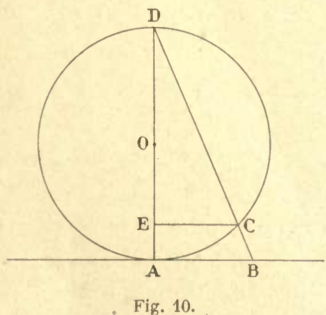


Fig. 10.

Il est d'abord évident que l'arc $\overline{CA}$ et la corde $\overline{CE}$ tendent à égaler $\overline{AB}$. Les grandeurs CA et $\overline{CE}$ sont donc du premier ordre, puisque leur rapport à l'infiniment petit principal tend vers une limite finie (qui est 1 dans le cas particulier).

Les quantités $\overline{CB}$ et $\overline{EA}$ sont au contraire du second ordre, ainsi qu'il résulte des équations (1). Quand B arrive en A, $\overline{BD}$ et $\overline{ED}$ deviennent égales au double du rayon; $\overline{BC}$ et $\overline{AE}$ tendent donc vers la même valeur :

$$\lim \overline{AE} = \lim \overline{BC} = \lim .\, \overline{BA}^2 : 2R.$$

4°. — L'intérêt des considérations précédentes réside dans la pro-

position que voici; nous nous contenterons de l'énoncer; elle sera amplement expliquée et vérifiée par les applications.

Quand on cherche la limite du rapport de deux quantités qui sont la somme d'infiniment petits de divers ordres, il suffit de conserver dans chacune les infiniment petits de l'ordre le moins élevé.

Cette proposition est au fond identique avec le principe fondamental du § 9.

11. Fonctions composées.

Le calcul des dérivées est singulièrement facilité par l'application du principe fondamental (§ 9). Toute fonction d'une variable u peut être considérée d'une infinité de manières comme *composée*, c'est-à-dire comme fonction de plusieurs variables x, z, t, ... elles-mêmes fonctions de la variable u.

Quand les variables x, z, t, ... sont indépendantes, nous avons vu que le principe se traduit par la formule :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz + \frac{\partial y}{\partial t} dt + \dots$$

Dire que les variables sont indépendantes, c'est dire que nous pouvons choisir à notre gré les quantités dx, dz, dt, ...; nous pouvons *par conséquent* les lier aux variations d'une autre quantité u. Nous avons alors :

$$dx = \frac{dx}{du} du, \qquad dz = \frac{dz}{du} du, \dots$$

D'où la formule :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{du} du + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{du} du + \dots$$

Posons, par exemple : $y = xz$, $x = f(u)$, $z = \varphi(u)$;

on a : $$dy = z \frac{df}{du} du + x \frac{d\varphi}{du} du,$$

ce qu'on peut encore écrire, en employant la notation de Lagrange ou celle de Newton :

$$dy = zf'du + x\varphi'du = z\dot{f}du + x\dot{\varphi}du.$$

12. Formule du binôme.

Pour obtenir la différentielle d'une puissance, commençons par établir la formule du binôme dont l'emploi est fréquent.

1°. — Il s'agit de calculer $(a+b)^m$.

Un calcul direct donne les formules :

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

et ainsi de suite. Plusieurs constatations sont immédiates.

D'abord le développement de $(a+b)^m$ contient $m+1$ termes. Ensuite la somme des exposants de a et de b dans tous les termes du développement est égale à m. Enfin les coefficients également distants des extrêmes sont égaux.

Ces simples remarques évitent beaucoup d'erreurs.

Les formules précédentes rentrent dans la formule plus générale :

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 + \ldots; \quad (1)$$

le développement doit être continué jusqu'à ce que le nombre des termes soit $m+1$, ou, ce qui revient au même, jusqu'à ce que le coefficient s'annule.

2°. — Cette constatation n'est pas une preuve; rien ne dit que la formule valable pour $m=4$, le sera pour $m=5$. Prouvons-le à l'aide du raisonnement général qui sert à établir la légitimité *d'une formule quelconque de récurrence.* Démontrons que si la formule vaut pour la puissance m, elle vaut encore pour la puissance $m+1$.

3°. — Considérons deux termes consécutifs quelconques de la formule donnant $(a+b)^m$:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n+1\,!} a^{m-n-1}b^{n+1}$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n-1)}{n+2\,!} a^{m-n-2}b^{n+2}.$$

On écrit pour abréger : $1.2.3 \ldots (n+1) = n+1\,!$,

et on lit *factorielle* $n+1$.

Par exemple : $3! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$; $\quad 3\,!\,4 = 4\,!$.

Quand nous multiplierons par $a+b$ le développement de $(a+b)^m$ pour obtenir $(a+b)^{m+1}$, le terme en $a^{m-n-1}b^{n+2}$ proviendra de la multiplication par b du premier terme écrit ci-dessus et de la multiplication par a du second. On vérifiera que seuls ils peuvent intervenir dans la production d'un terme en $a^{m-n-1}b^{n+2}$.

Le coefficient de ce terme est la somme des coefficients, soit :

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n+1\,!}\left(1+\frac{m-n-1}{n+2}\right) = \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n)}{n+2!}$$

qui est précisément le coefficient de $a^{m-n-1}b^{n+2}$ dans le développement de $(a+b)^{m+1}$ au moyen de la formule (1) appliquée à l'exposant $m+1$. Ce qui légitime cette formule.

4°. — Appliquons à un cas particulier. Soit :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Considérons les deux termes : $4a^3b + 6a^2b^2$.

Quand nous multiplions par $a+b$, le terme en a^3b^2 du déve-

loppement de $(a+b)^5$ provient de la multiplication de a^3b par b et de a^2b^2 par a. Nous aurons donc dans $(a+b)^5$ le terme :

$$(4+6)a^3b^2 = 10a^3b^2.$$

Or : $$\frac{4}{1}\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{5.4}{1.2}=10=\frac{m(m-1)}{1.2}, \quad \text{où} \quad m=5.$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

13. Différentielles des puissances.

Soit : $$y = ax^m.$$

1°. — Supposons d'abord m entier et positif. On a par définition :

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{a(x+\Delta x)^m - ax^m}{\Delta x}.$$

Développons par la formule du binôme :

$$(x+\Delta x)^m - x^m = \frac{m}{1}x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots$$

Quand Δx tend vers zéro, les termes du second membre, moins le premier, deviennent négligeables devant celui-ci ;

d'où : $$dy = amx^{m-1}dx.$$

Le principe fondamental donne le même résultat.

Soit $$m = 4.$$

Posons : $y = axztu$, $\quad dy = adx.ztu + adz.xtu + \ldots$

Posons maintenant : $x = z = t = u$.

Il vient : $dy = adx.x^3 + adx.x^3 + \ldots = 4ax^3.dx$;

et généralement : $dy = amx^{m-1}dx$.

2°. — Soit m fractionnaire et égal à $p : q$.

Élevons les deux membres à la puissance q; on a :

$$y^q = a^q x^p. \qquad (1)$$

Différentions les deux membres d'après la règle précédente :

$$qy^{q-1}dy = a^q p x^{p-1}dx, \qquad (2)$$

$$dy = a^q \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^q}ydx = m\frac{x^{p-1}}{x^p}ydx = mx^{-1}ydx,$$

et enfin : $dy = mx^{-1}ax^m dx = amx^{m-1}dx$;

formule trouvée précédemment.

3°. — Tout nombre pouvant être considéré comme fractionnaire avec telle approximation qu'on veut, la règle se trouve ainsi applicable à toute valeur positive de l'exposant m.

4°. — Supposons m négatif. Posons $m = -n$.

$$y = ax^m = \frac{a}{x^n}.$$

Au lieu de considérer y comme fonction de x^n, considérons-le comme fonction de la variable z que nous poserons égale à x^n : $z = x^n$. Il va de soi que rien n'est changé.

Différentions la fonction y de z :

$$dy = ad\left(\frac{1}{z}\right) = a \lim\left(\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}\right) = -a \lim \frac{\Delta z}{(z+\Delta z)z} = -a\frac{dz}{z^2}.$$

Remplaçons z par sa valeur :

$$dy = -a\frac{d(x^n)}{x^{2n}} = -na\frac{x^{n-1}}{x^{2n}}dx = -nax^{-n-1}dx\,;$$

et enfin : $$dy = max^{m-1}dx.$$

La formule est donc absolument générale.

14. Différentielles d'un produit, d'un quotient.

1°. — Nous avons déjà traité le cas de la différentielle d'un produit comme conséquence du principe fondamental (§ 9).

$$d(xzt\ldots) = zt\ldots dx + xt\ldots dz + \ldots$$

Divisons les deux membres par le produit :

$$\frac{d(xzt\ldots)}{xzt} = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \ldots$$

Nous verrons plus tard (§ 197) l'interprétation de cette formule, importante dans la théorie des erreurs relatives.

2°. — Soit la fonction : $y = \dfrac{x}{z}$.

Par définition, nous avons :

$$dy = \lim\left(\frac{x+\Delta x}{z+\Delta z} - \frac{x}{z}\right) = \lim\frac{z\Delta x - x\Delta z}{(z+\Delta z)z} = \frac{zdx - xdz}{z^2}.$$

En effet, quand Δz tend vers 0, $z\Delta z$ devient négligeable devant z^2. On a coutume de retenir par cœur ce résultat et les résultats analogues ; c'est déplorable : il y a de meilleures choses à caser dans sa cervelle. Dans la pratique, on doit toujours appliquer le principe fondamental (§ 9) et écrire :

$$dy = \frac{dx}{z} - x\frac{dz}{z^2}.$$

Nous différentions d'abord par rapport à x en laissant z constant, puis par rapport à z en laissant x constant. Je n'ignore pas qu'il y aura généralement ensuite à réduire au même dénominateur ; on perdra donc 8 secondes 22 fois dans sa vie. C'est mieux que retenir une formule dont on oublie le sens.

3°. — Fonctions composées.

Revenons sur les fonctions composées.

Soit : $y = xz, \quad x = au^n, \quad z = bu^m.$

Nous pouvons écrire :

$$y = abu^{m+n}, \qquad dy = (m+n)abu^{m+n-1}du.$$

Procédons autrement :

$$dy = xdz + zdx = bx \, . \, mu^{m-1}du + az \, . \, nu^{n-1}du\,;$$

$$dy = abmu^{m+n-1}du + abnu^{m+n-1}du = ab(m+n)u^{m+n-1}du.$$

15. Fonctions homogènes.

1°. — Une fonction $f(x, y, z, ...)$ est dite *homogène de degré* m quand on a identiquement :

$$f(tx, ty, tz, ...) = t^m f(x, y, z, ...). \qquad (1)$$

En multipliant par un nombre quelconque t *toutes les variables, on multiplie la fonction par la puissance* m *de* t.

Ainsi la fonction : $ax^2 + 2bxy + cy^2$,

est homogène du premier degré en a, b, c; elle est homogène du second degré en x, y.

2°. — Posons $tx = 1$; la formule de définition (1) s'écrit :

$$x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ...\right) = f(x, y, z, ...).$$

La fonction homogène est donc égale à une puissance de l'une quelconque x de ses variables, multipliée par une fonction des rapports de ses autres variables à x.

Ainsi : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax^2\left[1 + 2\frac{b}{a}\frac{y}{x} + \frac{c}{a}\frac{y^2}{x^2}\right]$.

3°. — Soit l'équation : $f(x, y, z, ...) = 0$,

où f est une fonction homogène de degré m. On a en vertu du 2° :

$$x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ...\right) = 0.$$

On peut donc remplacer les variables par des valeurs proportionnelles.

4°. — D'après la définition, on peut écrire :

$$f[(1+\varepsilon)x, (1+\varepsilon)y, (1+\varepsilon)z, ...] = (1+\varepsilon)^m f(x, y, z).$$

Supposons ε infiniment petit ; développons le second membre par la formule du binôme ; négligeons les puissances de ε supérieures à la première; il vient :

$$f[(x+\varepsilon x), (y+\varepsilon y), (z+\varepsilon z), ...] - f(x, y, z,) = m\varepsilon f(x, y, z).$$

Mais le premier membre est la différentielle de $f(x, y, z)$ par rapport aux accroissements εx, εy, εz, ...

On a donc : $\varepsilon\left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + ...\right] = m\varepsilon f$;

et enfin : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + ... = mf$;

relation *caractéristique* des fonctions homogènes de degré m.

Par exemple, soit la fonction : $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

On a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + 2by$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2bx + 2cy$;

$$x(2ax + 2by) + y(2bx + 2cy) = 2(ax^2 + 2bxy + cy^2).$$

16. Expressions qui se présentent sous une forme indéterminée.

1°. — Rien ne vaut, pour bien comprendre la nature de la dérivée, l'étude de certaines fonctions qui se présentent sous la forme $0 : 0$ pour une valeur de la variable. *Remarquons qu'il en est toujours ainsi pour la dérivée :* c'est un quotient dont les deux termes tendent simultanément vers 0. Nous avons expliqué que l'indétermination serait réelle si on se bornait à considérer la valeur limite des deux termes ; elle disparaît si l'on considère des valeurs voisines de 0, mais finies, de ces deux termes : leur quotient est alors complètement déterminé, et cette détermination persiste si petits qu'ils soient. D'où par extrapolation la valeur de la limite, quand ils s'annulent.

2°. — Soit la fonction : $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$.

Pour $x = a$, les deux termes s'annulent : il y a indétermination. Considérons donc des valeurs de x voisines de a et cherchons ce que devient le rapport. Mais chercher la valeur de $z = f(x)$ pour des valeurs de x voisines de a (§ 8, *3°*), revient à calculer la différentielle dz en fonction de la différentielle dx et à remplacer x par a dans le résultat :

$$\frac{dz}{dx} = \lim \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \left[\frac{d}{dx} f(x)\right]_{x=a}.$$

$$\left[d(x^2 - a^2) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } a\right] = \left[2x\right]_{x=a} dx = 2a.dx,$$

$$\left[d(x - a) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } a\right] = dx.$$

Pour des valeurs de x voisines de a, on a donc : $y = 2a$. Nous donnerons à y cette valeur quand x est rigoureusement égal à a. Ce résultat était du reste évident *a priori,* puisque

$$(x^2 - a^2) : (x - a) = x + a,$$

qui vaut $2a$ pour $x = a$.

D'une manière générale, soit : $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, avec les conditions $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$.

Pour déterminer la valeur de y pour $x = a$, nous écrirons :

$$y + \Delta y = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\varphi(a + \Delta x) - \varphi(a)} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} : \frac{\varphi(a + \Delta x) - \varphi(a)}{\Delta x},$$

et enfin quand Δx et par suite Δy tendent vers 0 :

$$[y]_{x=a} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Le symbole $f'(a)$ représente la valeur que prend la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, quand x est égal à a.

3°. — On ramène immédiatement au cas précédent les expressions qui se présentent sous la forme $0 \times \infty$, ou $\infty : \infty$. En effet, on peut écrire dans le premier cas :

$$y = f(x)\varphi(x) = f(x) : [1 : \varphi(x)].$$

On est ramené à la forme $0 : 0$.

On a dans le second cas :

$$y = f(x) : \varphi(x) = [1 : \varphi(x)] : [1 : f(x)].$$

On est encore ramené à la forme : $0 : 0$.

Le principe est toujours le même. *L'indétermination tenant à certaines valeurs de la variable, considérons les valeurs voisines. L'indétermination cesse généralement ; nous extrapolons le résultat jusqu'à la valeur précise de la variable où l'indétermination est réelle.*

C'est exactement ainsi que nous procédons pour obtenir la dérivée.

Ces considérations deviendront plus claires par la suite, après que nous aurons traité quelques exemples.

17. Dérivées de différents ordres.

1°. — Il n'y a aucune idée nouvelle dans la définition des dérivées d'ordre supérieur.

Soit $y = f(x)$, une fonction de x. Dès qu'elle est définie, quel que soit du reste le procédé employé, nous sommes censés pouvoir calculer la dérivée $p = dy : dx$. Autrement dit, la courbe représentative de $y = f(x)$ étant tracée, nous sommes censés pouvoir calculer sa pente : c'est une nouvelle fonction $p = \varphi(x)$.

Rien n'empêche de la traiter comme précédemment la fonction $f(x)$. En particulier, nous pouvons calculer sa pente :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Nous écrirons : $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2};$$

par définition, c'est *la dérivée seconde* de y par rapport à x.

De même cette dérivée seconde est une certaine fonction de x dont nous pouvons calculer la dérivée. Nous poserons :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d^3y}{dx^3},$$

et ainsi de suite.

Dans le cas où la variable x représente le temps, où la fonction y représente l'espace parcouru, $dy : dx$ est *la vitesse*, $d^2y : dx^2$ est *l'accélération*.

2°. — Il est essentiel de se rendre compte de la nature des quantités d^my et dx^m.

Pour cela considérons la *série* des quantités :

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots$$

Posons : $\Delta y = y_1 - y,\quad \Delta y_1 = y_2 - y_1,\quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots$

Ce sont les *différences premières*.

Les *différences secondes* sont par définition :

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

et ainsi de suite.

Supposons que les quantités y, $y_1, \dots$ soient les valeurs d'une fonction pour les valeurs x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x, \dots$ d'une variable. Les rapports des différences premières aux accroissements sont :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \frac{\Delta y_1}{\Delta x}, \dots$$

Opérant sur ces rapports comme précédemment sur les quantités y, $y_1, \dots$ nous obtenons :

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y}{\Delta x^2},\qquad \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta x^2}, \dots$$

Il suffit que les Δx tendent vers 0, pour retrouver les dérivées des différents ordres.

Ce calcul a l'avantage de montrer la nature des quantités qui entrent dans les dérivées. Le dénominateur dx^m est véritablement une puissance. Si nous voulons vérifier l'homogénéité des formules et si dx représente une ligne, dx^2 représentera l'aire d'une surface, dx^3 le volume d'un solide, ... Au contraire, si dy représente une ligne, $d^2y, \dots, d^my$ représenteront également une ligne. Par exemple, nous trouverons pour l'expression du rayon de courbure (§ 91) :

$$\rho = \pm \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$dy : dx$ est un nombre; le numérateur de l'expression est donc homogène; $d^2y : dx^2$ est l'inverse d'une ligne; son inverse est par conséquent une ligne. Ce qui justifie la formule du point de vue de l'homogénéité.

18. Distinction entre les maximums et les minimums; points d'inflexions.

Au § 8, nous avons vu que les maximums et les minimums correspondent aux valeurs de la variable qui annulent la dérivée pre-

mière. Il s'agit de distinguer les minimums des maximums. Reportons-nous à la figure 1.

Sur l'arc AB, avant d'arriver au minimum B, la pente de la courbe, *qui est négative, décroît en valeur absolue; algébriquement* la pente *croît,* puisqu'on regarde une quantité négative comme inférieure à zéro. Au delà du point B, la pente *qui est positive, croît.* Donc le *minimum* est caractérisé par une pente *nulle et croissante* :

$$\frac{dy}{dx}=0, \qquad \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}>0.$$

Sur l'arc CD, la pente *qui est positive, décroît;* au delà du point D, la pente *qui est négative,* croît *en valeur absolue;* algébriquement elle décroît. Donc le *maximum* est caractérisé par une pente *nulle et décroissante :*

$$\frac{dy}{dx}=0, \qquad \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}<0.$$

Il va de soi qu'entre un maximum et un minimum, la dérivée seconde doit s'annuler : cela indique que la pente elle-même passe par un maximum (comme au voisinage du point C) ou un minimum. Pour trancher la question autrement que par une figure, il faudrait considérer la dérivée troisième. Et ainsi de suite (voir § 93).

Quand la dérivée seconde est nulle, c'est-à-dire la pente maxima ou minima, on dit que le point est *d'inflexion.*

19. Dérivation graphique ou numérique.

Ce qui précède nous amène à dire quelques mots de la dérivation graphique ou numérique.

Une série d'expériences se traduit par une série de points ABCDE ... dans un plan. Aux valeurs x_0, x_1, x_2, ... de la variable (valeurs qui ne sont pas nécessairement équidistantes) correspondent les valeurs y_0, y_1, y_2, ... de la fonction, *déterminées avec une erreur qui n'est jamais nulle.*

Fig. 11.

Calculer les pentes moyennes :

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \qquad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}, \ldots$$

est un travail absolument vain. Il suffit d'un coup d'œil sur la figure 11 pour juger de l'incohérence des résultats. *A fortiori* pour les diffé-

rences secondes (à supposer les quantités x_0, x_1, ... équidistantes).

Ce n'est jamais ainsi qu'on procède. On trace une courbe *continue*, passant entre les points expérimentaux, courbe *dont on calcule l'équation;* les dérivations de tous ordres se font sur cette courbe qui est substituée aux expériences.

Naturellement il faut *choisir* la courbe continue. Nous reviendrons plus loin sur les raisons pratiques qu'il y a de se déterminer pour une forme particulière d'équation (§ 263).

20. Changement de la variable indépendante.

Soit y une fonction de la variable x qui est elle-même une fonction de la variable t. Je peux donc considérer arbitrairement y comme fonction de x ou comme fonction de t. Le problème est d'exprimer les dérivées $d^ny : dx^n$, en fonction des dérivées

$$d^ny : dt^n \quad \text{et} \quad d^nx : dt^n,$$

et des dérivés d'ordre moindre.

1°. — Nous avons d'abord :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}; \qquad \text{d'où :} \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right). \qquad \text{(I)}$$

2°. — Posons $p = dy : dx$. C'est à volonté une fonction de x ou de t.

D'où : $$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Remplaçons $dy : dx$ par sa valeur (I); il vient en appliquant la règle du § 14 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right] : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3. \qquad \text{(II)}$$

On trouverait de même :

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \left[\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right] : \left(\frac{dy}{dt}\right)^3. \qquad \text{(II')}$$

Comparons (II) et (II'); il vient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3. \qquad \text{(III)}$$

On peut aussi obtenir cette formule à partir de (II) en posant identiquement $t = y$, ou de (II') en posant identiquement $t = x$.

Dans le premier cas, $dy : dt = 1$, $d^2y : dt^2 = 0$;
dans le second cas, $dx : dt = 1$, $d^2x : dt^2 = 0$.

3°. — Continuons pour le troisième ordre. Posons maintenant :

$$p = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^3y}{xd^3} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dp}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Remplaçons p par son expression (II) et effectuons les dérivations indiquées :

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\right]:\left(\frac{dx}{dt}\right)^5. \qquad \text{(IV)}$$

Et ainsi de suite.

Application.

Nous rencontrerons sous le nom de *rayon de courbure* une quantité qui a pour expression (§ 17) :

$$\rho=\pm\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}:\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Supposons y et x exprimés au moyen d'une variable t. Négligeons d'écrire les dénominateurs; ρ prend la forme :

$$\rho=\pm[dx^2+dy^2]^{\frac{3}{2}}:[dxd^2y-dyd^2x].$$

21. Dérivées de différents ordres pour une fonction de plusieurs variables indépendantes.

Soit la fonction : $z=f(x, y, t, \ldots)$, de plusieurs variables. Pour calculer les dérivées de divers ordres, appliquons le principe fondamental du § 9. Laissant toutes les variables fixes *sauf une*, x par exemple, nous regarderons z comme fonction de la variable unique x et calculerons ses dérivées successives par rapport à x d'après les règles énoncées.

Supposons la dérivée première obtenue : $\frac{\partial z}{\partial x}$. C'est encore une fonction de x, y, t, ... dont nous pouvons chercher la dérivée par rapport à une autre variable, y, par exemple.

Nous obtenons ainsi *la dérivée partielle seconde :*

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x},$$

que nous écrivons : $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Montrons que *l'ordre des différentiations est indifférent;* c'est dire qu'on a :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

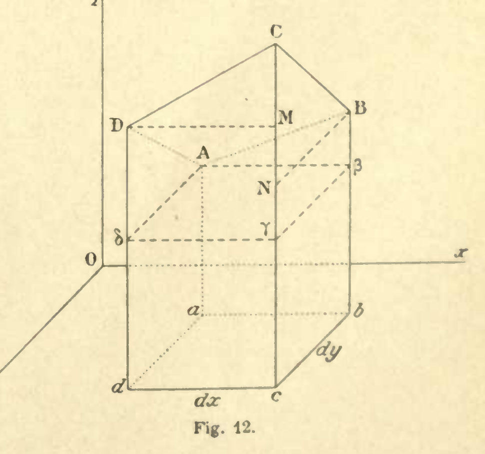


Fig. 12.

Pour rendre manifeste le sens de cette relation, supposons z fonction de x et de y seulement : $z=f(x, y)$. Nous

pouvons représenter z par une surface. Prenons (fig. 12) trois axes de coordonnées trirectangles Ox, Oy, Oz. En un point a du plan xOy, élevons une perpendiculaire de longueur $z = z(x, y) = f(x, y)$. Nous tracerons ainsi la surface point par point.

Considérons l'élément de surface ABCD découpé par les verticales dont les pieds sont sur le rectangle $abcd$, de côtés dx et dy. Soit x, y, les coordonnées du point a.

Nous pouvons assimiler l'élément à un quadrilatère plan.

Évaluons les pentes de ses quatre côtés :

$$\text{pente } AB = \overline{\beta B} : \overline{A\beta} = [f(x+dx, y) - f(x,y)] : dx = \frac{\partial}{\partial x} f(y),$$

$$\text{pente } DC = \overline{MC} : \overline{DM} = [f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy)] : dx$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} f(y+dy).$$

Ce qui signifie que la pente de AB est égale au taux de variation par rapport à x de la fonction z, dans laquelle l'autre variable a la valeur constante y. Le point du plan xOy se déplace suivant ab. La pente de DC est égale au taux de variation par rapport à x de la même fonction z, quand on donne à l'autre variable la valeur constante $y + dy$.

Évaluons maintenant la différence des pentes :

$$(\overline{MC} - \overline{\beta B}) : dx = \frac{\partial}{\partial x} [f(y+dy) - f(y)] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy.$$

$$\overline{MC} - \overline{\beta B} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy.$$

Recommençons la même opération sur les côtés parallèles à yOz. Nous trouverons :

$$\text{pente } AD = \frac{\partial}{\partial y} f(x), \qquad \text{pente } BC = \frac{\partial}{\partial y} f(x+dx);$$

$$\overline{NC} - \overline{\delta D} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dxdy.$$

Or on a : $\overline{MC} - \overline{\beta B} = \overline{NC} - \overline{\delta D}$, $\qquad \overline{\delta D} + \overline{MC} = \overline{\beta B} + \overline{NC}$.

Donc : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Comme on peut toujours considérer z comme fonction seulement des deux variables dont on veut intervertir les dérivations, le théorème se trouve démontré dans le cas général.

Remarque.

Nous écrivons plus haut :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y} dy\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) . dy.$$

En effet, x et y sont des variables indépendantes; il en est de

même de dx et de dy. La quantité dy ne dépendant pas de dx, sa dérivée par rapport à x est nulle.

22. Fonction continue ainsi qu'un certain nombre de ses dérivées.

1°. — Une fonction peut être continue sans que sa dérivée le soit; c'est un phénomène fréquent, dont il est essentiel de comprendre le caractère peu exceptionnel.

Quelques exemples éclairciront la question.

2°. — Soit un cylindre constitué par l'empilement de trois cylindres d'argent, d'or et de cuivre, terminés par des sections droites de

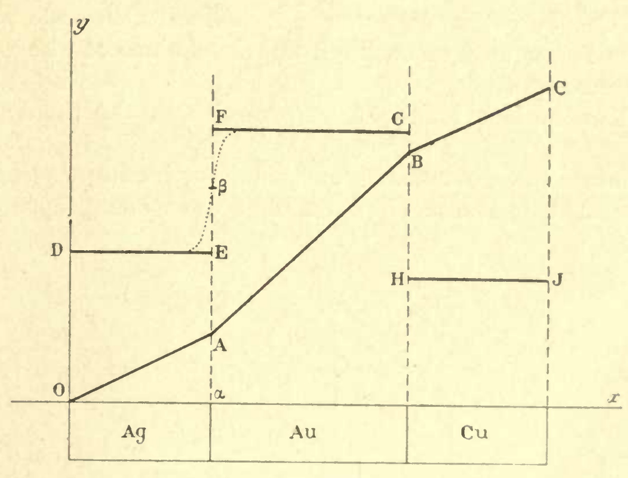


Fig. 13.

même aire s. Prenons comme variable x (portée sur Ox) la distance d'une section droite à la section terminale passant par O. Traçons la courbe OABC qui représente le poids y du cylindre de longueur x.

La courbe est évidemment *continue,* mais possède deux points *anguleux* A et B qui correspondent aux sections pour lesquelles le poids spécifique change brusquement.

La dérivée est discontinue.

Elle représente en effet le taux d'accroissement du poids par rapport à la longueur. Or le poids d'un cylindre de section s, de poids spécifique δ et de longueur dx, est $s\delta dx$.

La pente de la courbe est donc $s\delta$: *elle est proportionnelle au poids spécifique.* La courbe représentative de la dérivée est formée des trois droites horizontales : DE, FG, HJ.

Si les cylindres d'argent et d'or, au lieu d'être simplement *juxtaposés,* étaient *soudés,* la discontinuité disparaîtrait. Sur la courbe des densités, on obtiendrait un raccordement représenté en pointillé. Le

point anguleux A serait remplacé par une courbure plus ou moins prononcée.

Au point A, *la pente de la courbe* OAB *est indéterminée.* Aussi près du point A qu'on veut et à gauche de ce point, la pente est bien déterminée : c'est celle de la droite OA. Aussi près du point A qu'on veut et à droite de ce point, la pente est bien déterminée : c'est celle de la droite AB. Mais au point A lui-même, elle a telle valeur qu'on veut. Conventionnellement, on peut dire qu'elle a toutes les valeurs intermédiaires entre αE et αF. Quand nous voudrons représenter analytiquement la courbe discontinue DEFG, nous serons conduits (§ 270) à prendre, pour valeur de la pente correspondante à l'abscisse $\overline{O\alpha}$, la valeur *moyenne* $\overline{\alpha\beta}$; mais il n'en reste pas moins évident que la tangente en un point anguleux d'une courbe est absolument indéterminée.

3°. — L'exemple suivant est emprunté à la théorie des électromètres.

Imaginons deux plaques rectangulaires identiques AB, CD. L'une AB est fixe; l'autre CD est mobile dans son propre plan XX.

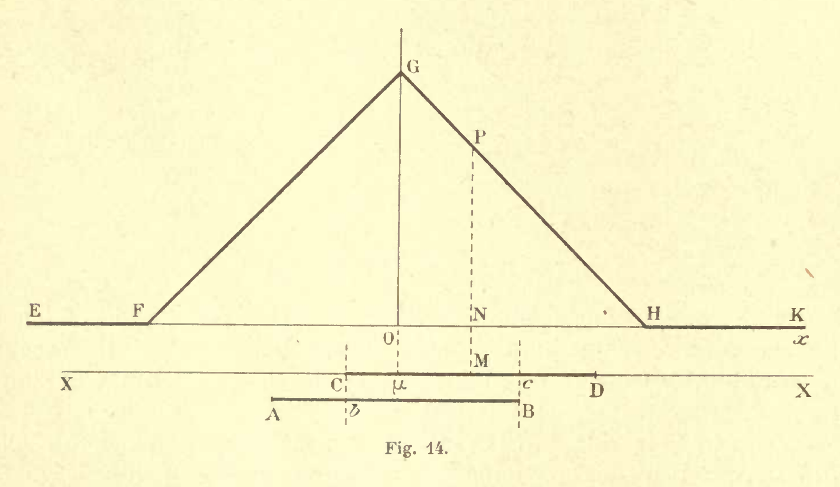


Fig. 14.

Lorsque le milieu M de CD est dans l'aplomb du point O, les deux plaques sont la projection orthogonale l'une de l'autre. A partir de cette position, les déplacements de CD ont lieu parallèlement à l'un des côtés des rectangles (plan du tableau).

Pour chaque position de CD, l'aire des portions des plaques qui sont la projection orthogonale l'une de l'autre (aires en regard) est proportionnelle à $\overline{Cc} = \overline{bB}$. Considérons-la comme fonction du déplacement $\overline{ON} = \overline{\mu M}$: nous obtenons la courbe représentative EFGHK.

Quand le milieu de CD est dans l'aplomb de O, les portions en regard sont proportionnelles à $\overline{CD} = \overline{OG}$. Puis elles diminuent

linéairement pour s'annuler quand le point C vient dans l'aplomb de B, ou quand le point D vient dans l'aplomb de A.

Ensuite de quoi elles restent évidemment nulles.

Ainsi, pour représenter un phénomène extrêmement simple, nous devons avoir recours à une fonction *continue*, mais dont la courbe représentative a trois points anguleux, *ce qui revient à dire que sa dérivée présente trois discontinuités.* A partir des points F, G ou H, les rapports des accroissements de la variable et de la fonction ne sont pas les mêmes quand on se déplace vers la gauche ou vers la droite.

On rencontre même ce résultat paradoxal qu'au point G la fonction est maxima sans que la dérivée s'annule. A vrai dire, elle s'annule si l'on veut, puisque sa valeur est indéterminée (voir le *1*°).

4°. — La fonction peut être continue, ainsi que sa dérivée première, tandis que la dérivée seconde présente des discontinuités. Cela revient à dire (§ 91) que la courbe représentative change brusquement de courbure. Par exemple, la fonction qui serait représentée par l'ensemble des cercles AB de centre C et BD de centre C′ est continue, ainsi que sa dérivée première: *la dérivée seconde est discontinue* en B.

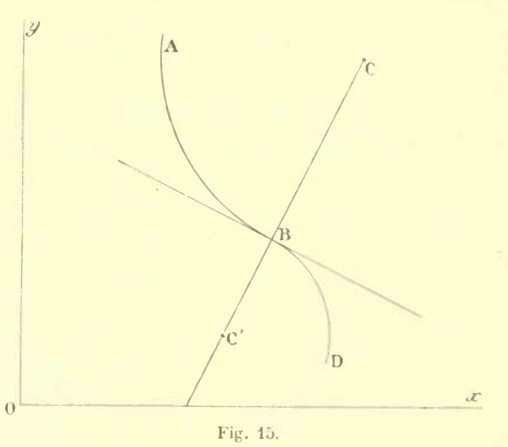


Fig. 15.

C'est là un phénomène très fréquent en Mécanique. Chaque fois qu'un corps en heurte un autre, la vitesse ne subit aucune variation discontinue (§ 2); mais l'accélération (§ 17) est brusquement modifiée.

On peut dire que les fonctions qui sont continues, ainsi que toutes leurs dérivées, sont très rares *dans les applications.* Cela ne nous empêchera pas d'en étudier de telles, plus exactement de n'étudier guère que celles-là. Nous en serons quittes pour représenter les fonctions discontinues à l'aide d'un certain nombre de fonctions continues se raccordant convenablement.

CHAPITRE II

FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE LA FORME : $y = ax^m + bx^n + \dots$

Fonction linéaire; droite.

23. Fonction linéaire.

1°. — On dit que y est une *fonction linéaire* de x (ou inversement), quand y et x sont liés par une expression de la forme :

$$ax + by + c = 0; \quad (1)$$

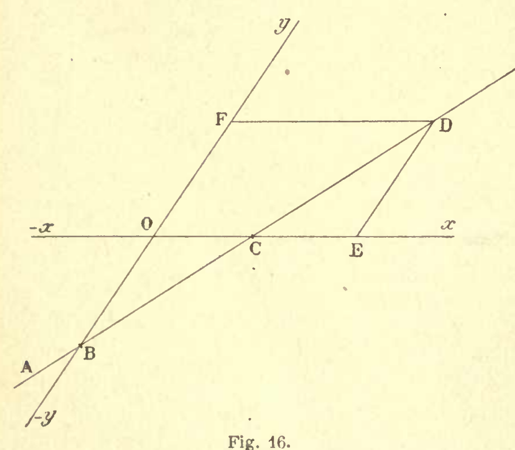


Fig. 16.

a, b, c, sont des constantes. En coordonnées cartésiennes (rectangulaires ou obliques), la courbe représentative est une droite (fig. 16). En effet, les coordonnées du point quelconque D sont :

$$x = \overline{OE}, \quad y = \overline{OF}.$$

Les points de rencontre de la courbe (1), quelle qu'elle soit, avec les axes sont obtenus en écrivant :

$$\begin{aligned} &\text{point C}, \quad y = 0, \quad x_0 = -c : a; \\ &\text{point B}, \quad x = 0, \quad y_0 = -c : b. \end{aligned} \quad (2)$$

Ceci posé, joignons B et C et prolongeons. *Posons que le point* D *est sur ce prolongement;* les triangles semblables DEC, BOC, donnent :

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{CO}}, \qquad \frac{y}{x - x_0} = -\frac{y_0}{x_0}.$$

Il faut mettre le signe — dans le second membre, parce que $\overline{OB}$

est une quantité considérée comme positive, tandis que y_0 est affectée d'un signe, négatif dans le cas de la figure 16.

Substituant à x_0 et y_0 leurs valeurs (2), on retrouve l'équation (1); *ce qui justifie l'hypothèse.*

La *pente* de la courbe est invariable; la dérivée a une valeur constante :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}.$$

2°. — Les équations :

$$ax + by + c = 0,$$

$$max + mby + mc = 0,$$

représentent la même droite. En effet, pour une valeur quelconque imposée de y, on tire de l'une et de l'autre équations la même valeur de x. On peut donc généralement supposer égal à l'unité le coefficient de l'une ou de l'autre variable.

3°. — Les droites parallèles à Ox ont pour équation :

$$by + c = 0;$$

les droites parallèles à Oy ont pour équation :

$$ax + c = 0.$$

Il est clair que dans l'un ou l'autre de ces deux cas, il n'est pas indifférent de supposer égal à l'unité le coefficient *de l'une ou de l'autre* variable.

4°. — Droites passant par un point donné.

Dire que la droite :

$$ax + by + c = 0, \qquad (1)$$

passe par le point de coordonnées ξ, η, c'est dire que l'équation (1) est satisfaite quand on y remplace x par ξ, y par η; d'où la condition :

$$a\xi + b\eta + c = 0. \qquad (2)$$

Retranchant (2) de (1) membre à membre, il vient l'équation :

$$a(x - \xi) + b(y - \eta) = 0 \qquad (3)$$

qui est linéaire en x et y et évidemment satisfaite pour :

$$x = \xi, \quad y = \eta.$$

24. Droites normales l'une sur l'autre.

1°. — Je dis que leurs équations *en coordonnées rectangulaires* se ramènent à la forme :

$$ax + by + c = 0, \qquad (1)$$

$$bx - ay + d = 0, \qquad (2)$$

ou qu'il existe entre leurs pentes la relation :

$$p = -\frac{a}{b}, \qquad p' = \frac{b}{a}; \qquad pp' = -1.$$

En effet, soit x, y, les coordonnées du point A d'intersection

des droites (1) et (2), AB et AD (fig. 17). Menons une droite BD parallèle à Oy. Soit ξ, η', les coordonnées du point B intersection de cette droite et de la droite (1); soit ξ, η'', les coordonnées du

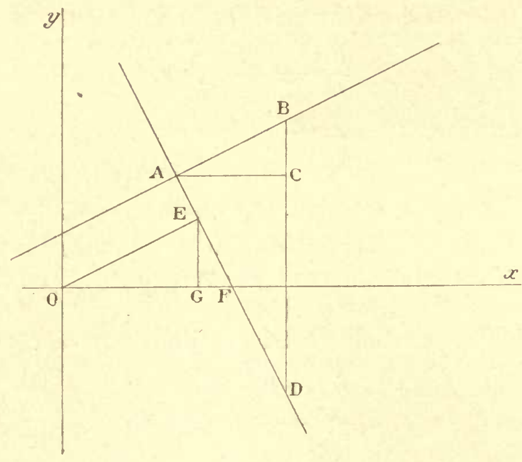


Fig. 17.

point D intersection de cette droite et de la droite (2).

En vertu du § 23 et des équations (1) et (2) à vérifier, on a :

$$a(x-\xi) = -b(y-\eta'),$$
$$b(x-\xi) = a(y-\eta'');$$

par suite :
$$(x-\xi)^2 = -(y-\eta')(y-\eta''). \qquad (3)$$

Or les triangles BAC et ADC, *semblables dans l'hypothèse que l'angle* BAD *est droit,* donnent en vertu d'un théorème connu :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD}; \qquad (4)$$

$$\overline{AC} = \xi - x, \qquad \overline{BC} = \eta' - y, \qquad \overline{CD} = y - \eta'';$$

la relation (4) se ramène donc à la relation (3) : *l'angle* BAD *est droit.*

2°. — Corollaire : soit les équations de deux droites :

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0;$$

elles sont normales si l'on a : $aa' + bb' = 0$.

Nous supposons que les *échelles* sont les mêmes pour les ordonnées et les abscisses (§ 7, *1°*).

25. Intersection de deux droites.

1°. — Soient les droites :

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a'x + b'y + c' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Déterminer leur intersection, c'est chercher un point dont les coordonnées satisfassent simultanément à ces deux équations : c'est donc résoudre le système (1) de deux équations du premier degré.

On trouve immédiatement :

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

2°. — Le point d'intersection est à une distance finie (x et y finis), excepté lorsque le dénominateur s'annule. On a alors :

$$ab' = ba', \qquad a : b = a' : b'.$$

Les deux droites ont même pente : *elles sont parallèles ;* on peut dire qu'elles se coupent à l'infini.

3°. — Quand y se présente sous la forme $0 : 0$, on a :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

par suite, x se présente aussi sous la forme $0 : 0$.

L'indétermination est réelle : les deux droites sont confondues. En effet, nous pouvons multiplier les trois constantes a, b, c, par un même nombre m sans changer la droite représentative (§ 23, 2°). Deux droites confondues ont en commun tous leurs points.

26. Problèmes d'arithmétique se ramenant à des intersections de droites.

1°. — Règle de trois simple.

Elle se ramène au type : *Si* 25 *mètres d'étoffe coûtent* 30 *francs, que coûtent* 45 *mètres ?* Nous posons la proportionnalité entre le prix total et le nombre de mètres ; nous définissons ainsi *une fonction linéaire*, et par suite une droite. Elle passe par l'origine des coordonnées, puisqu'un nombre nul de mètres coûte un prix nul.

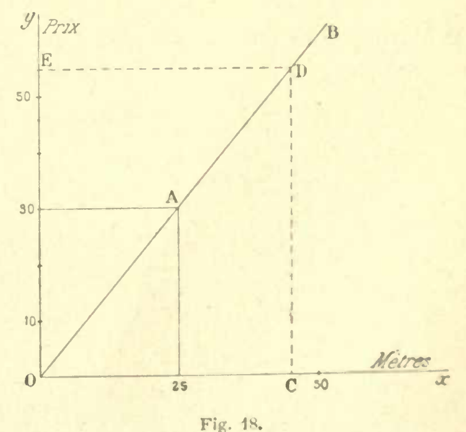


Fig. 18.

Traçons deux axes de coordonnées, rectangulaires pour simplifier et pour utiliser les papiers quadrillés du commerce. Prenons sur Ox une unité arbitraire ; par exemple, convenons qu'un mètre d'étoffe sera représenté par 1^{mm} de papier. Prenons sur Oy une unité également arbitraire. Convenons qu'un franc sera représenté par une certaine longueur (fig. 18).

Les données du problème fixent le point A ($x = 25$, $y = 30$) ; la droite OAB est, par suite, déterminée. Ce graphique obtenu, nous

connaissons, par simple lecture et à une approximation d'autant plus grande que les échelles choisies sont plus grandes, le prix d'un nombre quelconque de mètres d'étoffe.

En effet, ce nombre détermine le point C; d'où le point D, en menant CD parallèle à Oy ; d'où enfin le point E, en menant DE parallèle à Ox.

La figure que nous avons construite, constitue le plus simple de tous les *abaques*.

2°. — Règle de trois composée.

Elle se ramène au type : *Si* 5 *ouvriers travaillant* 10 *heures gagnent* 35 *francs, combien gagneront* 7 *ouvriers travaillant* 8 *heures?*

Nous pouvons prendre pour variable x le nombre d'heures de travail d'un ouvrier, pour fonction y le salaire qui lui revient. Nous aurons donc $y = 35$, pour $x = 5 \times 10 = 50$. Nous tracerons la droite correspondante. Le problème consiste à déterminer y pour $x = 7 \times 8 = 56$.

3°. — Problèmes des trains, des robinets, ...

Ils se ramènent au type suivant : *Un train I part à midi et fait* 35 *kilomètres à l'heure ; un train II part à une heure et fait* 60 *kilomètres à l'heure. A quelle heure se rencontrent-ils ?*

Représentons la marche des deux trains dans l'hypothèse implicite que leur vitesse est uniforme, ou que les chemins parcourus sont proportionnels aux temps. Prenons midi pour origine : $t = o$. Les deux droites figuratives des marches ont pour équations :

$$y_1 = 35t, \qquad y_2 = 60(t - 1). \tag{1}$$

y est exprimé en kilomètres, t en heures. Nous sommes conduits à résoudre le système (1), ce qui revient à déterminer graphiquement le point A d'intersection des droites.

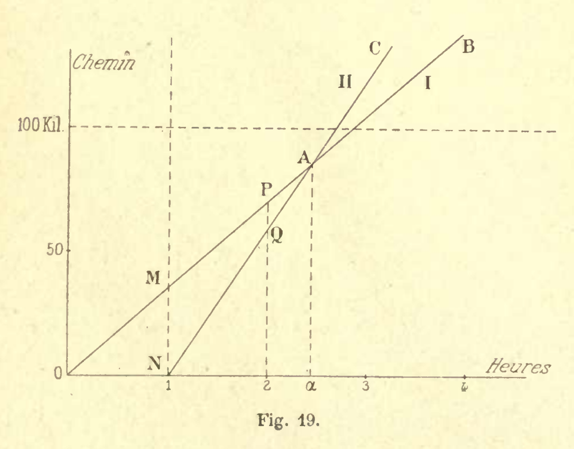


Fig. 19.

Au reste, c'est à l'aide de *graphiques* que les compagnies de chemins de fer représentent la marche de leurs trains. Pour simplifier la représentation, on suppose qu'entre deux arrêts les trains ont une vitesse constante égale à leur vitesse moyenne entre ces arrêts ; le graphique est donc composé de fragments de droites plus ou moins inclinées. Conformément à la figure 19, les stations sont écrites dans une colonne verticale,

le long d'un axe sur lequel sont portées les distances au *terminus;* les heures sont notées sur un axe horizontal : par suite, chaque temps correspond à une droite verticale. Les arrêts sont représentés par des fragments de droites horizontales. Un coup d'œil jeté sur le graphique permet de savoir où se font les croisements et si les trains peuvent conserver entre eux la distance réglementaire.

4°. — FAUSSE POSITION.

On utilise souvent une méthode dite de *fausse position*, qui consiste à tâtonner systématiquement. Voici son appplication au problème précédent.

Calculons la distance MN des deux trains à une heure de l'après-midi ; elle est évidemment 35 kilomètres : $\overline{MN} = 35$.

Calculons la distance $\overline{PQ}$ à deux heures. Le premier train a parcouru $35 \times 2 = 70$ kilomètres, le second en a parcouru 60 ; la distance est 10 kilomètres : $\overline{PQ} = 10$.

La similitude des triangles AMN et APQ permet de calculer immédiatement le temps qui reste jusqu'à la rencontre.

5°. — PARTAGE PROPORTIONNEL.

On demande de partager une somme S en n parties qui soient entre elles comme les n nombres a, b, c, d, ...

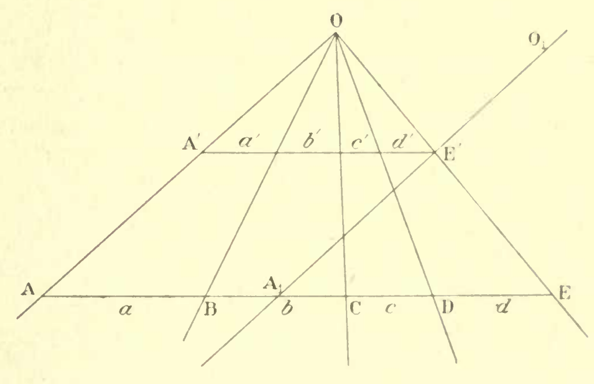


Fig. 20.

Sur une droite quelconque portons bout à bout ces n quantités (4 dans le cas de la figure 20).

Prenons un point quelconque O ; joignons-le aux points ABCDE où commencent et finissent les segments a, b, c, d, ... Par le point A_1 tel que $\overline{AA_1} = S$, menons une parallèle à AO. Par le point E' où A_1O_1 coupe OE, menons une parallèle à AE. Les segments cherchés sont a', b', c', d'.

En effet, ils sont proportionnels à a, b, c, d, en vertu des propriétés des triangles semblables ; par construction, leur somme est égale à S.

On a : $a' = \frac{aS}{a+b+c+d\ldots}$, $b' = \frac{bS}{a+b+c+\ldots}$, ...

Les *Règles de société* sont des partages proportionnels, parfois compliqués du fait que les capitaux engagés ne doivent pas rapporter tous le même intérêt. On commence par calculer les capitaux *fictifs* a, b, ... proportionnellement auxquels l'actif doit être partagé; puis on applique la règle précédente.

6°. — Règles des mélanges, alliages ; centres de gravité.

Tous ces problèmes se ramènent à chercher l'effet de quantités A, B, C, ... agissant proportionnellement aux produits respectifs[1] de leurs valeurs par d'autres quantités a, b, c, ...

L'action de A est Aa ; l'action de B est Bb, ... ; l'action totale des grandeurs A, B, C, ... est donc mesurée par la somme :

$$Aa + Bb + \ldots = \sum Aa.$$

On obtient le même effet en prenant une quantité :

$$A + B + \ldots = \sum A,$$

affectée du coefficient x qui satisfait à l'équation :

$$x(A+B+\ldots) = Aa + Bb\ldots \qquad x = \frac{\sum Aa}{\sum A}. \qquad (1)$$

La formule (1) détermine le centre de gravité de masses A, B, ... situées sur une droite aux distances a, b, ... d'une origine. Elle détermine le point d'application de la résultante de plusieurs forces parallèles. On retrouvera ces questions en Mécanique.

Elle permet (c'est alors qu'elle devient la *Règle des mélanges*) de déterminer le titre x d'un mélange de quantités A, B, ... dont les titres respectifs sont a, b, ...

Dans le cas de deux corps, on a la formule usuelle :

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

Je laisse au lecteur le soin de trouver une construction géométrique donnant x en fonction de A, B, a, b.

27. Répartition proportionnelle.

A la question des règles de partage se rattache la *répartition proportionnelle*.

Quand il s'agit de diviser un héritage, de distribuer un dividende

---

[1] Nous emploierons très souvent les mots *respectifs, respectivement;* il s'agit d'en préciser le sens. Établir une relation *respectivement* entre les quantités A, B, C, ... et les quantités a, b, c, ..., c'est établir cette relation entre A et a, B et b, C et c,... Les produits *respectifs* de A, B, C, ... par a, b, c,... sont par conséquent Aa, Bb, Cc... Le mot *respectivement* signifie qu'*on a égard* aux correspondances naturelles.

après faillite,..., pas de difficultés, parce que la monnaie est parfaitement divisible, sinon en théorie, du moins en pratique ; personne ne dispute une fraction de centime. Quand il s'agit au contraire de répartir entre plusieurs listes des députés par nature insécables, le problème est impossible. *On ne peut le résoudre que grâce à une convention supplémentaire.* D'où une infinité de systèmes dont la partie mathématique est hors de contestation, puisqu'elle exprime simplement une convention admise.

Ces conventions, nous n'avons pas à les juger ; montrons par des exemples leur nature et à quelles conséquences elles aboutissent.

1°. — Système d'Hondt ou système belge.

Soit 4 listes A, B, C, D, recueillant 3318, 2125, 1549 et 996 suffrages.

Si on donne à la première liste 1, 2, 3,... représentants, le *parti* de chaque représentant (autrement dit, le nombre des électeurs dont il est censé défendre les opinions) est : 3318, $3318 : 2 = 1659$, $3318 : 3 = 1106$,...

Faisons le même calcul pour toutes les listes ; nous obtenons le tableau :

NOMBRE DES DÉPUTÉS	VALEURS DE LEUR PARTI			
1	3318	2125	1549	996
2	1659	1063	775	498
3	1106	708	516	332
4	830	532	387	249
5	663	425	310	199

Posons maintenant, comme convention supplémentaire, qu'après la répartition les partis doivent être les plus forts possible ; autrement dit, que les députés doivent représenter le plus grand nombre possible d'électeurs. Nous serons conduits à mettre dans l'ordre des grandeurs décroissantes les quotients ci-dessus trouvés :

3318, 2125, 1659, 1549, 1106, 1063 ; 996, 830,...

à nous arrêter quand nous aurons atteint le nombre de députés à partager, et à attribuer à chaque liste autant de représentants que dans le classement nous trouvons de quotients lui appartenant. Par exemple, si le nombre des députés à répartir est 6, la liste A en aura *trois* (3318, 1659, 1106), la liste B *deux* (2125, 1063), la liste C *un* (1549), la liste D *zéro*.

En effet, si nous attribuons par exemple un député à la liste D,

qui n'en a pas, son parti sera de 996 électeurs, inférieur à ce que serait le parti de ce député attribué à l'une ou l'autre des trois premières listes.

2°. — SYSTÈME DES GRANDS RESTES OU SYSTÈME SUISSE.

Le nombre total des *votants* est 7988. Le *parti* théorique de chaque député est $7988 : 6 = 1332$. Nous pouvons donc faire une première répartition donnant *deux* députés à la liste A, *un* à la liste B, *un* à la liste C. Les électeurs non représentés (*restes*) sont alors :

$3318 - (2 \times 1332) = 654$ pour la liste A,
$2125 - 1332 = 793$ » B,
$1549 - 1332 = 217$ » C,
996 » D.

Nous pouvons maintenant convenir de répartir les trois sièges encore disponibles entre les plus grands restes, qui sont 996, 793 et 654. Le partage définitif est *deux* sièges pour la liste A, *deux* pour la liste B, *un* pour la liste C, *un* pour la liste D.

Ce système est susceptible d'une foule de modifications ; par exemple, on peut faire le calcul non sur les votants, mais sur les inscrits, etc. etc. Nous n'insisterons pas ; nous avons voulu seulement montrer comment un problème qui, mathématiquement, n'a pas de solution, en acquiert une grâce à une convention supplémentaire.

28. Équations linéaires homogènes.

Soit les équations :

$$ax + by + cz = 0, \qquad a'x + b'y + c'z = 0.$$

Satisfaites par un système de valeurs x, y, z, elles le sont encore par tous les systèmes ux, uy, uz, où u est un nombre quelconque. Nous pouvons les considérer comme deux équations à deux inconnues (§ 24) en prenant pour inconnues :

$$X = x : z, \qquad Y = y : z.$$

On vérifiera par substitution que les solutions sont de la forme :

$$x = u(bc' - cb'), \qquad y = u(ca' - ac'), \qquad z = u(ab' - ba').$$

Nous ferons constamment usage de ces formules.

29. Distance d'un point du plan à une droite.

1°. — Soit la droite D : $ax + by + c = 0.$ (1)

Du point A de coordonnées ξ, η, abaissons sur D une perpendiculaire AB. Écrivons donc : d'abord que la droite AB passe par le point ξ, η ; ensuite que le produit de sa pente par la pente de la droite D est égal à -1 (§ 24). On trouve immédiatement l'équation :

$$b(x - \xi) = a(y - \eta). \qquad (2)$$

2°. — Déterminons le point d'intersection B des droites (1) et (2). Il suffit de considérer leurs équations comme simultanées en x et y,

et de résoudre les équations (1) et (2) par rapport à ces inconnues. Nous écrirons :

$$a(x-\xi)+b(y-\eta)=-(a\xi+b\eta+c), \qquad (1)$$
$$b(x-\xi)-a(y-\eta)=0. \qquad (2)$$

D'où :

$$\left.\begin{aligned} x-\xi &= -a\,\frac{a\xi+b\eta+c}{a^2+b^2}, \\ y-\eta &= -b\,\frac{a\xi+b\eta+c}{a^2+b^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

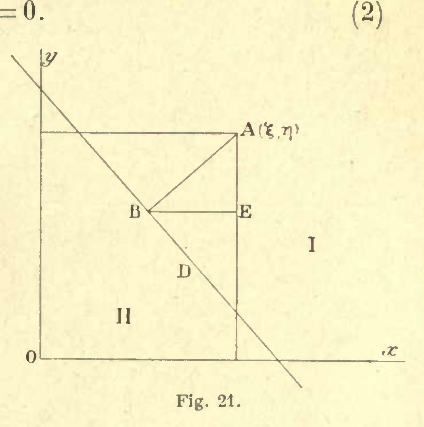


Fig. 21.

Les solutions (3) ont une forme qu'il était facile de prévoir. Car le point d'intersection B des deux droites (perpendiculaires l'une sur l'autre) coïncide avec le point A de coordonnées ξ, η, si celui-ci est sur la droite D. Autrement dit :

$$x=\xi, \qquad y=\eta, \qquad \text{quand :} \qquad a\xi+b\eta+c=0.$$

3°. — Déterminons enfin la distance AB. On a :

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

$$\overline{AB}=\pm\frac{a\xi+b\eta+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Choisissons arbitrairement l'un des signes. La droite D sépare le plan en deux régions I et II pour lesquelles $\overline{AB}$ a des signes contraires; $\overline{AB}$ change de signe en s'annulant lorsque le point A, passant d'une des régions à l'autre, traverse la ligne de séparation. Au surplus, nous pouvons arbitrairement choisir un signe pour l'une des régions ; car rien n'empêche d'écrire l'équation de la droite D sous la forme :

$$-ax-by-c=0.$$

Cette séparation du plan en régions au moyen de courbes et cette détermination de la région occupée par le signe d'une certaine fonction sont des exemples d'une méthode absolument générale.

30. Équations de la tangente et de la normale à une courbe.

1°. — Soit ξ, η, les coordonnées du point A par lequel on veut mener la tangente ou la normale. L'équation d'une droite quelconque passant par ce point est (§ 23, *1°*) :

$$a(x-\xi)+b(y-\eta)=0. \qquad (1)$$

2°. — Exprimons que la droite est tangente à la courbe $\eta=f(\xi)$, dont le point A fait partie. Soit x, y, les coordonnées d'un point B quelconque de la tangente.

On a :
$$\frac{\overline{\mathrm{AK}}}{\overline{\mathrm{AE}}}=\frac{\overline{\mathrm{KB}}}{\overline{\mathrm{EC}}}, \qquad \frac{x-\xi}{d\xi}=\frac{y-\eta}{d\eta}. \tag{2}$$

En effet, quand le point E se rapproche du point A, les points C et D tendent à se confondre d'après la définition même de la tangente. Le rapport $\overline{\mathrm{EC}} : \overline{\mathrm{AE}}$ devient *à la limite* égal au rapport $d\eta : d\xi$.

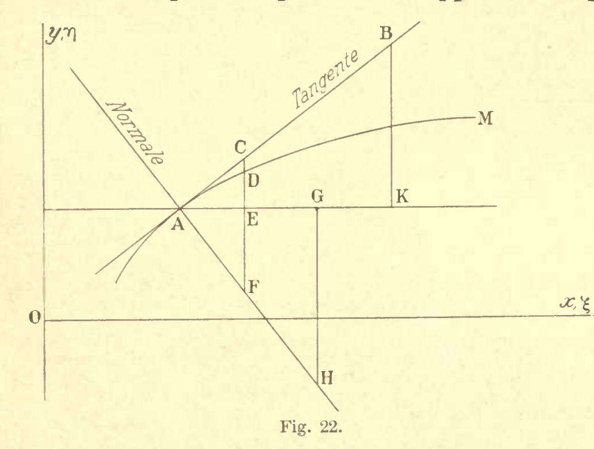


Fig. 22.

On retrouve l'équation (2) en écrivant que la pente de la droite (1) est égale à la pente de la courbe :
$$p=-\frac{a}{b}=\frac{d\eta}{d\xi}.$$

Supposons la courbe donnée sous la forme $f(\xi, \eta)=0$. On a (§ 9) :
$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\,d\xi+\frac{df}{d\eta}\,d\eta=0, \quad f'_\xi\,d\xi+f'_\eta\,d\eta=0$$

D'où les formes équivalentes de l'équation de la tangente :
$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x-\xi)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(y-\eta)=0, \tag{2'}$$
$$f'_\xi(x-\xi)+f'_\eta(y-\eta)=0. \tag{2''}$$

3°. — Exprimons que la droite (1) est normale à la courbe. Il suffit d'écrire que les pentes p et p' de la tangente et de la normale satisfont à la relation (§ 24, *1°*) :
$$pp'=-1.$$

D'où l'équation de la normale :
$$(x-\xi)d\xi+(y-\eta)d\eta=0. \tag{3}$$

La pente de la normale est : $p'=-d\xi : d\eta$.

Supposons la courbe donnée sous la forme $f(\xi, \eta)=0$. On a pour la normale menée au point de coordonnées ξ, η :
$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(x-\xi)=\frac{\partial f}{\partial \xi}(y-\eta), \tag{3'}$$
$$f'_\eta(x-\xi)=f'_\xi(y-\eta). \tag{3''}$$

Paraboles et hyperboles.

Comme le lecteur le verra, le procédé fondamental des Mathématiques consiste à étudier des cas simples et à s'en servir *comme*

termes de comparaison pour discuter les cas complexes. Les courbes usuelles de comparaison sont précisément les paraboles et hyperboles dont nous allons nous occuper.

31. Fonctions $y = x^n$, $y^n = x$, pour n positif, entier et pair (paraboles).

Toutes ces courbes passent par le point $x = 1$, $y = 1$ (point P, fig. 23). Si une courbe du faisceau I, $y = x^n$, est connue, la

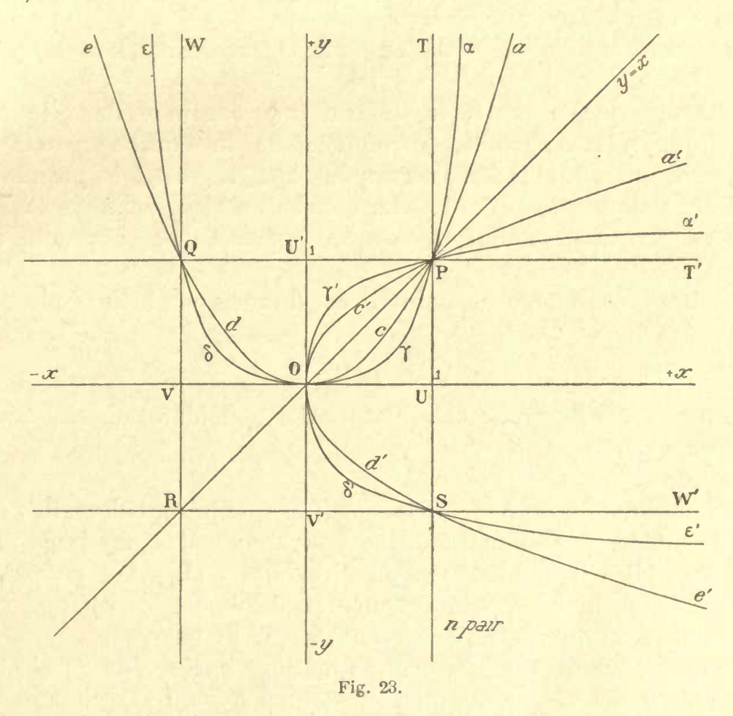


Fig. 23.

courbe $y^n = x$, correspondante du faisceau II, l'est immédiatement, puisqu'elle traite les y et les x comme la précédente traitait les x et les y : les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite OP d'équation $y = x$.

Par hypothèse n est pair; donc la courbe $y = x^n$ a les mêmes ordonnées pour deux valeurs de x égales et de signes contraires : elle est donc symétrique par rapport à Oy. La courbe $y^n = x$, a les mêmes abscisses pour deux valeurs de y égales et de signes contraires : elle est donc symétrique par rapport à Ox.

On a pour le premier faisceau (§ 13) :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \qquad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Donc toutes les courbes de ce faisceau I sont tangentes à Ox au

point O. D'où résulte que toutes les courbes du faisceau II sont tangentes à Oy au même point.

Quand on élève à la puissance n une quantité inférieure à l'unité, elle est d'autant plus petite que n est plus grand. Quand on élève à la puissance n une quantité supérieure à l'unité, elle est d'autant plus grande que n est plus grand. Donc la courbe $\alpha P\gamma O$, qui est *au-dessous* de $aPcO$ pour $x < 1$, est *au-dessus* pour $x > 1$.

Elle correspond à $y = x^4$, tandis que l'autre est *une parabole* ordinaire et correspond à $y = x^2$.

Les deux courbes $\alpha' P\gamma' O$ et $a' Pc' O$ correspondent à $y^4 = x$ et à $y^2 = x$.

A mesure que n croît, la déformation continue dans le même sens. Pour n très grand, l'ordonnée de la courbe $y = x^n$ est quasi nulle pour toutes les valeurs de $x < 1$, est très grande pour toutes les valeurs de $x > 1$. La courbe se rapproche de la forme TUOVW. Corrélativement, la courbe $y^n = x$ se rapproche de la forme T'U'OV'W'.

La pente des courbes au point P est donnée par la formule :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = n.$$

Elle croît avec n, comme cela résulte des considérations immédiatement précédentes.

Remarque.

Les fonctions $y = Ax^n$, $y^n = Ax$, se déduisent de celles qu'on vient d'étudier, par une dilatation convenable des abscisses et des ordonnées. Il est évident qu'on tire $y = 2x^2$, de $y = x^2$, en doublant les ordonnées pour les mêmes abscisses.

Continuité de la fonction $y = x^n$ et de sa dérivée.

On voit aisément que y est une fonction *continue* de x ; c'est dire qu'à partir d'une valeur x_0, on peut donner à x un accroissement Δx assez petit pour que la valeur y ne diffère de la valeur y_0, qui correspond à x_0, que d'une quantité Δy inférieure à toute quantité fixée à l'avance, si petite qu'elle soit. La dérivée :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1},$$

étant de la même forme que y, est elle-même continue. C'est dire que la pente de la courbe représentative de y ne varie brusquement en aucun de ses points.

32. Fonctions $y = x^n$, $y^n = x$, pour n positif, entier et impair. Généralisation.

Les courbes du faisceau I, $y = x^n$, sont symétriques des courbes du faisceau II, $y^n = x$, par rapport à la bissectrice des axes $y = x$.

Pour deux valeurs de x égales et de signes contraires, on obtient

des valeurs égales et de signes contraires de y ; donc les branches aPO et eQO d'une courbe sont symétriques par rapport au point O.

Toutes les courbes du faisceau I sont tangentes à Ox au point O, sauf pour $n=1$, qui donne la droite $y=x$. Toutes les courbes du faisceau II sont tangentes à Oy au point O.

Toutes les courbes passent par les deux points P et Q de coordon-

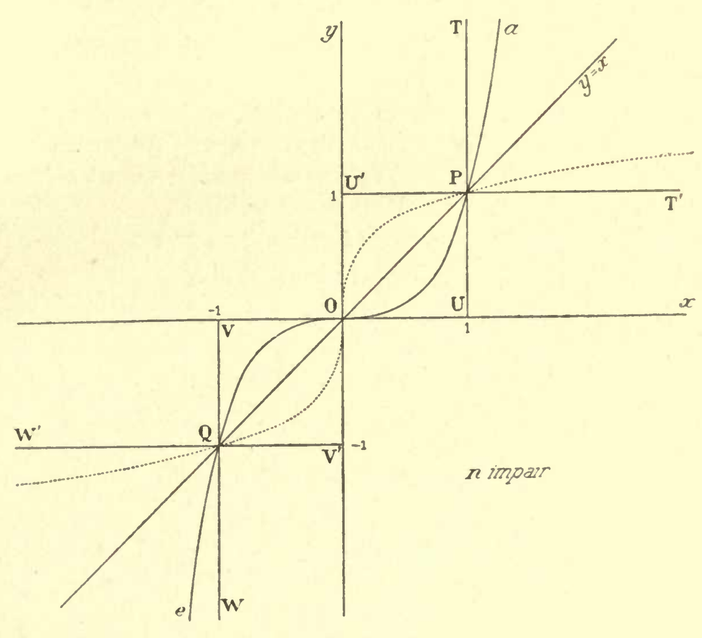


Fig. 24.

nées $+1, +1$ et $-1, -1$. Considérons deux courbes du même faisceau I, par exemple. Celle pour laquelle n est le plus grand, est au-dessous de l'autre pour $0 < x < 1$, au-dessus pour $x > 1$. Les résultats sont inverses pour $0 > x > -1$, et $x < -1$.

Pour n très grand, les courbes du faisceau I tendent vers la forme TUOVW ; les courbes du faisceau II tendent vers la forme T'U'OV'W'.

Généralisation.

Nous étudions dans ce qui précède les fonctions de la forme $y=x^n$, $y^n=x$, où n (positif) est entier pair ou impair. La généralisation consiste à supposer n quelconque : les fonctions peuvent très exactement se ramener à la forme $y^p=x^q$, où p et q sont deux nombres entiers suffisamment grands. Il y a pour $x<0$, ou $y<0$, des difficultés de signes et même de définition sur lesquelles nous n'insisterons pas. Pour x et y positifs, la généralisation est évidente : nous obtenons des courbes qui s'intercalent entre celles de ce paragraphe et celles du paragraphe précédent.

On vérifiera immédiatement que si $q : p$ est compris entre les deux nombres entiers n et $n+1$, la courbe $y^p = x^q$, dont l'équation peut s'écrire $y = x^{\frac{q}{p}}$, s'intercale entre les deux courbes :

$$y = x^n, \qquad y = x^{n+1}.$$

Comme nous le verrons, les logarithmes permettent de calculer aisément les courbes point par point, quel que soit le nombre n.

33. Contacts de divers ordres d'une droite et d'une courbe.

1°. — Reprenons la fonction $y = \mathrm{A}x^n$, où n est entier. Nous savons que la courbe (faisceau I des paragraphes précédents) est tangente à $\mathrm{O}x$ pour $x = 0$. Étudions la manière dont elle se comporte par rapport à $\mathrm{O}x$, au voisinage du point O.

Pour cela, remplaçons la courbe $y = \mathrm{A}x^n$, par :

$$y = \mathrm{A}x(x-a)(x-b)\ldots, \qquad (1)$$

où a, b, ... sont des quantités arbitraires et très petites. Pour sim-

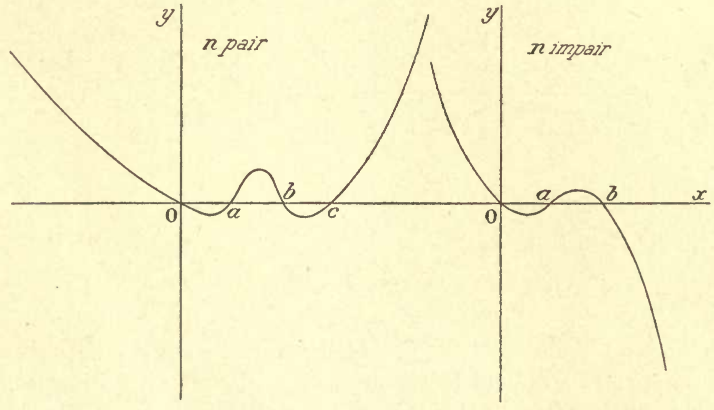


Fig. 25.

plifier, nous les supposerons toutes positives ; elles sont rangées dans l'ordre des grandeurs croissantes.

Chaque fois qu'en croissant x traverse une des valeurs a, b, c, ... le facteur correspondant : $x-a$, $x-b$, ... passe d'une valeur négative à une valeur positive; la fonction y change de signe.

Deux cas à considérer : n pair et n impair. Les courbes correspondantes sont représentées dans la figure 25 ; elles supposent $n=4$ (à gauche), $n=3$ (à droite). Nous résumons les résultats en disant que *la droite* $y=0$ *coupe la courbe* (1) *en autant de points qu'il y a de facteurs; le nombre des points d'intersection est* n.

2°. — Faisons décroître les quantités a, b, c, ... ; les boucles s'atrophient. *A la limite,* quand a, b, c, ... s'annulent, on retombe sur la courbe $y = \mathrm{A}x^n$. Généralisant l'énoncé, on dit que *la*

courbe $y = Ax^n$ *possède avec la droite* $y = 0$ *un contact d'ordre n.* Si le contact est pair, la courbe reste du même côté de Ox, de part et d'autre du point O (au-dessus si $A > 0$, au-dessous si $A < 0$). Si le contact est impair, elle passe d'un côté à l'autre.

$n = 1$ correspond à la simple intersection; $n = 2$, à la tan-

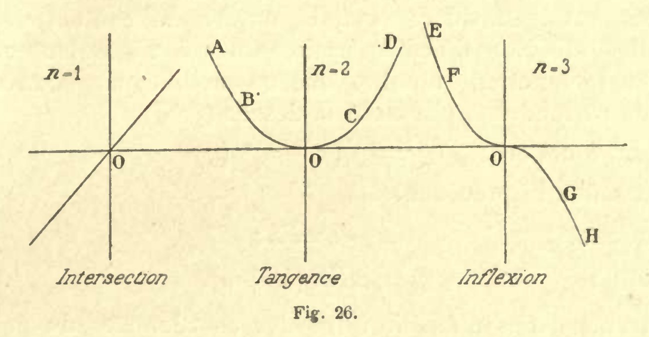


Fig. 26.

gence ordinaire; $n = 3$, *à l'inflexion.* Ce sont les trois ordres de contact qui interviennent habituellement (fig. 26).

3°. — Cherchons comment se comporte la dérivée dans les trois cas :

$$y = Ax^n, \qquad z = \frac{dy}{dx} = Anx^{n-1}.$$

Le contact de la dérivée avec la droite Ox est d'ordre $n - 1$ (§ 43).

Pour $n = 1$, la dérivée est constante, la pente de y est invariable.

Pour $n = 2$, la dérivée est une droite qui passe par l'origine. Elle s'annule alors, indiquant un maximum ou un minimum de la fonction. On constate, en effet, que la pente de la courbe y varie toujours dans le même sens : négative et très grande *en valeur absolue* sur l'arc AB, elle croît, s'annule au point O, *continue à croître* pour devenir positive et très grande sur l'arc CD.

Pour $n = 3$, la dérivée est une parabole : elle présente un maximum pour $x = 0$. La pente de la courbe y, négative et très grande *en valeur absolue* sur l'arc EF, croît et s'annule au point O. *Mais elle recommence alors à décroître.*

34. Généralisation.

1°. — L'allure des courbes au voisinage de l'origine resterait la même si, au lieu de $y = Ax^n$, on avait :

$$y = Ax^n\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction continue quelconque à laquelle nous imposons seulement de ne pas s'annuler pour $x = 0$; $\varphi(0) \gtrless 0$.

Assurément les ordonnées de la courbe sont modifiées par l'action

du facteur $\varphi(x)$; *mais la nature du contact ne l'est pas*. C'est évident d'après la figure, puisque la nature du contact ne dépend que du nombre des points d'intersection de la courbe par la droite $y = 0$, points confondus au point O. Le facteur $\varphi(x)$, qui ne s'annule pas pour $x = 0$, ne modifie pas ce nombre.

On peut aussi considérer que la nature du contact dépend du nombre des dérivées d'ordres croissants qui s'annulent en même temps que la fonction, nombre que ne modifie pas la présence de $\varphi(x)$. Nous reviendrons plus loin là-dessus (§ 43).

2°. — La fonction : $y = A(x - a)^n \varphi(x)$,

se traite comme la précédente.

Posons en effet : $x - a = X$;

elle devient : $y = AX^n \varphi(X + a)$.

Nous transportons ainsi l'origine des coordonnées du point O au

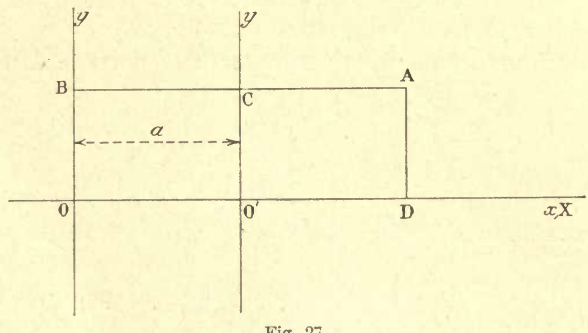


Fig. 27.

point O' tel que $\overline{OO'} = a$. Le point A, par exemple, qui avait les coordonnées $x = \overline{BA}$, $y = \overline{DA}$, conserve la même ordonnée y, mais prend la nouvelle abscisse (fig. 27) :

$$X = \overline{CA} = \overline{BA} - \overline{BC} = x - a.$$

Nous raisonnons sur X comme précédemment sur x. La fonction $\varphi(x)$, qui ne s'annulait pas pour $x = a$, ne s'annule évidemment pas davantage pour $X = 0$.

35. Fonctions $yx^n = 1$, $y^n x = 1$, pour n positif et entier (hyperboles).

Les courbes $yx^n = 1$, $xy^n = 1$, sont symétriques par rapport à la droite $y = x$; nous ne considérons que les premières pour simplifier les figures.

Si n est pair, y ne change pas de signe quand on remplace x par $-x$; donc la courbe se compose de deux branches symé-

triques par rapport à Oy (fig. 28). Si n est impair, y change de signe; la courbe se compose de deux branches symétriques par rapport au point O (fig. 29).

Quand x tend vers 0, y croît indéfiniment : on dit que les courbes

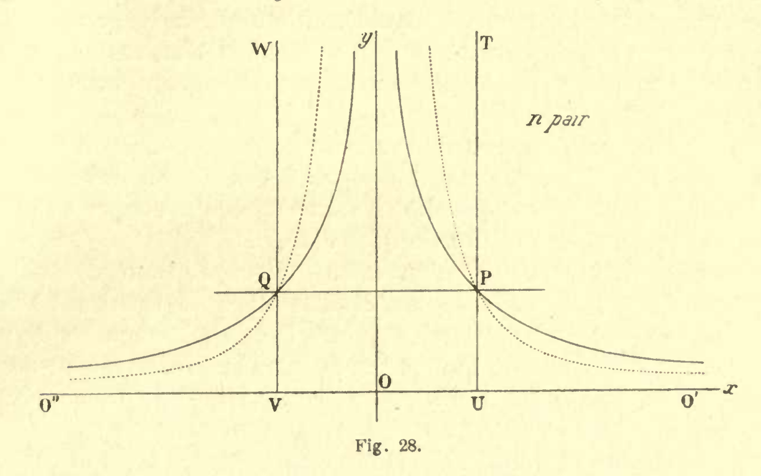


Fig. 28.

admettent Oy pour *asymptote. L'asymptote est une droite dont on s'approche indéfiniment sans jamais l'atteindre, quand on s'éloigne*

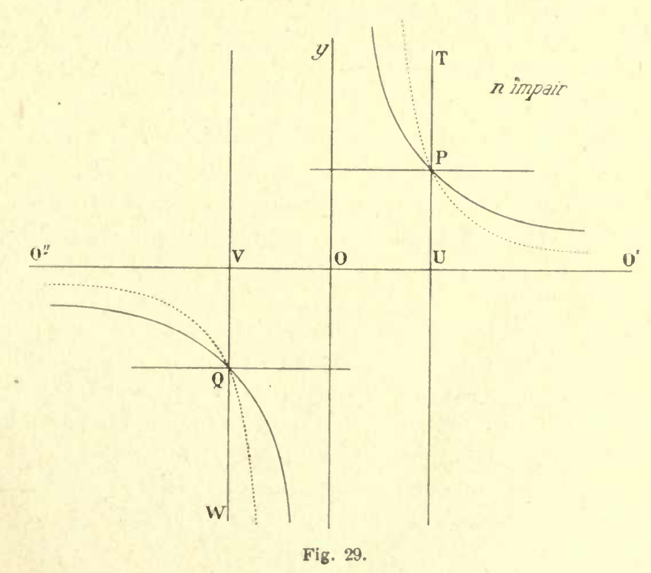


Fig. 29.

indéfiniment en marchant sur la courbe. On peut encore dire que *l'asymptote est la tangente en un point de la courbe qui est infiniment éloigné.*

Quand x croît indéfiniment, y tend vers 0; donc les courbes admettent également Ox pour asymptote.

Par rapport à son asymptote, la courbe peut se conduire de deux manières différentes qui correspondent aux contacts d'ordre pair et d'ordre impair étudiés au § 33. Faisons décroître x d'une valeur très légèrement supérieure à 0 à une valeur très légèrement inférieure. Si n est pair, y passe par la valeur conventionnelle *infinie* ∞ (quantité plus grande que toute quantité donnée à l'avance), en restant positif.

Si n est impair, y passe par l'infini en changeant brusquement de signe.

Il ne faut pas voir là une discontinuité réelle; nous retrouverons souvent ce passage brusque de $+\infty$ à $-\infty$, ou inversement. Par exemple, deux droites parallèles sont censées se couper à l'infini; mais il est impossible de dire de quel côté.

Comparons deux courbes d'un même faisceau, pour des valeurs différentes de n : il suffit de les étudier dans le quadrant $x\text{O}y$. Elles passent toutes deux par les points P et Q. La courbe de plus grand n est au-dessous de l'autre pour $x > 1$; elle est au-dessus pour $0 < x < 1$. A la limite, pour n très grand, la courbe se confond avec TUO'O''VW.

Nous étudierons en détail (§ 117) la courbe $xy = 1$, qui est l'*hyperbole équilatère asymptote aux axes.*

GÉNÉRALISATION.

Pour n quelconque, la généralisation est immédiate si l'on se borne aux valeurs positives de x et de y. On remplace le nombre n par un nombre fractionnaire voisin $n = q : p$.

La courbe prend la forme $y^p x^q = 1$.

Les logarithmes (§ 190) permettent immédiatement le calcul point par point. On démontre aisément que si le nombre n est compris entre deux entiers consécutifs, la courbe s'intercale entre les courbes qui correspondent à ces entiers. Plus généralement, les courbes se déforment d'une manière continue quand l'exposant n varie lui-même d'une manière continue.

On peut considérer les courbes étudiées dans ce paragraphe comme faisant partie du faisceau des courbes $y = x^n$ étudiées plus haut; il suffit d'admettre que n peut prendre des valeurs négatives.

On ramène les courbes $yx^n = \text{A}$ aux précédentes par une dilatation convenable parallèlement à Ox ou à Oy; autrement dit, en multipliant par un facteur convenable les ordonnées pour les mêmes abscisses, ou les abscisses pour les mêmes ordonnées.

Fonction entière : $y = ax^m + bx^n + \dots$

36. Fonction entière.

1°. — La fonction *entière* est la somme d'un certain nombre de puissances entières et positives de x, multipliées par des coefficients

numériques (représentés par des lettres pour plus de commodité). Nous l'ordonnons par rapport aux puissances décroissantes :

$$y = ax^m + bx^n + \dots \quad + dx^p + ex^q + f. \qquad (1)$$

La puissance la plus élevée est m, la plus basse est q, $a, b, c, \dots e, f$ sont des constantes. Pour chaque valeur de x, il existe une et une seule valeur de y. La réciproque n'est pas vraie : à chaque valeur de y peut correspondre un nombre de valeurs *réelles* de x qui, nous le verrons, est compris entre 0 et m inclusivement.

2°. — COURBE ASYMPTOTE.

Pour de grandes valeurs de x, la courbe (1) se réduit à :

$$y = ax^m, \qquad (2)$$

avec une approximation qui croît à mesure que x augmente. En effet, les coefficients a, b, ... sont finis. Comme nous sommes libres de faire croître x au delà de toute quantité donnée à l'avance, x^m deviendra, autant que nous le voudrons, plus grand que x^n et, *a fortiori*, que x^p, x^q. Alors même que nous supposerions a petit devant b, ..., d, e, le terme ax^m finira toujours par l'emporter.

La courbe (2) est *asymptote* de la courbe (1). En s'éloignant sur la courbe (1), on se rapproche indéfiniment de la courbe (2) sans jamais l'atteindre. On peut dire que la confusion s'opère à l'infini.

Si m est pair, la courbe asymptote (2) est une des courbes du faisceau I du § 31 ; si m est impair, c'est une des courbes du faisceau I du § 32.

3°. — Pour les très petites valeurs de x, la courbe (1) se confond avec :

$$y = ex^q + f,$$

d'autant plus exactement que x est plus petit, et alors même que e serait grand devant a, b, ..., d. C'est le même raisonnement que plus haut, mais en sens inverse.

4°. — On a généralement :

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1} + nbx^{n-1} + \dots + qex^{q-1}.$$

La dérivée est finie et continue pour toutes les valeurs finies de x. Pour aucune valeur finie de la variable, la pente m ne devient infinie : la tangente à la courbe n'est jamais verticale.

La dérivée $m^{\text{ième}}$ est une constante ; la dérivée $m+1^{\text{ième}}$ est nulle. La fonction entière a toutes ses dérivées continues et finies pour toutes les valeurs finies de la variable.

37. Intersection de la courbe (1) par une droite horizontale.

1°. — Soit m pair. Pour des valeurs suffisantes de x, nous savons que la courbe se réduit à la courbe asymptote $y = ax^m$ (dans la

figure 30, nous supposons $a > 0$); elle est donc formée de deux branches A′A ..., B′B ..., d'autant plus exactement symétriques par rapport à Oy que la valeur absolue de x est plus grande. Pour les autres valeurs de x, la courbe possède généralement des maximums et des minimums, tels que ceux représentés dans la figure 30.

Ceci posé, imaginons une droite horizontale, d'abord très élevée

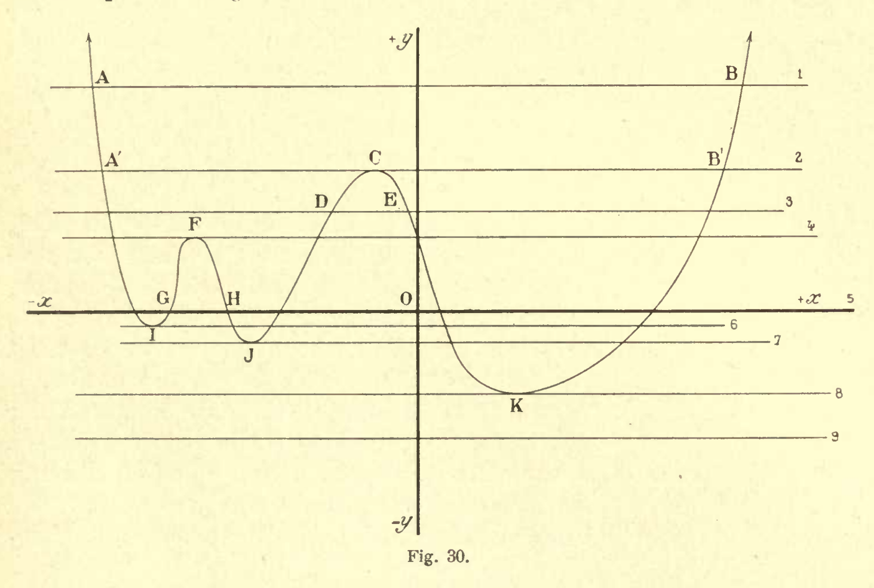


Fig. 30.

et que nous faisons descendre. Elle coupe d'abord la courbe en deux points A et B (qui appartiennent aussi bien à la courbe asymptote, si l'ordonnée y_0 de la droite est suffisante).

Dans la position 2, la droite est tangente à la courbe en C. Comme elle peut être considérée comme une sécante *limite*, nous dirons qu'elle coupe la courbe en quatre points : deux points *simples* A′, B′, et un point *double* C.

Dans la position 3, les quatre points sont distincts.

Dans la position 4, il y a quatre points simples d'intersection et un point double. Et ainsi de suite.

Nous arrivons ainsi à cette proposition : *Le nombre des points d'intersection est toujours pair, à la condition de compter les points de tangence pour deux; comme cas particulier, le nombre des points d'intersection peut être nul* (position 9 de la droite).

Nous supposons dans ce qui précède qu'il n'existe que des points de tangence ordinaire, c'est-à-dire des points *de contact simple*. La proposition reste vraie, s'il existe des points *de contact multiple*.

La courbe 31 se rapporte au cas de $a < 0$; pour x grand, positif ou négatif, y est grand et négatif.

En A le contact est *impair;* cela résulte de ce que la courbe est

tangente en A à la droite 2 et se trouve de part et d'autre de cette droite avant et après le point de contact. Comme la courbe qui est au-dessus de Ox pour x négatif et très grand, doit revenir au-dessous

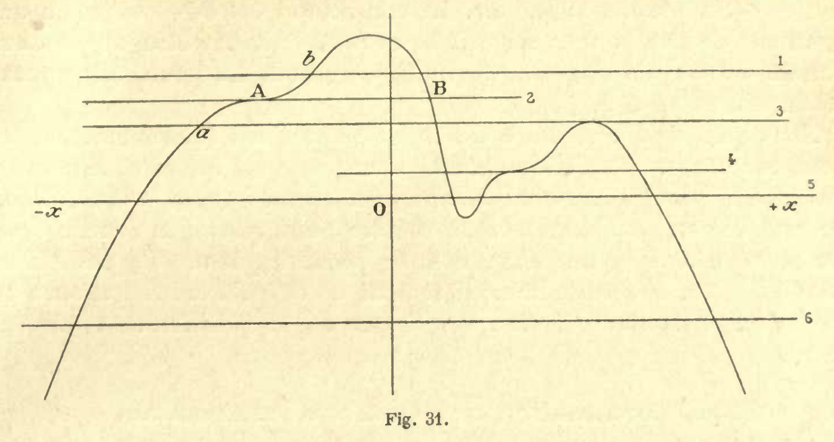


Fig. 31.

de Ox pour x positif et très grand, il faut qu'elle repasse sur la droite 2 au moins une fois, et généralement 3, 5, ... fois, c'est-

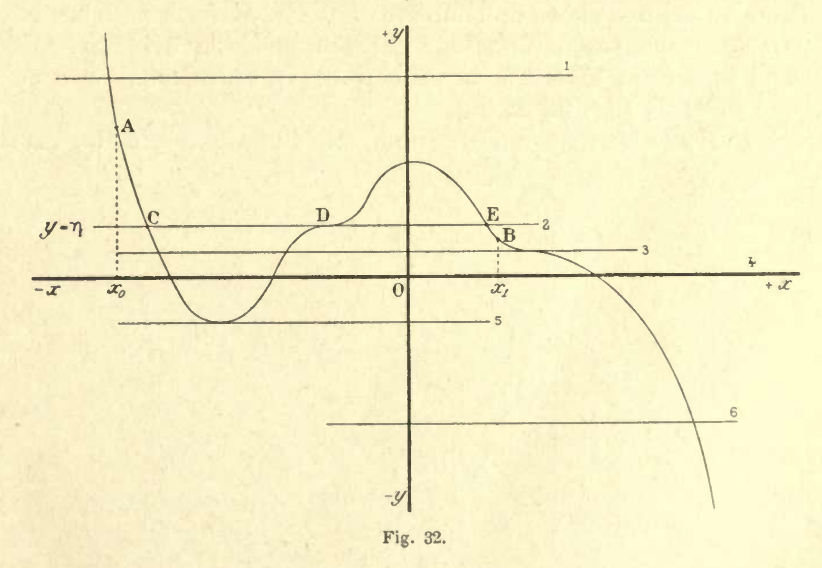


Fig. 32.

à-dire un nombre impair de fois. Le nombre total des points d'intersection est donc pair.

La conclusion est encore la même si le point A est de contact multiple et pair, puisque l'aspect du contact reste le même que pour la tangente; seule est modifiée l'intimité de ce contact. Nous pouvons donc énoncer la proposition générale : *Si la puissance la plus élevée est paire, le nombre des points d'intersection par une horizontale*

est pair, à la condition de compter les points de contact comme pairs quand la courbe reste du même côté de la tangente, comme impairs quand elle passe d'un côté à l'autre.

2°. — Supposons m impair. La courbe qui est au-dessus (ou au-dessous) de $0x$ pour x négatif et grand, finit par être au-dessous (ou au-dessus) de $0x$ pour x positif et grand. La figure 32 suppose m impair et $a < 0$.

Sans qu'il soit nécessaire de recommencer les raisonnements, on peut conclure : *Si la puissance la plus élevée est impaire, le nombre des points d'intersection par une horizontale est impair, à la condition de compter les points de contact comme pairs quand la courbe reste du même côté de la tangente, comme impairs quand elle passe d'un côté à l'autre.* Il résulte immédiatement de là *qu'il existe toujours au moins un point d'intersection, quelle que soit la position de l'horizontale.*

38. Détermination des points d'intersection.

Coupons la courbe $y = f(x)$, par une droite $y = \eta$; le problème est de déterminer les valeurs numériques des abscisses des points d'intersection.

1°. — Il s'agit d'abord de connaître *approximativement* leurs positions. Nous nous appuierons sur cette proposition évidente.

Dans le second membre de l'équation (1), substituons à x deux valeurs x_0 et x_1 (fig. 32 et 33).

Si les valeurs correspondantes de y sont l'une plus grande, l'autre

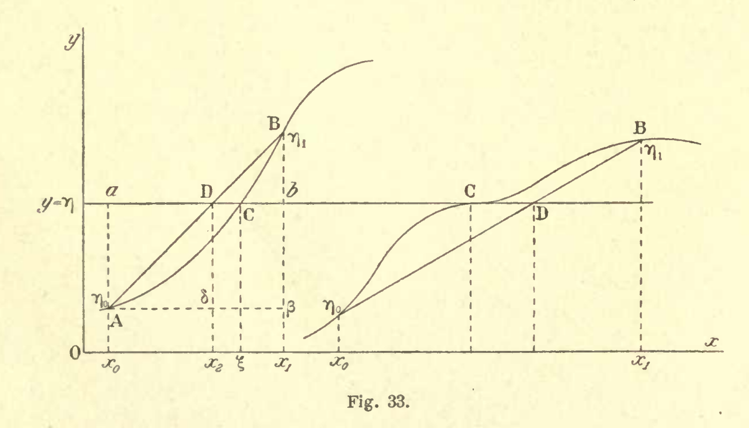


Fig. 33.

plus petite que η, il existe nécessairement entre x_0 et x_1 un nombre impair de points d'intersection.

Dans le cas de la figure 32, il en existe au moins 5 d'après notre manière de compter : un en C, un autre en E ; en D, il en existe au moins 3, peut-être 5, 7, ..., en tous cas un nombre impair.

Notre premier soin sera donc de rapprocher suffisamment les abs-

cisses x_0 et x_1 pour être sûr que l'intervalle de x_0 à x_1 ne renferme qu'un point d'intersection (intersection simple ou multiple).

2°. — Interpolation par parties proportionnelles : emploi de la sécante.

Pour déterminer une position approchée du point d'intersection, nous pouvons assimiler la courbe à une droite entre les abscisses x_0 et x_1. Nous remplaçons (fig. 33) la courbe ACB par la droite AB. Nous déterminons aisément l'abscisse du point D.

En effet, soit η_1 la valeur de $y = f(x)$, pour $x = x_1$, η_0 sa valeur pour $x = x_0$; appelons x_2 l'abscisse inconnue du point D.

On a immédiatement dans les triangles semblables AδD et AβB :

$$\frac{x_2 - x_0}{\eta - \eta_0} = \frac{x_1 - x_0}{\eta_1 - \eta_0}. \qquad (1)$$

D'où x_2. Il est bon d'observer que le point D n'est pas nécessairement plus voisin du point C cherché que l'un *et* l'autre points *a* et *b*. Mais la distance $\overline{DC}$ est certainement plus petite que la plus grande des distances $\overline{aC}$ et $\overline{Cb}$.

Pour continuer les tâtonnements, on substituera dans y la valeur x_2. On recommencera l'interpolation avec x_2 et celle des quantités x_0, x_1, qui, substituée dans $y = f(x)$, donne un résultat de signe contraire à x_2. Autrement dit, si x_2 donne une valeur $y < \eta$, on prendra x_1 qui donne une valeur plus grande (figure 33 à gauche).

3°. — Méthode de Newton. Emploi de la tangente.

Supposons le point d'intersection cherché localisé entre les points *a* et *b* d'abscisses x_0 et x_1. Il s'agit de déterminer l'abscisse du point C.

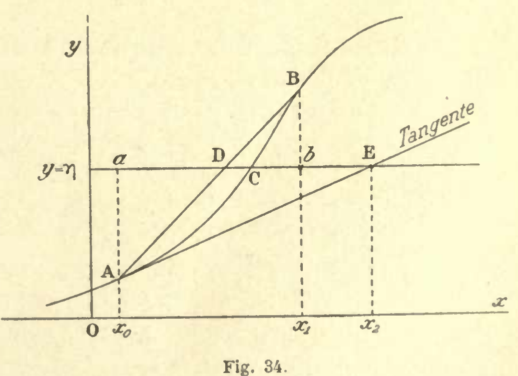


Fig. 34.

La méthode de Newton consiste à trouver l'intersection de la droite $y = \eta$, avec la tangente menée à la courbe ACB en l'un ou l'autre des points A, B. La figure 34 montre immédiatement que la méthode est mauvaise si les points A et B ne sont pas très voisins; autrement dit, si entre ces points la courbe n'est pas approximativement remplaçable par la tangente en A ou en B.

Quoi qu'il en soit, calculons l'abscisse x_2 du point E.

Nous savons que l'équation de la tangente en A (§ 30) est :

$$y - \eta_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) ;$$

$f'(x_0)$ est la valeur de la dérivée de $y=f(x)$ par rapport à x, quand on pose $x=x_0$.

Pour connaître x_2, substituons à y la valeur η. Il vient :

$$\eta-\eta_0=f'(x_0)(x_2-x_0), \qquad x_2=x_0+(\eta-\eta_0) : f'(x_0) ; \qquad (2)$$

formule évidente sur la figure.

Remarque I. — Si la droite horizontale coïncide avec Ox, les formules précédentes se simplifient. Il faut poser $\eta=0$. On trouve :

$$x_2=x_0-\eta_0\frac{x_1-x_0}{\eta_1-\eta_0}, \qquad (1')$$

$$x_2=x_0-\eta_0 : f'(x_0). \qquad (2')$$

Remarque II. — Comparons les formules (1) et (2). Elles sont identiques, s'il est pratiquement permis de poser :

$$\frac{\eta_1-\eta_0}{x_1-x_0}=f'(x_0),$$

c'est-à-dire si la tangente se confond sensiblement avec la sécante.

Remarque III. — Tout ce que contient ce paragraphe est applicable à la détermination des points d'intersection d'une horizontale avec une courbe quelconque : $y=f(x)$; l'hypothèse qu'il s'agit d'un polynôme n'intervient pas.

Racines réelles des équations algébriques.

39. Racines d'une équation algébrique.

Résoudre l'équation :

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0, \qquad (1)$$

c'est chercher les valeurs de x qui transforment (1) en une identité. Considérons la fonction :

$$y=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m ; \qquad (2)$$

résoudre l'équation (1), c'est chercher l'intersection de (2) avec l'axe des abscisses. Tout ce qui précède est donc applicable.

En particulier, si l'équation est de degré impair, elle a au moins une racine réelle.

Si elle est de degré pair, si de plus A_0 et A_m sont de signes contraires, elle a au moins deux racines réelles. En effet, y a le signe de A_0 pour toutes les grandes valeurs, positives ou négatives, de x ; elle a le signe de A_m pour $x=0$. Donc il existe une racine réelle positive et une racine réelle négative.

Le calcul numérique des racines se fait comme il est indiqué au § 38.

40. Décomposition d'un polynôme en facteurs.

Soit $f(x)$ un polynôme de degré m qui s'annule pour $x = a$.

Je dis qu'on a : $f(x) = (x - a)\varphi(x)$,

où $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $m - 1$.

En effet, divisons $f(x)$ par $x - a$. D'après les règles de la division algébrique, nous sommes assurés de trouver :

$$f(x) = (x - a)\ \varphi(x) + R,$$

où R *est un nombre.* Faisons maintenant $x = a$; il vient :

$$f(a) = R.$$

Le reste R *de la division par* $x - a$ *est donc ce qu'on obtient en substituant* a *à* x *dans le polynôme.* Mais par hypothèse $f(a) = 0$, puisque a est racine ; donc $R = 0$. En définitive, si a est racine, on a identiquement : $f(x) = (x - a)\ \varphi(x)$.

Corollaire I. — Soit a, b, c, d, ... les racines réelles qu'admet le polynôme égalé à zéro. On peut le mettre sous la forme :

$$f(x) = (x - a)\ (x - b)\ x - c)\ ...\ \chi(x).$$

En effet, $x - a$ n'admet pas b comme racine ; il faut donc que $\varphi(x)$ l'admette.

D'où : $\varphi(x) = (x - b)\psi(x)$, $f(x) = (x - a)\ (x - b)\psi(x)$.

Et ainsi de suite.

Corollaire II. — Le nombre des racines réelles est égal ou inférieur au degré de l'équation, car le nombre des facteurs ne peut surpasser le nombre m.

Corollaire III. — Rien n'empêche les racines d'être *multiples*. On a alors : $f(x) = (x - a)^n\ (x - b)^p\ (x - c)^q\ \chi(x)$.

La racine a est multiple d'ordre n, la racine b multiple d'ordre p, ... On doit avoir $n + p + q < m$. Pour l'étude de la courbe au voisinage de ces points on, se reportera au § 33.

Corollaire IV. — Supposons trouvées et mises en évidence toutes les racines réelles ; le polynôme indécomposable $\chi(x)$ est de degré pair. Car son degré est :

$$m - (n + p + q).$$

Or $n + p + q$ est de même parité que m (§ 37).

41. Relations entre les coefficients d'une équation et ses racines.

1°. — Admettons, ce que nous avons démontré possible, que toutes les racines soient réelles. Elles sont précisément au nombre de m. Nous avons *identiquement,* c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x :

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ + A_m = (x - a)\ (x - b)\ \ldots\ \ (x - p).$$

Développons et identifions les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres *qui sont identiques,* c'est-à-dire qui doivent avoir les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de x. Il vient :

$$\begin{aligned} A_1 &= -(a+b+c+\ldots) = -\sum a, \\ A_2 &= \quad (ab+bc+\ldots) \quad = \quad \sum ab, \\ A_3 &= -(abc+bcd+\ldots) = -\sum abc, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_m &= \pm(abc\ldots p) \end{aligned} \qquad (1)$$

On prend le signe $+$ si m est pair, le signe $-$ si m est impair.

Énonçons les résultats en langage vulgaire. Rétablissons le coefficient A_0 : *la somme des racines est égale au quotient* $A_1 : A_0$ *changé de signe ; la somme des produits des racines prises deux à deux est égale au quotient* $A_2 : A_0$;... *et ainsi de suite.*

2°. — Appliquons à l'équation du second degré :

$$x^2 + px + q = 0.$$

Les racines a et b sont données par les formules :

$$a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad b = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (2)$$

Conformément au théorème général, on a :

$$a + b = -p, \qquad ab = q.$$

42. Deux racines réelles consécutives d'un polynôme entier comprennent nécessairement un nombre impair de racines de la dérivée.

Cette proposition, connue sous le nom de *théorème de Rolle,* est

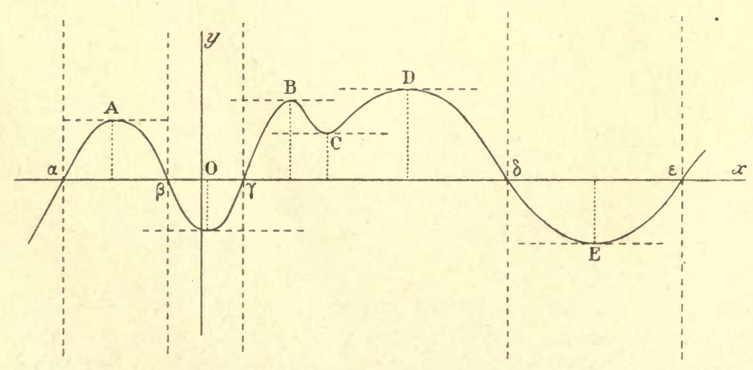


Fig. 35.

évidente. Car la fonction $y = f(x)$, qui est continue, ne peut partir de 0 pour revenir à 0, sans passer par au moins un maximum ou un minimum. Si le nombre des maximums ou des minimums est supérieur à un, il est évidemment impair.

Le théorème s'applique à une fonction continue quelconque *dont la dérivée est elle-même continue* (comparer au § 22).

Inversement, entre deux racines consécutives de la dérivée, il ne peut exister qu'une racine de la fonction : plus généralement la fonction ne passe qu'une seule fois par chacune de ses valeurs.

COROLLAIRE. — Si l'on connaît *toutes* les racines réelles a', b', c', ... de la dérivée, on peut déterminer le nombre exact des racines réelles de la fonction. On substituera dans la fonction les nombres :

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\ \ldots,+\infty,$$

les racines étant supposées rangées par ordre de grandeurs croissantes. On déterminera les signes correspondants de la fonction. Chacun des intervalles comprend zéro ou une racine suivant que les résultats de la substitution sont de même signe ou de signes contraires (§ 38).

43. Un facteur premier d'ordre n d'un polynôme est facteur $n-1$ de sa dérivée.

Supposons le polynôme mis sous la forme :

$$y=(x-a)^n\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ n'est plus divisible par $x-a$; ce qui revient au même, $\varphi(x)$ n'admet plus a comme racine. On a :

$$z=\frac{dy}{dx}=n(x-a)^{n-1}\varphi(x)+(x-a)^n\frac{d\varphi}{dx}$$

$$=(x-a)^{n-1}\left[n\varphi(x)+(x-a)\frac{d\varphi}{dx}\right].$$

La parenthèse n'est pas divisible par $(x-a)$, car pour $x=a$,

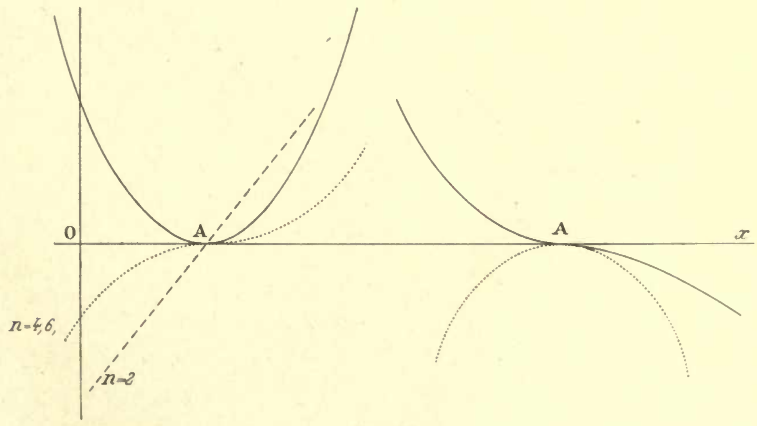


Fig. 36.

elle prend la valeur $n\varphi(a)$, qui par hypothèse n'est pas nulle. Donc le facteur $x-a$ n'intervient dans la dérivée qu'à la puissance $n-1$.

Reportons-nous au § 33. Si n est pair (fig. 36 à gauche), nous savons que la courbe y est tangente à Ox pour $x = a$, et reste du même côté de sa tangente de part et d'autre du point A d'abscisse a. Donc sa dérivée z, qui s'annule pour la même valeur de x, traverse l'axe des x en ce point. Si $n = 2$, c'est une droite. Si $n = 4, 6, \ldots$, c'est une courbe du 3e, 5e, ... degré qui présente au point A un contact d'ordre impair avec Ox.

Si n est impair(fig. 36 à droite), la courbe y, tangente à Ox au point A, passe d'un côté à l'autre de Ox. La courbe z reste du même côté.

Exception doit être faite pour $n = 1$: la courbe y est une droite inclinée ; la courbe z est une droite horizontale qui ne passe pas par le point A.

Le théorème qui vient d'être démontré peut s'énoncer de la manière suivante : *une racine multiple d'ordre n d'un polynôme est racine d'ordre $n - 1$ de sa dérivée.*

CHAPITRE III

FONCTIONS CIRCULAIRES

44. Définition des fonctions circulaires.

1°. — Décrivons un cercle (fig. 37) dont nous prendrons le rayon $\overline{CO}$ pour unité de longueur. Je ne dis pas que le rayon a l'unité de longueur, ce qui laisserait à supposer que sa longueur est définie *a priori*. Sa longueur est quelconque, je la prends pour unité : la longueur de toute autre ligne sera évaluée par rapport à $\overline{CO}$.

Par exemple, la longueur de la circonférence sera 2π, c'est-à-dire 6,2832 fois le rayon *quel qu'il soit*.

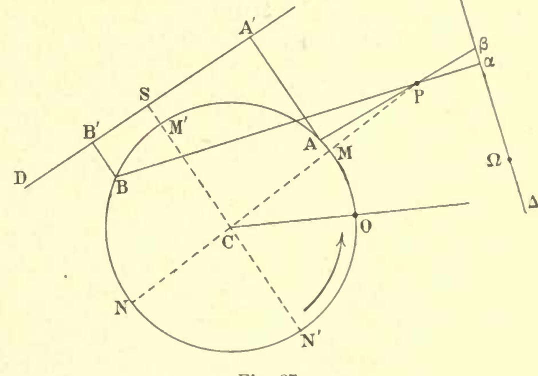


Fig. 37.

Prenons pour variable x la longueur de l'arc compté à partir du point O dans le sens de la flèche. A un point A de la circonférence correspondent une infinité d'arcs. Appelons α l'arc $\overline{OA}$; les arcs qui se terminent au point A, ont pour expression générale :

$$x = \alpha + 2k\pi,$$

où k est un entier quelconque positif ou négatif.

En effet, je peux aller de O à A et m'arrêter en A. Mais je peux dépasser A, accomplir à partir de A dans le sens positif un tour entier ($k = 1$), deux tours entiers ($k = 2$), ... et je me retrouverai en A. Je peux accomplir ces tours dans le sens négatif ($k = -1$, $k = -2$, ...). Enfin je peux partir du point O dans le sens négatif et m'arrêter en A; j'ai parcouru l'arc $-(2\pi - \alpha) = \alpha - 2\pi$; il cor-

respond à $k = -1$. On vérifiera aisément que les parcours qui m'amènent de O en A par un déplacement sur la circonférence, rentrent tous dans la formule :

$$x = \alpha + 2k\pi,$$

à la condition qu'un parcours dans un sens annule un parcours égal dans le sens opposé.

Pour obtenir une fonction circulaire, il faut relier conventionnellement au point A, par conséquent aux arcs qui lui correspondent, une quantité définie sans ambiguïté. Nous n'avons évidemment que l'embarras du choix.

2°. — Par exemple, appelons y la distance $\overline{AP}$ du point A à un point fixe P ; y est une fonction de x parfaitement définie et calculable, à laquelle nous pouvons donner un nom. Posons $y = \Phi(x)$. Il est évident que y est une *fonction périodique* de l'arc ; elle reprend la même valeur quand on augmente l'arc d'un multiple quelconque positif ou négatif de 2π, puisque cette opération ne modifie pas la position du point A. La distance y est maxima pour les arcs qui se terminent en N où la droite PC coupe la circonférence, minima pour les arcs qui se terminent en M.

Une simplification évidente consiste à transporter l'origine des arcs en l'un ou l'autre de ces points, M par exemple. Les minima correspondent aux arcs $k\pi$, où k est pair ; les maxima correspondent aux arcs $k\pi$, où k est impair.

Cette fonction $y = \Phi(x)$, même rapportée aux origines M ou N, a un défaut. Elle dépend de la distance CP, ou plus exactement du rapport $\overline{CP} : \overline{CO}$ que nous appellerons r. Nous devons poser : $y = \Phi(x, r)$. C'est une fonction de deux variables, ou, ce qui revient au même, d'une variable x et d'un *paramètre* r.

3°. — Nous pourrions considérer comme fonction de x la distance y du point A à une droite arbitraire D. On vérifiera, comme plus haut, que cette fonction est périodique, admet 2π pour période, c'est-à-dire reprend la même valeur quand on ajoute à la variable un multiple quelconque de 2π. On la simplifie en prenant pour origine des arcs l'un ou l'autre des points M', N', où la perpendiculaire abaissée de C sur D coupe la circonférence.

Mais cette nouvelle fonction a, comme la précédente, le défaut de dépendre du paramètre $r = \overline{CS} : \overline{CO}$.

4°. — Nous pourrions considérer des fonctions plus complexes. Menons, par exemple, la droite Δ ; joignons l'extrémité de l'arc A au point fixe P et prolongeons. Nous définissons un point β. Nous pourrions étudier comment varie la distance $\overline{\Omega\beta}$ au point β, du point quelconque Ω pris sur Δ, quand A se déplace sur la circonférence. Mais cette fonction, même simplifiée le plus possible, dépend de plusieurs paramètres (trois, comme il est facile de le montrer).

5°. — Parmi toutes ces fonctions, nous choisirons les plus simples; c'est dire que nous donnerons au point P et aux droites D et Δ des positions particulières. Nous définirons ainsi des fonctions au moyen desquelles il nous sera facile de montrer que s'expriment les fonctions complexes dont nous venons de parler. Ces fonctions simples seront périodiques et admettront 2π pour période. Elles ne sont, du reste, que la généralisation de celles avec lesquelles la *Trigonométrie élémentaire* a familiarisé le lecteur.

Sinus, cosinus.

45. Définition du sinus; sinusoïde.

1°. — Choisissons pour droite D la droite CO qui passe par le centre de la circonférence et par l'origine des arcs. Nous appellerons *sinus d'un arc* $x = \overline{OA}$, la distance $y = \overline{AA'}$, de l'extrémité A de cet arc à la droite D; nous poserons :

$$y = \sin x.$$

Cette distance est évaluée en prenant $\overline{CO}$ pour unité. Par con-

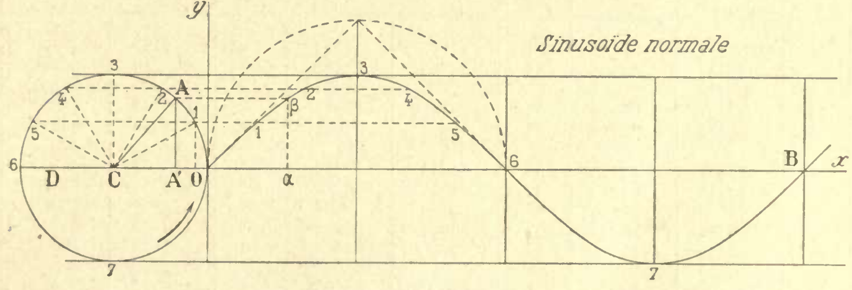


Fig. 38.

vention, elle est positive si le point A est au-dessus de D, négative s'il est au-dessous. On a donc par définition :

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Ainsi le sinus de l'arc $\overline{OA}$ est positif; il a pour valeur *le nombre* $\overline{AA'} : \overline{CO}$.

Nous pouvons établir une table à simple entrée; dans la première colonne, nous écrirons les arcs évalués avec le rayon pour unité de longueur, c'est-à-dire les rapports $\overline{OA} : \overline{CO}$; dans la seconde, nous écrirons les rapports correspondants $\overline{AA'} : \overline{CO}$.

2°. — On a l'habitude de prendre pour variable auxiliaire l'angle ACO évalué en degrés; le quadrant est divisé en 90 ou en 100 parties. Nous conserverons la division en 90 parties qui est encore la plus usitée dans les laboratoires. *Mais il est bien entendu que l'angle*

n'est qu'une variable auxiliaire, que la variable x est le rapport de l'arc au rayon. Nous verrons plus loin l'importance de cette remarque.

3°. — Pour représenter la fonction $y = \sin x$, portons sur la droite Ox une longueur $\overline{O\alpha} = \overline{OA}$, puis élevons une perpendiculaire $\overline{\alpha\beta} = \overline{A'A}$. Faisons de même pour tous les points de la circonférence. Nous obtenons une courbe *indéfinie* qu'on appelle *sinusoïde*. Sa période $\overline{OB}$ est égale à 2π fois le rayon $\overline{CO}$.

Il est évident, sur la figure, que la période de la sinusoïde se compose de quatre arcs identiques entre eux ou symétriques par rapport à une verticale : 03, 36, 67, 7B. Cette proposition revient à écrire :

$$\sin x = \sin(\pi - x), \qquad \sin x = -\sin(\pi + x),$$

relations qu'on vérifiera sur la figure. Il résulte de là que la courbe indéfinie est entièrement connue si nous déterminons les sinus pour les arcs compris entre 0 et $\pi : 2$, c'est-à-dire pour les angles compris entre 0 et 90°. Ils sont renfermés dans la table suivante.

46. Table des sinus.

Les arcs et les sinus sont multipliés par 10^5.

Angles	Arcs	Sinus	Angles	Arcs	Sinus	Angles	Arcs	Sinus
1	01745	01745	31	54105	51504	61	106465	87462
2	03491	03490	32	55850	52992	62	108210	88295
3	05236	05234	33	57596	54464	63	109995	89101
4	06981	06976	34	59341	55919	64	111701	89879
5	08727	08716	35	61086	57358	65	113446	90631
6	10472	10453	36	62831	58779	66	115191	91355
7	12217	12187	37	64577	60182	67	116937	92050
8	13963	13917	38	66322	61566	68	118682	92718
9	15708	15643	39	68067	62932	69	120427	93358
10	17453	17365	40	69813	64279	70	122173	93969
11	19199	19081	41	71558	65606	71	123918	94552
12	20944	20791	42	73303	66913	72	125663	95106
13	22689	22495	43	75049	68200	73	127409	95630
14	24435	24192	44	76794	69466	74	129154	96126
15	26180	25882	45	78539	70711	75	130899	96593
16	27925	27564	46	80285	71934	76	132645	97030
17	29671	29237	47	82030	73135	77	134390	97437
18	31416	30902	48	83775	74314	78	136135	97815
19	33161	32557	49	85521	75471	79	137881	98163
20	34907	34202	50	87266	76604	80	139626	98481
21	36652	35837	51	89011	77714	81	141371	98769
22	38397	37460	52	90757	78801	82	143117	99027
23	40143	39073	53	92502	79864	83	144862	99255
24	41888	40674	54	94247	80902	84	146607	99452
25	43633	42262	55	95993	81915	85	148352	99619
26	45379	43837	56	97738	82904	86	150098	99756
27	47124	45399	57	99483	83867	87	151843	99863
28	48869	46947	58	101229	84805	88	153588	99939
29	50615	48481	59	102297	85717	89	155334	99985
30	52360	50000	60	104719	86603	90	157079	100000

47. Définition du cosinus.

Pour définir le cosinus, nous procédons comme pour le sinus ; la droite D′ est maintenant la verticale. Par convention, le cosinus est positif si le point A′ est à droite de D′, négatif s'il est à gauche. De là résulte immédiatement l'équation :

$$\cos x = \cos(-x). \qquad (1)$$

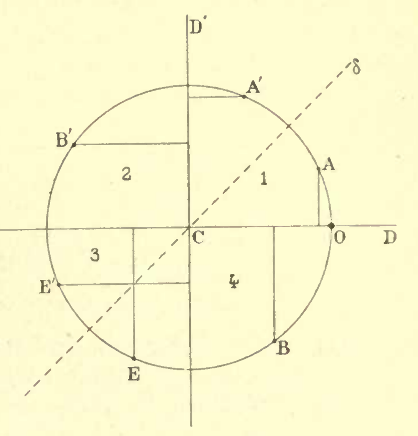


Fig 39.

On vérifiera les relations équivalentes (que nous aurions pu prendre comme définition des cosinus) :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \qquad (2)$$

Les points correspondants, A et A′, B et B′, ..., tels que le sinus et le cosinus des premiers soient respectivement égaux au cosinus et au sinus des seconds, sont symétriques par rapport à la droite δ, bissectrice dans le premier quadrant des droites D et D′ (fig. 39).

Des relations (1) et (2) on tire l'équation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

valable pour toutes les valeurs de x, et dans laquelle il suffit de remplacer x par $x \pm \pi : 2$, pour retrouver les relations :

$$\sin x = \sin(\pi - x), \qquad \sin(-x) = \sin(\pi + x),$$

caractéristiques du sinus.

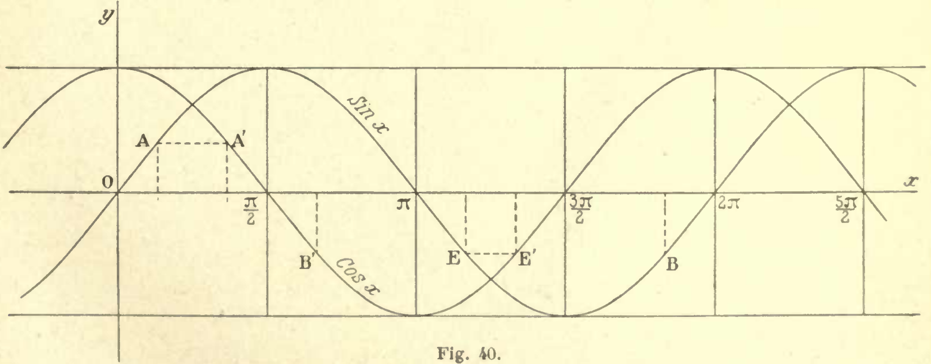


Fig. 40.

En vertu de (2), la cosinusoïde est une sinusoïde *décalée*, c'est-à-dire transportée parallèlement à elle-même. La figure 40 représente

les deux courbes, l'échelle relative des ordonnées et des abscisses a été modifiée; nous reviendrons là-dessus plus loin (§ 51, 2°). Les points A, A', ... y sont disposés comme dans la figure 39. Le tableau du § 46 est donc suffisant pour construire la cosinusoïde qui est évidemment une courbe indéfinie périodique.

On vérifie aisément sur une figure la relation fondamentale :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{3}$$

48. Formules d'addition et de soustraction.

1°. — Nous ne nous attarderons pas à démontrer les formules fondamentales :

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b,\\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Elles sont vraies quels que soient les arcs a et b, positifs ou négatifs, inférieurs ou supérieurs à une circonférence. On en tire immédiatement les formules de soustraction :

$$\left.\begin{aligned}\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b,\\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

en vertu des relations :

$$\sin(-b) = -\sin b, \qquad \cos(-b) = \cos b.$$

Faisant $a = b$, il vient :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \tag{3}$$

On pourrait de proche en proche trouver les valeurs de $\sin na$ et de $\cos na$; mais nous étudierons (§ 225) des méthodes plus rapides.

2°. — Des formules (1) et (3), on tire immédiatement le système :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b,\\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \cos a \sin b;\\ \cos(a-b) + \cos(a+b) &= 2 \cos a \cos b,\\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \sin a \sin b;\end{aligned}$$

qui peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2};\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\ \cos\beta - \cos\alpha &= 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Il suffit de poser : $\alpha = a + b, \qquad \beta = a - b.$

3°. — Faisant dans les formules (4) et (5) $\alpha = \pi : 2$, ou $\alpha = 0$, on trouve :

$$1 + \sin\beta = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right),$$
$$1 - \sin\beta = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right); \qquad (6)$$

$$1 + \cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2}, \quad 1 - \cos\beta = 2\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (7)$$

4°. — Le lecteur doit se rendre compte du sens de ces formules en construisant les courbes correspondantes. La figure 41 lui montre

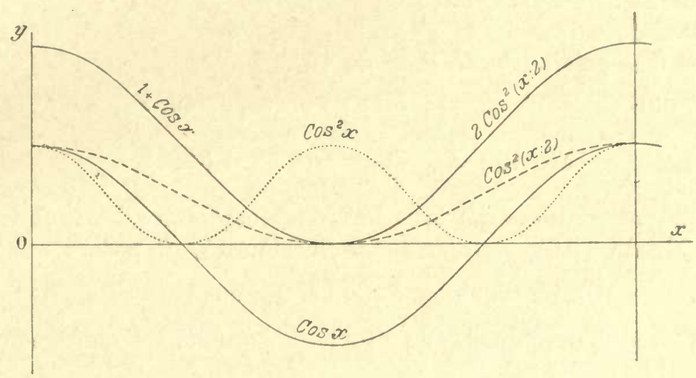


Fig. 41.

comment il faut procéder; elle se rapporte à la première des formules (7). Il remarquera que construire la courbe $y = f(x : n)$ revient à construire la courbe $y = f(x)$, puis à prendre pour les mêmes ordonnées des abscisses n fois plus grandes; autrement dit, à dilater la courbe n fois dans le sens des abscisses.

5°. — Voici des relations souvent appliquées qu'on tire immédiatement des formules (3), (7) et (6) : on se reportera au § 57 pour la définition de la tangente et de la cotangente.

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos\beta}{\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 + \sin\beta}{1 - \sin\beta}.$$

49. Construction des tables de sinus; valeurs de quelques sinus.

1°. — On vérifiera immédiatement les formules suivantes, dites de Simpson [première équation (4) et première équation (5)] :

$$\sin(m+1)b = 2\sin mb\cos b - \sin(m-1)b,$$
$$\cos(m+1)b = 2\cos mb\cos b - \cos(m-1)b.$$

Ce sont des *formules de récurrence* (§ 12) permettant de calculer un terme d'une série quand on connaît un certain nombre de termes *précédents* de cette même série. Les deux séries à calculer sont :

$$\sin b, \quad \sin 2b, \quad \sin 3b, \ldots \qquad \cos b, \quad \cos 2b, \quad \cos 3b, \ldots$$

Soient connus $\sin b$ et $\cos b$; faisons $m = 1$, il vient :

$$\sin 2b = 2 \sin b \cos b, \qquad \cos 2b = 2 \cos^2 b - 1,$$

formules qui donnent : $\sin 2b$ et $\cos 2b$.

Faisons $m = 2$, il vient :

$$\sin 3b = 2 \sin 2b \cos b - \sin b, \qquad \cos 3b = 2 \cos 2b \cos b - \cos b,$$

qui donnent : $\sin 3b$, $\cos 3b$.

Et ainsi de suite.

2°. — On choisit pour b l'arc de $10''$.

L'arc de $180°$ vaut $\pi = 3{,}1416$; on a par suite :

$$\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 10^{-5} . 4{,}84814.$$

Comme pour de petits arcs, on peut confondre l'arc et le sinus (voir table du § 46), et le cosinus avec l'unité, on posera :

$$\sin 10'' = 10^{-5} . 4{,}84814, \qquad \cos 10'' = 1.$$

On pourra donc calculer de proche en proche les sinus et cosinus de tous les arcs.

3°. — On peut calculer directement une série de lignes trigonométriques qui serviront de contrôle. Dans une circonférence de rayon R, on a pour le côté :

du triangle équilatéral : $R\sqrt{3}$,

du carré inscrit : $R\sqrt{2}$,

de l'hexagone régulier : R,

du décagone régulier : $R(\sqrt{5} - 1) : 2$.

D'où l'on tire :

$$\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{2} : 2, \qquad \sin 30° = \cos 60° = 1 : 2,$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \sqrt{3} : 2, \qquad \sin 18° = \cos 72° = (\sqrt{5} - 1) : 4.$$

$$\cos 18° = \cos 72° = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : 4.$$

Utilisant les formules du paragraphe précédent, on calculera aisément les lignes trigonométriques de 9° en 9°.

50. Formules de division.

1°. — Arc donné par le cosinus.

Quand l'arc est donné par son cosinus, il n'est pas complètement déterminé. Une infinité d'arcs ont le même cosinus (fig. 42); ils cor-

respondent aux points d'intersection A, B, C, D, ... de la cosinusoïde avec une droite parallèle à l'axe des abscisses. Si nous divisons ces arcs par 2, 3, ..., n, nous obtenons une nouvelle série d'arcs

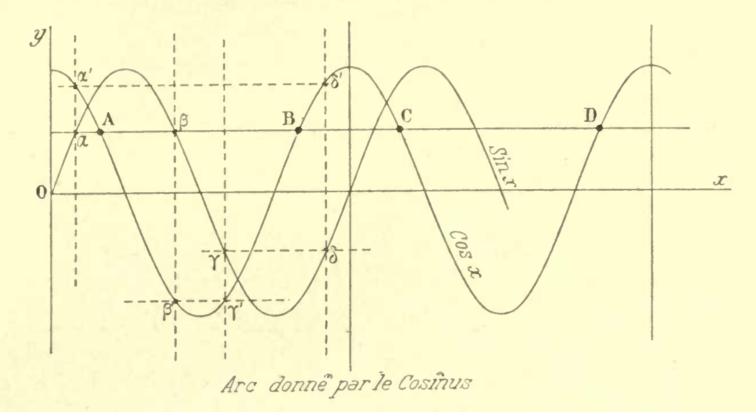


Fig. 42.

dont les sinus (ou les cosinus) ne sont pas nécessairement les mêmes.

Il est d'abord évident que pour étudier la division par n, il suffit de considérer les arcs compris dans n périodes de la cosinusoïde. Soit en effet ε un de ces arcs; tous les autres seront de la forme $\varepsilon + 2\pi nk$; leur quotient par n sera $\frac{\varepsilon}{n} + 2\pi k$, dont les fonctions circulaires sont les mêmes que celles de l'arc $\frac{\varepsilon}{n}$.

Étudions en particulier la division par 2. La figure 42 montre immédiatement que les *sinus* de tous les arcs moitiés des arcs qui ont même cosinus, sont égaux, ou égaux et de signes contraires (points α, β, γ, δ); les *cosinus* de tous les arcs moitiés des arcs qui ont même cosinus, sont aussi égaux, ou égaux et de signes contraires (points α', β', γ', δ').

Ce résultat satisfait aux formules (7) du § 48 :

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varepsilon}{2}}, \qquad \cos\frac{\varepsilon}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varepsilon}{2}}.$$

Pour la moitié des arcs dont le cosinus a la valeur donnée (valeur que nous appelons $\cos\varepsilon$), il faut prendre le signe $+$; pour l'autre moitié, il faut prendre le signe $-$. Il n'existe, du reste, aucune ambiguïté pratique. En effet, le point d'intersection B, par exemple, étant choisi, l'arc moitié est complètement déterminé (il est limité par la verticale $\beta\beta'$), et ses fonctions circulaires sont connues.

2°. — Arc donné par le sinus.

Les considérations par lesquelles débute le *1°*, sont encore

valables. Pour étudier la division par 2, il suffit donc de considérer deux périodes de la sinusoïde. Il est facile de voir que les *sinus* de tous les arcs moitiés des arcs qui ont même sinus, ont quatre valeurs distinctes, deux à deux égales et de signes contraires. Les *cosinus* de tous les arcs moitiés des arcs qui ont même sinus, ont quatre valeurs distinctes, deux à deux égales et de signes contraires, et qui

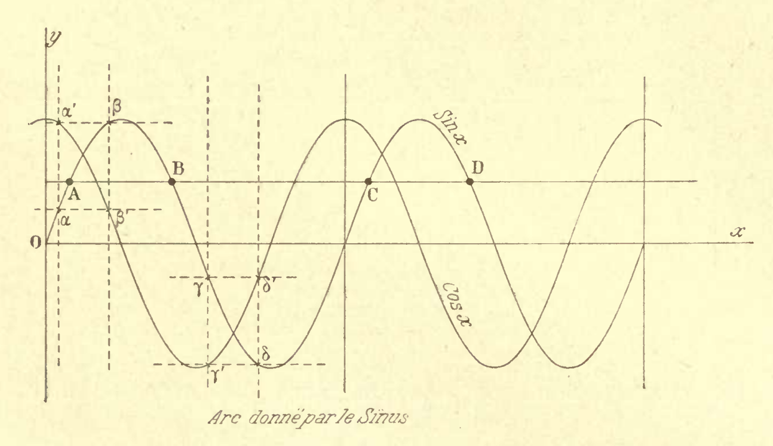


Fig. 43.

sont respectivement égales aux valeurs des sinus. C'est ce que prouve immédiatement la figure 43.

Voici la démonstration algébrique. On a :

$$2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} = \sin \varepsilon, \qquad \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} + \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} = 1.$$

D'où, en posant $\sigma = \pm$, $\sigma' = \pm$:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} + \cos \frac{\varepsilon}{2} = \sigma\sqrt{1 + \sin \varepsilon},$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} - \cos \frac{\varepsilon}{2} = \sigma'\sqrt{1 - \sin \varepsilon}, \qquad (1)$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{1 + \sin \varepsilon} + \sigma'\sqrt{1 - \sin \varepsilon}\right),$$

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{1 + \sin \varepsilon} - \sigma'\sqrt{1 - \sin \varepsilon}\right).$$

Nous trouvons bien quatre valeurs, puisque nous pouvons remplacer l'un ou l'autre des symboles σ, σ', par le signe $+$ ou le signe $-$. Les quatre valeurs du sinus sont bien les mêmes que les quatre valeurs du cosinus.

Répétons que l'indétermination ne provient que de l'indétermination initiale ; si on précise la valeur de l'arc qu'on divise, les

fonctions circulaires du quotient sont déterminées sans ambiguïté.

51. Différentielles du sinus et du cosinus.

1°. — Soit dx un arc sur lequel nous ne ferons d'abord aucune hypothèse. On a [§ 48, formules (1)] :

$$\sin(x+dx)-\sin x=\sin x(\cos dx-1)+\cos x \sin dx,$$

$$\cos(x+dx)-\cos x=\cos x(\cos dx-1)-\sin x \sin dx.$$

Supposons maintenant que dx soit une quantité plus petite que toute quantité donnée ; autrement dit, dx est la différentielle de x. Nous admettrons comme évidentes les relations :

$$\cos dx=1, \qquad \sin dx=dx.$$

D'où : $$d\sin x=\cos x\, dx, \qquad d\cos x=-\sin x\, dx.$$

Montrons la concordance de ces formules et des figures. Considérons, par exemple, la sinusoïde (fig. 40) :

$$y=\sin x.$$

Le quotient $dy : dx=\cos x$, mesure la *pente* de la courbe. En O elle est maxima ; de O en A, elle est approximativement constante, puisqu'elle est proche d'un maximum. Elle diminue et s'annule pour $x=\pi : 2$, qui annule le cosinus. Puis elle devient négative.

Et ainsi de suite.

2°. — Pente a l'origine.

Dans la sinusoïde *normale* (fig. 38), *pour laquelle les échelles des abscisses et des ordonnées sont les mêmes,* la pente à l'origine est :

$$\cos 0=1.$$

La tangente à l'origine est bissectrice des axes de coordonnées.

Mais généralement les échelles des ordonnées et des abscisses ne sont pas les mêmes. Soit à étudier les courbes :

$$y=A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}, \qquad z=A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}.$$

A représente l'ordonnée maxima : on la désigne sous le nom d'*amplitude* ; λ est la longueur d'abscisse qui correspond à la période. Un calcul identique au précédent donne :

$$\frac{dy}{dx}=A\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}, \qquad \frac{dz}{dx}=-A\frac{2\pi}{\lambda}\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}.$$

En particulier, la pente à l'origine est pour la sinusoïde :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=A\frac{2\pi}{\lambda}.$$

La tangente à l'origine a donc pour équation :

$$\frac{y}{A} = \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

En particulier, elle coupe l'ordonnée d'abscisse $x = \lambda : 4$, à une hauteur y donnée par la formule :

$$y = \pi A : 2 = 1{,}57 \, . \, A.$$

Ce résultat est intéressant quand on veut construire une sinusoïde, ce qui arrive à tout instant en Physique. Pour la sinusoïde normale, on a : $\lambda = 2\pi A$, quelle que soit l'unité de longueur choisie. Corrélativement la tangente à l'origine a pour équation : $y = x$.

3°. — Prendre des échelles différentes sur les axes de coordonnées pour construire les courbes :

$$y = \sin x, \qquad z = \cos x,$$

revient à prendre la même échelle et à construire les courbes :

$$y = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}, \qquad z = A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

52. Amplitude, phase ou décalage. Somme de plusieurs sinusoïdes.

1°. — Soit la sinusoïde :

$$y = A \sin(\omega x - \alpha).$$

A représente l'*amplitude ;* c'est l'ordonnée maxima. Nous posons : $\omega = 2\pi : \lambda$. La longueur dont il faut se déplacer sur l'axe des abscisses pour obtenir des ordonnées identiques avec des pentes identiques, est un multiple quelconque de λ. Enfin α mesure le *décalage* ou la *phase ;* α fixe les points où les ordonnées s'annulent, les zéros de la sinusoïde. Pour ces points on a :

$$\omega x - \alpha = k\pi, \qquad x = \frac{\alpha\lambda}{2\pi} + k\frac{\lambda}{2}.$$

2°. — Supposons tracées plusieurs sinusoïdes de même période :

$$y_1 = A \sin(\omega x - \alpha), \qquad y_2 = B \sin(\omega x - \beta), \ldots$$

Additionnons les ordonnées. Nous obtenons une nouvelle courbe qui est une sinusoïde et dont il s'agit de calculer les éléments.

Soit : $$Y = R \sin(\omega x - \rho),$$

la courbe cherchée. Identifions :

$$A \sin(\omega x - \alpha) + B \sin(\omega x - \beta) + \ldots \qquad = R \sin(\omega x - \rho).$$

Développons les sinus ; il vient :

$$(A \cos\alpha + B \cos\beta + \ldots) \sin\omega x - (A \sin\alpha + B \sin\beta + \ldots) \cos\omega x$$
$$= R \cos\rho \sin\omega x - R \sin\rho \cos\omega x.$$

Cette condition doit être satisfaite identiquement, c'est-à-dire quel que soit x. Il suffit de poser les relations :

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + \ldots = R\cos\rho,$$
$$A\sin\alpha + B\sin\beta + \ldots = R\sin\rho,$$

qui définissent complètement R et ρ.

Montrons-le comme résultat de la règle de Fresnel.

53. Règle de Fresnel.

Raisonnons sur deux sinusoïdes. Prenons des axes de coordonnées rectangulaires OX, OY. Traçons une droite OA ayant la longueur A et faisant avec OX l'angle α mesuré par l'arc α qui entre dans y_1. Traçons une seconde droite OB ayant la longueur B et faisant avec OX l'angle β mesuré par l'arc β qui entre dans y_2.

Construisons la diagonale du parallélogramme. Je dis que sa longueur est R et qu'elle fait avec OX un angle ρ qui correspond à l'arc ρ que nous cherchons. En effet, projetons sur OX et sur OY ; on a :

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = R\cos\rho,$$
$$A\sin\alpha + B\sin\beta = R\sin\rho.$$

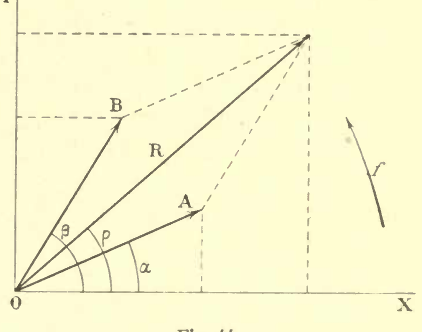


Fig. 44.

La règle se généralise immédiatement pour un nombre quelconque de sinusoïdes.

Nous supposons que les angles α, β, ... sont positifs. S'ils sont négatifs, on les portera en sens inverse de la flèche f.

Nous supposons A, B, ... positifs. S'ils sont négatifs, après avoir déterminé leurs directions au moyen des angles α, β, on les portera à partir du point O sur cette direction, *mais en sens inverse ;* c'est la conséquence de la relation :

$$A\sin(\omega x - \alpha) = -A\sin(\omega x - \alpha \pm \pi).$$

Enfin nous supposons que dans la somme à effectuer il n'entre que des sinusoïdes. Si l'une des courbes se présente sous la forme : $A\cos(\omega t - \alpha)$, on utilisera la relation :

$$\cos(\omega t - \alpha) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\omega t - \alpha)\right] = \sin\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

On opérera comme pour un sinus, mais on diminuera l'angle α de $\pi : 2$.

54. Addition de deux sinusoïdes dont les périodes sont peu différentes. Battements.

Soit à additionner deux sinusoïdes dont les périodes sont peu différentes :

Pour simplifier, nous leur donnerons même amplitude :

$$y_1 = \text{A} \sin \omega x, \qquad y_2 = \text{A} \sin [(\omega + \omega')x - \alpha], \qquad (1)$$

$$\text{Y} = y_1 + y_2 = 2\text{A} \cos\left(\frac{\omega' x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left[\left(\omega + \frac{\omega'}{2}\right)x - \frac{\alpha}{2}\right]. \qquad (2)$$

La quantité ω' étant très petite, la courbe Y possède une période très voisine des périodes des courbes composantes (1); *mais son amplitude est lentement variable.*

Pour énoncer plus commodément le résultat, nous introduirons la *fréquence*. C'est le nombre de périodes dans l'unité de longueur.

Nous poserons : $\quad$ *fréquence* $= \nu = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Les fréquences des courbes composantes sont donc $\omega : 2\pi$ et $(\omega + \omega') : 2\pi$.

La fréquence de l'amplitude est $\omega' : 4\pi$; elle est *moitié* de la différence des fréquences des courbes composantes. C'est à ces variations d'amplitudes qu'on donne le nom de *battements*. Si le phénomène mesurable dépend seulement de la valeur absolue de l'amplitude et non de son signe, il aura deux maximums par période. D'où la conclusion : *le nombre des battements dans l'unité de longueur est égal à la différence des fréquences des courbes composantes.*

Dans la pratique, il s'agit de mouvements; les abscisses x représentent des temps. La règle devient : *le nombre des battements dans l'unité de temps est égal à la différence des fréquences des mouvements composants.*

55. Courbes de Lissajous.

1°. — On appelle *courbes de Lissajous* les courbes qui résultent de la composition de deux mouvements *rectangulaires* exprimés en fonction du temps (variable auxiliaire) par les relations :

$$x = \text{A} \sin (\omega_1 t - \alpha), \qquad y = \text{B} \sin (\omega_2 t - \beta).$$

Les périodes sont :

$$\text{T}_1 = 2\pi : \omega_1, \qquad \text{T}_2 = 2\pi : \omega_2.$$

Pour que la courbe décrite soit fermée, on doit avoir :

$$m\omega_1 = n\omega_2, \qquad n\text{T}_1 = m\text{T}_2 = \Theta,$$

où m et n sont des entiers que nous supposerons premiers entre eux. Après m périodes T_2 de l'un des mouvements, par conséquent après n périodes T_1 de l'autre, tout revient dans l'état initial.

2°. — Supposons qu'il en soit ainsi. Les courbes sont fermées et inscrites dans des rectangles de côtés 2A et 2B. Cherchons comment elles dépendent des paramètres α et β.

Quand nous changeons l'origine des temps, nous ne modifions pas la forme des courbes. Cela revient cependant à remplacer :

$$\omega_1 t \quad \text{par} \quad \omega_1 t + \omega_1 \theta, \qquad \omega_2 t \quad \text{par} \quad \omega_2 t + \omega_2 \theta.$$

La forme des courbes dépend donc de la différence :

$$\frac{\alpha}{\omega_1} - \frac{\beta}{\omega_2}.$$

En effet, une fois le changement de l'origine des temps effectué, les mouvements deviennent :

$$x = A \sin(\omega_1 t + \omega_1 \theta - \alpha), \qquad y = B \sin(\omega_2 t + \omega_2 \theta - \beta).$$

Le temps θ est arbitraire : posons $\omega_1 \theta = \alpha$; il reste :

$$x = A \sin \omega_1 t, \qquad y = B \sin \left[\omega_2 t + \omega_2 \left(\frac{\alpha}{\omega_1} - \frac{\beta}{\omega_2} \right) \right];$$

ce qu'il fallait démontrer.

3°. — Prenons le mouvement sous la forme :

$$x = A \sin \frac{2\pi n}{\Theta} t, \qquad y = B \sin \frac{2\pi m}{\Theta} (t - \tau). \qquad (1)$$

Pour obtenir toutes les trajectoires possibles, il suffit que la *constante* τ varie de 0 à :

$$\frac{\Theta}{mn} = \frac{T_1}{m} = \frac{T_2}{n};$$

autrement dit, le mouvement redevient identique à lui-même quand on remplace τ par $\tau + \Theta : mn$. En effet, changeons l'origine des temps, ce qui ne change pas la forme de la trajectoire : remplaçons t par $t + \theta$. Ajoutons $\Theta : mn$ à τ; le nouveau mouvement a pour équation :

$$x = A \sin \frac{2\pi n}{\Theta} (t + \theta), \qquad y = B \sin \frac{2\pi m}{\Theta} \left(t + \theta - \tau - \frac{\Theta}{mn} \right). \qquad (2)$$

Écrivons que les mouvements (1) et (2) sont identiques. Les quantités μ et ν étant des nombres entiers, il suffit de poser :

$$\theta = \nu \frac{\Theta}{n}, \qquad \theta - \frac{\Theta}{mn} = \mu \frac{\Theta}{m};$$

d'où :

$$m\nu - n\mu = 1. \qquad (3)$$

Cette équation peut toujours être satisfaite par des valeurs entières de μ et de ν.

Donc la période pour τ est bien $\Theta : mn$.

4° — Le calcul des courbes se fait très simplement, grâce à la table du § 46. La figure 45 représente le cas de *l'octave :*

$$x = \sin(2\omega t + \delta), \qquad y = \sin \omega t. \qquad (4)$$

Le changement de sens de circulation du mobile se produit sur une courbe parcourue successivement dans les deux sens ; par suite, le sens de circulation y est indéterminé. C'est ici un arc de parabole :

$$\delta = \pi : 2 ; \qquad x = \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t , \qquad y = \sin \omega t ;$$

$$x + 2y^2 = 1 .$$

La figure 45 représente la moitié du phénomène total. Quand δ

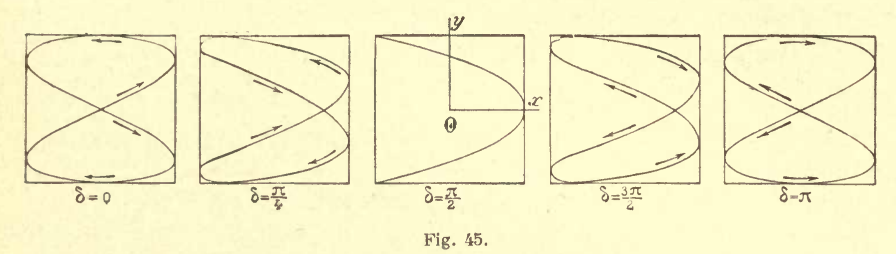


Fig. 45.

varie de π à 2π, on obtient des courbes symétriques par rapport à une verticale.

La variation de δ est conforme à la proposition *3*°. On a ici $m = 1$, $n = 2$, $mn = 2$. La variation δ doit correspondre à la moitié d'une période Θ du phénomène, c'est-à-dire à une période du phénomène périodique le plus rapide dont l'élongation est x.

2°. — Si la condition : $\quad m\omega_1 = n\omega_2,$

où m et n sont des entiers, n'est satisfaite qu'approximativement, la courbe n'est pas fermée. Soit :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \varepsilon,$$

une valeur voisine de ω_1, dont le rapport avec ω_2 est rationnel. Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme (4) généralisée, à la condition de remplacer ω_1 par ω'_1, et simultanément de prendre pour δ une fonction linéaire du temps facile à déterminer.

Tout se passe comme dans le premier cas, mais avec un δ lentement variable. On observe donc *successivement* toutes les courbes pour lesquelles les fréquences sont dans le rapport rationnel et qui correspondent à diverses valeurs de δ. Par exemple, si le rapport est voisin de 2, on verra successivement les courbes de la figure 45 et les courbes symétriques par rapport à une verticale.

C'est en cela que consistent les *battements* pour deux mouvements sinusoïdaux à angle droit.

56. Fonctions inverses ; arc sinus, arc cosinus.

1°. — Nous avons considéré y comme fonction de x, le sinus ou le cosinus comme fonctions de l'arc. En considérant (§ 1) l'arc comme

fonction du sinus ou du cosinus, nous définissons les fonctions *inverses* :

$$x = \text{arc sin } y, \qquad x = \text{arc cos } y\ ;$$

x est l'arc dont le sinus est y, ou l'arc dont le cosinus est y. Tandis que le sinus et le cosinus d'un arc donné sont connus sans ambiguïté, un sinus ou un cosinus conviennent à une infinité d'arcs. Donc y est une fonction *uniforme* de x, tandis que x est une fonction *multiforme* de y.

Pour s'habituer au maniement des fonctions circulaires inverses, le lecteur construira la courbe :

$$2 \text{ arc sin } y - \text{arc sin } x = \delta.$$

Plus généralement, il reprendra le paragraphe précédent, en éliminant la variable auxiliaire t des équations du mouvement.

2°. — Cherchons les dérivées de ces fonctions. Nous avons :

$$y = \sin x, \qquad dy = \cos x\, dx = \sigma\sqrt{1 - y^2}\, dx\ ;$$

$$dx = d(\text{arc sin } y) = \sigma \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$y = \cos x, \qquad dy = -\sin x\, dx = -\sigma\sqrt{1 - y^2}\, dx\ ;$$

$$dx = d(\text{arc cos } y) = -\sigma \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

σ représente le signe $\pm$.

Il n'y a aucune difficulté pour choisir les signes en se reportant aux figures 40, 42 et 43.

Il est d'abord évident que si je me donne un arc, son cosinus et son sinus étant parfaitement déterminés, le signe à donner au radical l'est aussi, puisque $\sigma\sqrt{1 - y^2}$ doit remplacer l'une des lignes trigonométriques.

Mais si je me donne $\sin x$, l'arc n'est pas complètement déterminé ; les arcs qui correspondent au même sinus se groupent en deux séries qui admettent des dérivées égales et de signes contraires. L'indétermination est donc réelle, et le symbole σ doit subsister.

On trouve les mêmes valeurs absolues pour dx, que y soit un cosinus ou un sinus, parce que c'est la même courbe décalée qui représente les deux fonctions : les variations de la fonction x à partir d'un point donné ne dépendent point de ce décalage.

Tangente, cotangente.

57. Définition de la tangente et de la cotangente.

1°. — Soit A l'extrémité de l'arc dont l'origine est le point O ; prolongeons le rayon AC jusqu'à sa rencontre avec les droites Δ

et Δ' tangentes au cercle aux points O et O'. Nous appellerons *tangente* de l'arc $\overline{OA}$ la longueur $\overline{O\tau}$, *cotangente* du même arc la longueur $O\gamma$.

La *tangente* est positive par convention quand le point τ est au-dessus de la droite D, négative quand il est au-dessous. La *cotangente* est positive quand le point γ est à droite de D', négative quand il est à gauche.

Les triangles semblables donnent :

$$\overline{O\tau} = \frac{\overline{MA}}{\overline{CM}}\overline{CO}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tag{1}$$

$$\overline{O'\gamma} = \frac{\overline{NA}}{\overline{CN}}\overline{CO'}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}. \tag{2}$$

On vérifiera que les relations (1) et (2), qui définissent la tangente

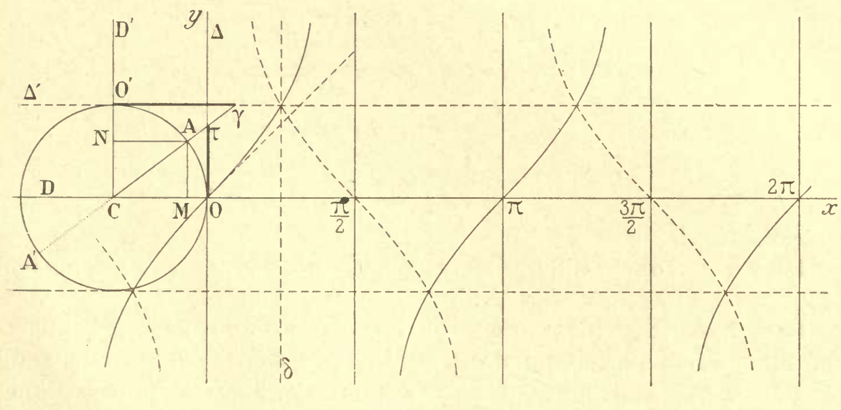


Fig. 46.

et la cotangente en fonction du sinus et du cosinus, sont exactes en grandeur et en signe, quelle que soit la position du point A sur la circonférence.

Les arcs terminés en A ou au point diamétralement opposé A ont même tangente et même cotangente; d'où la relation :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi + x), \qquad \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(\pi + x).$$

La période de ces fonctions est donc π.

2°. — Le fonction $y = \operatorname{tg} x$ est nulle pour $x = 0$. Au voisinage de $x = 0$, la courbe se confond avec la bissectrice des axes. En effet, $\sin x$ se confond avec x, et $\cos x$ est quasiment invariable et égal à l'unité.

La tangente de l'arc x devient égale à l'unité pour $x = \pi : 4$. Elle croît indéfiniment quand on s'approche de $\pi : 2$. Les deux droites D' et Δ étant parallèles, la tangente est plus grande que

toute valeur fixée à l'avance pour $x = \pi : 2$; on dit qu'elle est infinie; on pose $\operatorname{tg}(\pi : 2) = \infty$.

Deux droites parallèles peuvent être considérées comme se coupant à l'infini à l'un ou l'autre de leurs bouts. On peut donc écrire aussi bien $\operatorname{tg}(\pi : 2) = -\infty$. Ce ne sont là que des façons de parler commodes pour généraliser les énoncés.

Dès que l'arc est supérieur à $\pi : 2$, la tangente reprend une valeur bien déterminée, très grande et négative; puis sa valeur absolue diminue pour redevenir nulle quand l'arc atteint la valeur π. La tangente à la courbe représentative est la bissectrice des axes. Comme nous savons que la période de la fonction $\operatorname{tg} x$ est π, nous obtiendrons la suite de la courbe indéfinie en déplaçant le morceau que nous venons de construire, de $k\pi$ parallèlement à l'axe des abscisses.

3°. — On vérifiera de même que $\operatorname{cotg} x$ est positive et très grande pour toute valeur de x positive et voisine de 0; elle diminue quand x croît. Elle coupe $\operatorname{tg} x$ sur la droite Δ' d'ordonnée 1 pour $x = \pi : 4$. Elle s'annule pour $x = \pi : 2$; la tangente à la courbe représentative est alors bissectrice des axes.

Pour $x > \pi : 2$, $\operatorname{cotg} x$ devient négative; sa valeur absolue croît indéfiniment quand x s'approche de π. Pour $x = \pi$, la cotangente n'est plus définie; pour généraliser les énoncés, on pose :

$$\operatorname{cotg} \pi = \pm \infty.$$

4°. — Les courbes qui représentent $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ sont symétriques par rapport aux verticales d'abscisses :

$$k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

comme il résulte de la relation :

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

5°. — En définitive, la fonction $\operatorname{tg} x$ est complètement définie par la fonction $\sin x$, puisque $\cos x$ n'est qu'un sinus décalé. La fonction $\operatorname{cotg} x$ est l'inverse de $\operatorname{tg} x$. Pourtant on ne se contente pas de la fonction $\sin x$ qui, à la rigueur, suffit à tout, parce que, dans les applications, la combinaison $\sin x : \cos x$ et son inverse se présentent fréquemment. Il est bon d'en connaître à l'avance les propriétés et d'en avoir dressé des tables numériques.

6°. — Un arc donné par sa tangente n'est défini qu'à un multiple de π près; ses sinus et cosinus ne sont donc donnés qu'au signe près (fig. 46). On a :

$$\sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \qquad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

58. Table des tangentes et cotangentes.

Angles	Tangentes	Cotangentes	Angles	Tangentes	Cotangentes	Angles	Tangentes	Cotangentes
1	0,0175	57,2900	31	0,6009	1,6643	61	1,8040	0,5543
2	0349	28,6363	32	6249	1,6003	62	1,8807	5317
3	0524	19,0811	33	6494	1,5399	63	1,9626	5095
4	0699	14,3007	34	6745	1,4826	64	2,0504	4877
5	0875	11,4301	35	7002	1,4281	65	2,1445	4663
6	1051	9,5144	36	7265	1,3764	66	2,2460	4452
7	1228	8,1443	37	7536	1,3270	67	2,3559	4245
8	1405	7,1154	38	7813	1,2799	68	2,4751	4040
9	1584	6,3138	39	8098	1,2349	69	2,6051	3839
10	1763	5,6713	40	8391	1,1918	70	2,7475	3640
11	1944	5,1446	41	8693	1,1504	71	2,9042	3443
12	2126	4,7046	42	9004	1,1106	72	3,0777	3249
13	2309	4,3315	43	9325	1,0724	73	3,2709	3057
14	2493	4,0108	44	9657	1,0355	74	3,4874	2867
15	2679	3,7321	45	1,0000	1,0000	75	3,7321	2679
16	2867	3,4874	46	1,0355	0,19657	76	4,0108	2493
17	3057	3,2709	47	1,0724	9325	77	4,3315	2309
18	3249	3,0777	48	1,1106	9004	78	4,7046	2126
19	3443	2,9042	49	1,1504	8693	79	5,1446	1944
20	3640	2,7475	50	1,1918	8391	80	5,6713	1763
21	3839	2,6051	51	1,2349	8098	81	6,3138	1584
22	4040	2,4751	52	1,2799	7813	82	7,1154	1405
23	4245	2,3559	53	1,3270	7536	83	8,1443	1228
24	4452	2,2460	54	1,3764	7265	84	9,5144	1051
25	4663	2,1445	55	1,4281	7002	85	11,4301	0875
26	4877	2,0504	56	1,4826	6745	86	14,3007	0699
27	5095	1,9626	57	1,5399	6494	87	19,0811	0524
28	5317	1,8807	58	1,6003	6249	88	28,6363	0349
29	5543	1,8040	59	1,6643	6009	89	57,2900	0175
30	5774	1,7321	60	1,7321	5774	90	∞	0

59. Différentielles de la tangente et de la cotangente.

1°. — Partons de la relation :

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et traitons $\operatorname{tg} x$ comme une fonction composée (§ 9) :

$$dy = d \operatorname{tg} x = \frac{d \sin x}{\cos x} + \sin x \, d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = dx - \frac{\sin x}{\cos^2 x} d \cos x,$$

$$dy = dx + \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

La pente $dy : dx$ est toujours positive, ce qui est évident d'après la figure 46. Pour que la fonction puisse croître toujours, il faut que périodiquement il existe une discontinuité qui diminue brusquement sa valeur. C'est ce qui arrive pour toutes les valeurs de l'arc qui annulent les cosinus.

2°. — Partons de la relation :

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

et traitons $\operatorname{cotg} x$ comme une fonction composée :

$$dy = d \operatorname{cotg} x = \frac{d \cos x}{\sin x} + \cos x \, d \frac{1}{\sin x} = -dx - \frac{\cos x}{\sin^2 x} d \sin x,$$

$$dy = -dx - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

La pente $dy : dx$ est toujours négative. Mêmes remarques que plus haut.

60. Fonctions inverses : arctangente, arccotangente.

1°. — Considérons les fonctions inverses :

$$x = \operatorname{arctg} y, \qquad x = \operatorname{arccotg} y;$$

x est l'arc dont y est la tangente ou la cotangente; x est évidemment une fonction *multiforme* de y. On a :

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad dy = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = (y^2 + 1) dx;$$

$$dx = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \qquad dy = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = -(1 + y^2) dx;$$

$$dx = -\frac{dy}{1 + y^2}.$$

Pas d'ambiguïté sur les signes, car nous savons que la tangente et l'arc varient toujours dans le même sens, que la cotangente et l'arc varient toujours en sens contraires.

2°. — Voici une formule intéressante :

Soit : $$y = \operatorname{tg} x, \qquad y' = \operatorname{tg} x'.$$

On a : $$\operatorname{tg}(x + x') = \frac{\sin(x + x')}{\cos(x + x')} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x'}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x'} = \frac{y + y'}{1 - yy'}.$$

$$x + x' = \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} y' = \operatorname{arctg} \frac{y + y'}{1 - yy'}.$$

$$d \operatorname{arctg} \frac{y + y'}{1 - yy'} = \frac{dy}{1 + y^2} + \frac{dy'}{1 + y'^2}.$$

On établira aisément des formules analogues pour l'arccotangente.

Sécante, cosécante.

61. Définition de la sécante et de la cosécante.

Reprenons la figure 46. Soit A l'extrémité de l'arc x. Nous poserons :

$$\text{séc}\, x = \overline{\mathrm{C}\tau}, \qquad \text{coséc}\, x = \overline{\mathrm{C}\gamma}.$$

Ces nouvelles fonctions sont conventionnellement positives quand la droite qui les définit passe par l'extrémité de l'arc. Ainsi la

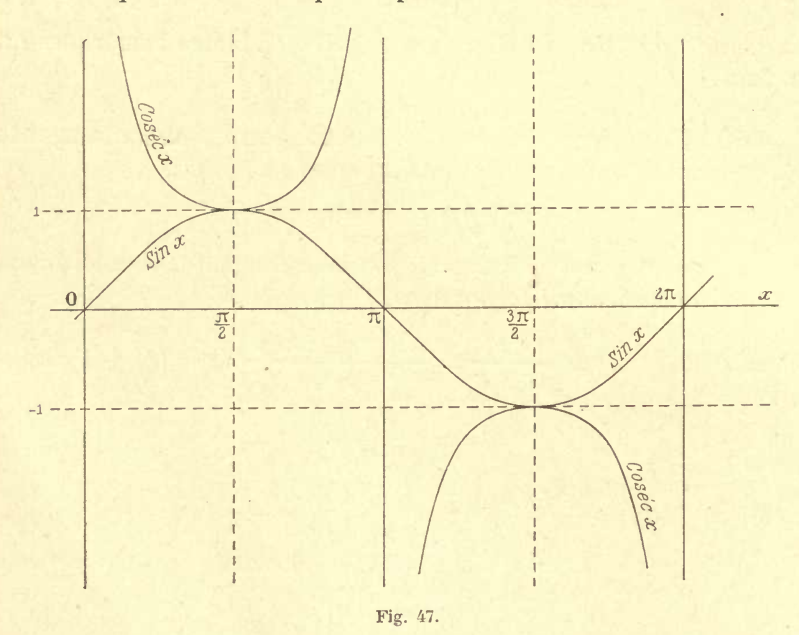


Fig. 47.

sécante *comme le cosinus* est positive dans les quadrants 1 et 2, négative dans les quadrants 3 et 4. On a :

$$\frac{\overline{\mathrm{C}\tau}}{\overline{\mathrm{CA}}} = \frac{\overline{\mathrm{CO}}}{\overline{\mathrm{CM}}}, \qquad \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\frac{\overline{\mathrm{C}\gamma}}{\overline{\mathrm{CA}}} = \frac{\overline{\mathrm{CO'}}}{\overline{\mathrm{CN}}}, \qquad \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Comme le cosinus n'est qu'un sinus décalé de $\pi : 2$ parallèlement aux abscisses, la sécante n'est qu'une cosécante décalée de $\pi : 2$. Elles seront donc représentées par les mêmes courbes.

On voit dans la figure 47 une sinusoïde et la cosécantoïde correspondante. Les deux courbes sont tangentes pour les arcs multiples impairs de $\pi : 2$; pour les multiples pairs, le sinus s'annule, la cosécante croît indéfiniment. Comme le sinus change alors de signe,

la cosécante passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, ou de $-\infty$ à $+\infty$. La courbe est asymptote aux verticales qui correspondent à ces abscisses.

Nous signalons seulement ces fonctions circulaires; *on ne s'en sert jamais*, du moins en France. Aussi nous n'en donnons pas de tables. Au besoin on les calculera, à partir de la table des sinus, à l'aide d'une table des inverses.

Fonctions usuelles construites avec les fonctions circulaires fondamentales.

62. Étude de la fonction $\sin x : x$.

1°. — Nous connaissons les valeurs de $\sin x$ en fonction de x; nous pouvons donc calculer les quotients $\sin x : x$ et construire la

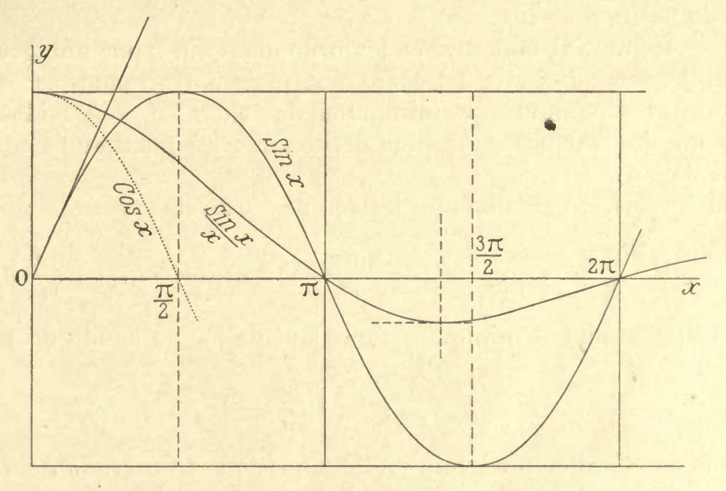


Fig. 48.

courbe représentative point par point. La figure 48 représente le résultat du calcul.

Il est d'abord évident que les courbes $\sin x$ et $\sin x : x$ ont leurs zéros pour les mêmes valeurs de x, la valeur $x=0$ exceptée.

Pour $x=0$, le quotient $\sin x : x$ se présente sous la forme $0:0$; évidemment cela ne signifie quelque chose que conventionnellement. Mais nous savons que pour de petites valeurs de x, $\sin x$ est très sensiblement égal à x, et d'autant plus voisin de x que x est plus petit.

Nous admettrons donc comme évident que *la limite du quotient* $\sin x : x$ *est l'unité, quand x s'annule.*

Nous pouvons dire la même chose en d'autres termes. D'une manière générale nous avons :

$$d \sin x = \cos x \, dx.$$

Au voisinage de $x = 0$, on a sensiblement :

$$dx = x, \qquad d \sin x = \sin x - \sin 0 = \sin x.$$

D'où enfin sensiblement : $\sin x : x = \cos x$.

Cette relation ne s'applique qu'au voisinage immédiat de $x = 0$. Nous démontrerons (§ 257) les relations plus approchées :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2};$$

d'où :
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} = \cos x + \frac{x^2}{3}.$$

La courbe que nous construisons reste au-dessus de la cosinusoïde pour de petits arcs (fig. 48).

2°. — Comme il faut diviser les ordonnées $\sin x$ par une grandeur qui croît avec x (ici elle est égale à x, mais notre remarque est plus générale), les maximums et minimums de $\sin x : x$ ont évidemment lieu pour des valeurs de x plus petites que les maximums et minimums de $\sin x$.

Pour préciser, calculons la dérivée de $y = \sin x : x$.

$$dy = d\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x} dx - \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{1}{x}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right) dx.$$

Les maximums et minimums sont fournis par la condition :

$$\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \operatorname{tg} x = x.$$

Nous étudierons plus loin cette équation *transcendante* (§ 66). Nous montrerons que les valeurs de x qui y satisfont, sont :

$$0, \qquad \frac{3\pi}{2} \cdot 0{,}96, \qquad \frac{5\pi}{2} \cdot 0{,}98, \qquad \frac{7\pi}{2} \cdot 0{,}99, \qquad \frac{9\pi}{2}, \ldots$$

La différence des abscisses des maximums et minimums des deux courbes est d'abord considérable $(\pi : 2)$; elle tend rapidement vers 0.

63. Table des fonctions $y = \sin x : x$ **et** $y^2 = (\sin x : x)^2$.

Voici les tables des fonctions $\sin x : x$ et $(\sin x : x)^2$ qui interviennent souvent en Optique. Nous laissons au lecteur le soin de construire la courbe représentative de la seconde.

Les valeurs de x choisies correspondent à des multiples de 15°.

Les fonctions y et y^2 sont multipliées par le facteur 10^4.

	x	x		$x+2\pi$		$x+4\pi$	
		y	y^2	y	y^2	y	y^2
0°	0	10000	10000	0	0	0	0
15°	0,262	9889	9774	396	16	202	4
30°	0,524	9546	9119	735	54	382	15
45°	0,785	9003	8105	1001	100	528	28
60°	1,047	8270	6839	1183	140	637	41
75°	1,309	7379	5445	1274	162	695	47
90°	1,571	6366	4053	1274	162	709	50
105°	1,832	5271	2778	1191	142	671	45
120°	2,094	4135	1710	1035	107	589	35
135°	2,356	3001	901	819	67	474	22
150°	2,618	1910	365	507	26	329	11
165°	2,880	899	81	282	8	167	3
180°	3,142	0	0	0	0	0	0
195°	3,403	—760	58	—267	7	—162	3
210°	3,665	1364	186	503	25	309	10
225°	3,937	1801	324	692	48	429	18
240°	4,189	2067	427	828	69	516	27
255°	4,451	2170	471	900	81	567	32
270°	4,712	2122	450	909	83	578	33
285°	4,974	1942	377	858	74	552	30
300°	5,236	1654	274	752	57	486	24
315°	5,498	1286	165	600	36	391	15
330°	5,760	868	75	416	17	273	7
345°	6,021	430	18	210	4	139	2

64. Résolution de l'équation $\sin x = ax$.

1°. — Les équations de cette nature portent le nom de *transcendantes*, par opposition avec les équations *algébriques* dont il est parlé au Chapitre II. Résoudre les équations transcendantes, c'est, comme précédemment, chercher une valeur de la variable qui, substituée dans l'équation, la transforme en une identité. *Il n'y a d'autre méthode générale que de tâtonner; mais il faut apprendre à diriger les tâtonnements.*

Considérons les deux courbes (fig. 49) :

$$y = \sin x, \qquad z = ax.$$

Nous savons les construire l'une et l'autre; les racines de l'équation à résoudre sont données par leurs points d'intersection. En effet, ils sont définis par la condition que, pour la même abscisse x, les ordonnées soient les mêmes :

$$y = z, \qquad \sin x = ax.$$

Menons donc (fig. 49) des droites de plus en plus inclinées

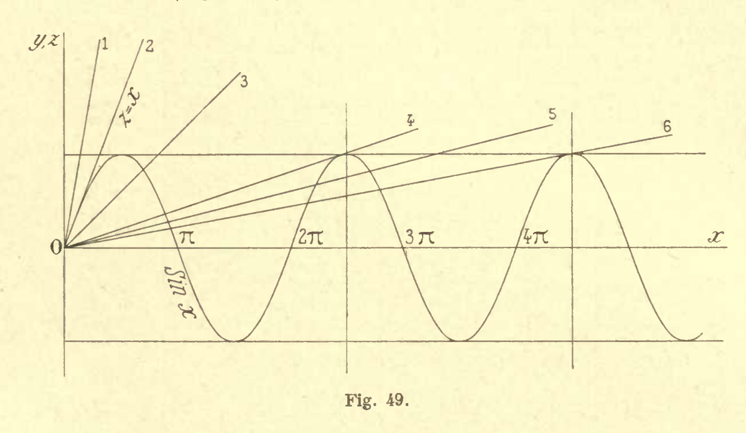


Fig. 49.

1, 2, 3, ...; étudions comment elles coupent la sinusoïde.

Mais une remarque essentielle est nécessaire. Dans la sinusoïde normale, c'est-à-dire pour laquelle les échelles des abscisses et des ordonnées sont les mêmes, la période en abscisses λ (§ 51) doit être 2π fois l'ordonnée maxima. Il n'en est pas ainsi sur notre figure; la période λ est à l'ordonnée maxima dans le rapport $12 : 5 = 2{,}4$. C'est dire que toutes les ordonnées ont été multipliées par :

$$2\pi : 2{,}4 = 2{,}61.$$

On ne l'oubliera pas dans la construction des droites. Ainsi la droite $y = x$, qui doit être tangente à la sinusoïde à l'origine, a effectivement pour équation : $y = 2{,}61x$.

Raisonnons comme si la figure 49 était normale.

2°. — Ceci posé, pour toutes les droites dont le paramètre a est plus grand que 1, seule la valeur $x = 0$ satisfait à l'équation.

Il n'y a qu'une racine.

Il semble d'abord qu'il en soit de même pour la droite $y = x$. Mais si la racine $x = 0$ existe encore seule, elle jouit de propriétés particulières. Non seulement la droite $y = x$ est tangente à la sinusoïde, mais encore c'est une tangente d'inflexion; nous disons (§ 33) qu'il y a trois racines égales.

Inclinons la droite davantage (droite 3) : il n'y a plus que deux

racines simples : $x=0$ et une autre comprise entre 0 et π. Jusqu'au moment où la droite 4 devient tangente à la seconde boucle de la sinusoïde ; il y a alors deux racines simples $(x_0=0,\ x_1<\pi)$ et une racine double. Pour la droite 5, nous avons quatre racines simples. Pour la droite 6, quatre racines simples et une racine double. Et ainsi de suite. Nous nous bornons aux racines positives.

3°. — On peut faire la même discussion au moyen de la figure 48. Nous devons satisfaire à l'équation :

$$a=\frac{\sin x}{x};$$

cela revient à trouver les intersections de la courbe $y=\sin x : x$, et de la droite *horizontale* $z=a$.

Plaçons cette droite suffisamment haut et faisons-la descendre.

Elle ne commence à rencontrer la courbe $y=\sin x : x$, que pour $a=1$. Elle lui est alors tangente. Abaissons-la davantage, elle coupe la courbe une fois. Puis elle devient tangente à une boucle non tracée, qui se trouve comprise entre les abscisses 2π et 3π. Puis elle coupe cette boucle en deux points. Et ainsi de suite : nous retrouvons les résultats précédents.

4°. — Il y a cependant un désaccord dont la raison est très intéressante.

La première méthode nous donne toujours une racine pour $x=0$, quel que soit a. Manifestement la seconde méthode n'en donne pas. Cela tient à ce que le rapport $\sin x : x$ n'a réellement pas une valeur déterminée pour $x=0$; il n'a la valeur 1 que conventionnellement, comme limite. Étant quelconque, il peut être représenté par l'axe Oy tout entier : il est donc coupé par une horizontale, quelle que soit sa hauteur.

5°. — Déterminer dans la première méthode les valeurs de a pour lesquelles les droites sont tangentes aux boucles successives de la sinusoïde, revient à déterminer dans la seconde méthode les ordonnées maxima de la courbe $\sin x : x$. Les abscisses de tangence sont (§ 62) fournies par la condition :

$$\operatorname{tg} x=x.$$

65. Étude de la fonction $\operatorname{tg} x : x$.

Pour $x=0$, $\operatorname{tg} x : x$ se présente sous la forme $0 : 0$; la fonction n'existe que par convention. Nous lui donnons la valeur limite que prend le quotient $\operatorname{tg} x : x$ quand x, d'abord très petit, s'annule.

Nous devons répéter ce que nous avons dit à propos du sinus. Nous avons :

$$\lim\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)_{x=0}=\lim\left(\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\right)_{x=0}=\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

puisque $\cos x=1$, pour $x=0$.

Autrement dit, on a sensiblement pour de petits arcs (§ 62) :

$$\operatorname{tg} x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) : \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = x + \frac{x^3}{3}.$$

D'où : $$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3}, \qquad \lim\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)_{x=0} = 1.$$

Les deux courbes $y = \operatorname{tg} x$, $Y = \operatorname{tg} x : x$, se coupent pour $x = 1$; cet arc correspond à un angle de 57° 17′ 45″ (*radian*).

Quand x s'approche de $\pi : 2$, la tangente et, par suite, son

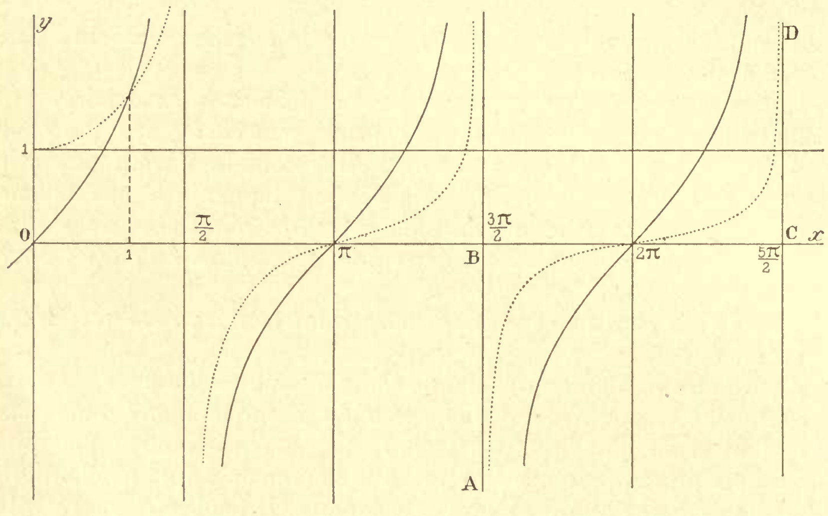


Fig. 50.

quotient par x augmentent indéfiniment. Ceci est vrai pour tous les multiples impairs de $\pi : 2$; la courbe $\operatorname{tg} x : x$ a les mêmes asymptotes que la courbe $\operatorname{tg} x$.

Tandis que la courbe $\operatorname{tg} x$ est symétrique par rapport aux points d'ordonnées nulles et d'abscisses π, 2π, ..., il n'en est plus de même de $\operatorname{tg} x : x$. Après ces points elle se rapproche de l'axe des abscisses plus qu'avant.

Pour x très grand, la courbe $\operatorname{tg} x : x$ tend vers la forme ABCD; l'ordonnée est partout quasiment nulle, sauf tout près des asymptotes où elle croît très rapidement. Pour ces asymptotes mêmes, sa valeur dépasse toute valeur fixée à l'avance.

66. Résolution de l'équation $\operatorname{tg} x = ax$.

Pour résoudre cette équation, nous emploierons le procédé du § 64.

Posons $y = \operatorname{tg} x$, $z = ax$; déterminons les points d'intersection de ces deux courbes.

Il est évident (fig. 51) qu'ils sont toujours en nombre infini. Outre la racine $x = 0$, il existe des racines qui se rapprochent des valeurs $x = (2k+1)\pi : 2$, d'autant plus que a est plus grand (droite plus rapprochée de la verticale) et que le numéro d'ordre k de la racine considérée est lui-même plus grand.

On utilise fréquemment en Physique les racines de l'équation

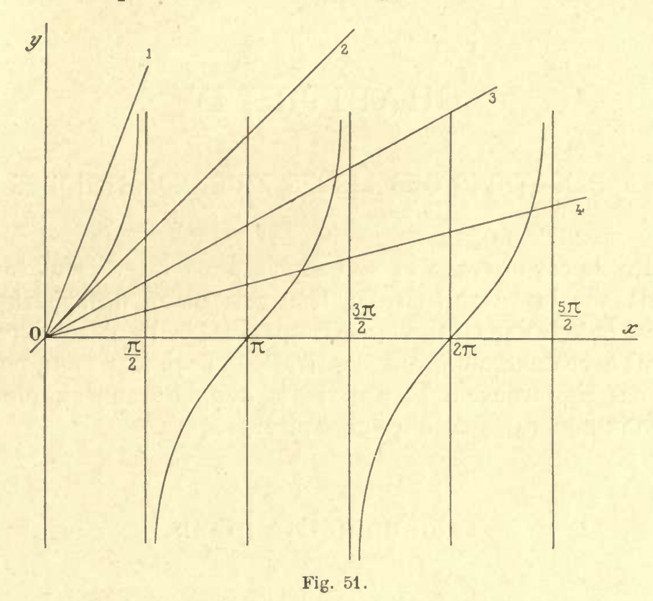


Fig. 51.

$\operatorname{tg} x = x$. Elles résultent de l'intersection de la courbe $y = \operatorname{tg} x$, par la bissectrice des axes, ou plus généralement (si les échelles ne sont pas les mêmes pour les abscisses et les ordonnées) par la tangente à l'origine de cette courbe. Les voici :

$$0, \quad \frac{3\pi}{2} \cdot 0{,}96, \quad \frac{5\pi}{2} \cdot 0{,}98, \quad \frac{7\pi}{2} 0{,}99, \quad \frac{9\pi}{2}, \ldots$$

Elles sont très voisines des valeurs approchées, comme il est du reste évident d'après la figure 51.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

Le cadre de cet ouvrage et son esprit nous interdisent tout développement sur la résolution des triangles plans ou sphériques. Les personnes (géodésiens, officiers de marine, ...) qui se livrent habituellement à cet exercice, ont des traités spéciaux ; pour les autres, l'intérêt est rigoureusement nul. Nous rappellerons simplement les propositions générales et d'usage courant.

Trigonométrie plane.

67. Propriétés des angles d'un triangle.

1°. — Soit ABC un triangle quelconque, dont les côtés sont a, b, c, et les hauteurs correspondantes α, β, γ (fig. 52).

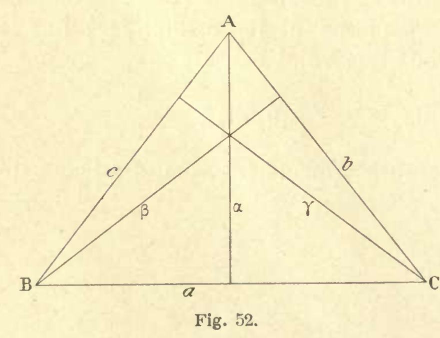


Fig. 52.

1°. — On a :

$$\alpha = b \sin C = c \sin B\ ;$$

d'où :

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}, \qquad \text{(I)}$$

par analogie.

Les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

2°. — On a :

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B, \\ b &= c \cos A + a \cos C, \qquad \text{(II)} \\ c &= a \cos B + b \cos A. \end{aligned}$$

Ces relations expriment que, par exemple, le côté a est égal à la somme des projections des côtés b et c sur le côté a.

3°. — Dans la première relation, remplaçons cos C et cos B par leurs valeurs tirées des deux autres. Il vient :

$$a = b\frac{b - c\cos A}{a} + c\frac{c - b\cos A}{a},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

et par analogie :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \qquad \text{(III)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

4°. — Posons : $2p = a + b + c.$

On tire de la première équation (III) :

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc} = \frac{(p - b)(p - c)}{bc},$$

$$\frac{1 + \cos A}{2} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc} = \frac{p(p - a)}{bc}.$$

D'où (§ 48, *3°*) :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}, \qquad \text{(IV)}$$

et quatre autres formules par analogie.

68. Aire du triangle et du parallélogramme.

1°. — On a :

$$2S = a\alpha = ab\sin C = bc\sin A,$$

$$2S = bc\sin A = ca\sin B = ab\sin C, \qquad \text{(V)}$$

On obtient l'aire du parallélogramme construit sur deux côtés du triangle, en doublant les résultats précédents.

2°. — De la formule (§ 48, *1°*) : $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$

jointe aux relations (IV), on tire :

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \qquad \text{(VI)}$$

3°. — S peut s'exprimer en fonction d'un côté et des angles adjacents :

$$2S = bc\sin A = c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin C} = c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin(A + B)}. \qquad \text{(VII)}$$

Trigonométrie sphérique.

69. Triangles sphériques ; triangles supplémentaires.

1°. — On appelle *triangle sphérique* une portion ABC de sphère limitée par des arcs de grands cercles a, b, c. C'est la figure tracée sur la sphère par trois plans a, b, c, qui passent par le centre. Les arcs a, b, c, s'appellent les *côtés* du triangle ; nous les supposerons

toujours moindres qu'un demi grand cercle. Les angles dièdres, A, B, C, sont les *angles* du triangle.

Nous pouvons toujours prendre pour unité le rayon de la sphère sur laquelle se trouve le triangle sphérique; les longueurs des arcs a, b, c, sont alors mesurées par des nombres qui sont *les arcs au sens trigonométrique du mot.*

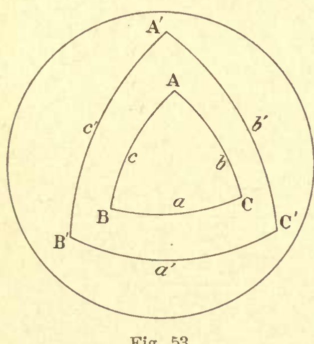


Fig. 53.

2°. — Par le centre de la sphère, menons trois droites perpendiculaires aux plans a, b, c. Elles coupent la sphère en six points, deux à deux placés aux extrémités d'un diamètre. En choisissant convenablement les extrémités A', B', C', nous pouvons former un nouveau triangle dont les côtés sont encore inférieurs à un demi grand cercle et qu'on appelle *triangle polaire* du premier; réciproquement, le premier est polaire du second. On vérifiera immédiatement que les côtés de l'un des triangles sont supplémentaires des angles de l'autre :

$$a' + A = a + A' = \pi,$$
$$b' + B = b + B' = \pi,$$
$$c' + C = c + C' = \pi.$$

Donc toute relation démontrée entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique quelconque, devant s'appliquer également bien à l'un et l'autre triangles polaires, subsiste quand on y remplace les angles par les suppléments des côtés, et les côtés par les suppléments des angles.

70. Relations fondamentales.

Soit ABC un triangle sphérique (fig. 54). Menons un plan par le sommet A perpendiculairement à l'arête OA. Les droites AB' et AC' sont tangentes en A aux arcs de grands cercles c et b. On a donc par définition (voir la petite figure en haut et à droite) :

$$\overline{AB'} = \text{tg}\, c, \qquad \overline{OB'} = \text{séc}\, c = 1 : \cos c,$$
$$\overline{AC'} = \text{tg}\, b, \qquad \overline{OC'} = \text{séc}\, b = 1 : \cos b.$$

Dans les triangles AB'C' et OB'C' on a :

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\, \overline{AB'} \,.\, \overline{AC'} \,.\, \cos A$$
$$= \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 - 2\, \overline{OB'} \,.\, \overline{OC'} \,.\, \cos a. \qquad (1)$$

Dans les triangles rectangles AC'O, AB'O, on a :

$$\overline{AO} = 1\,; \qquad \overline{OC'}^2 = \overline{AC'}^2 + 1, \qquad \overline{OB'}^2 = \overline{AB'}^2 + 1.$$

Substituant dans (1), changeant les signes, il vient :

$$2 + 2\, \text{tg}\, c\, \text{tg}\, b \cos A = 2 \cos a : (\cos b \,.\, \cos c).$$

D'où enfin :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et par analogie : $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$ (I)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

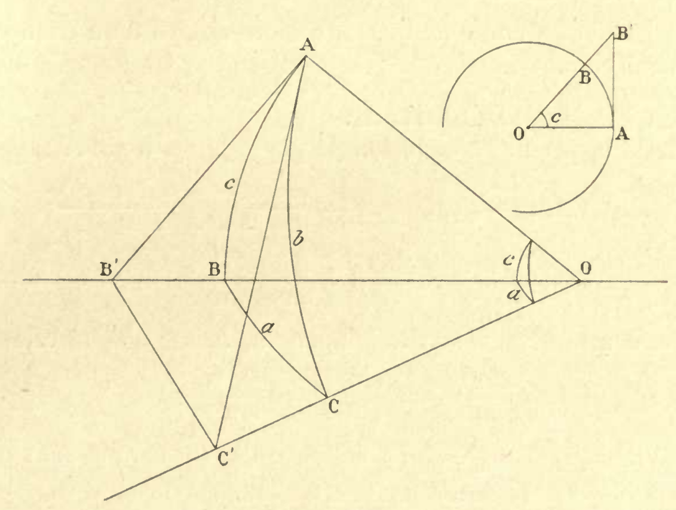


Fig. 54.

Appliquons ces relations au triangle polaire (§ 69) :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \quad \text{(II)}$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Remarque I.

Supposons les arcs a, b, c, infiniment petits ; le triangle sphérique devient plan. Admettons (§ 62) qu'on puisse poser (aux infiniment petits du second ordre près, § 10) :

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2}, \qquad \sin a = a.$$

La première des formules (I) s'écrit :

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + b\,c \cos A\,;$$

d'où, en ne conservant que les infiniment petits du second ordre :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A.$$

Cette formule, applicable à un triangle plan infiniment petit, l'est à tout triangle plan semblable. Nous retrouvons donc la première formule (III) du § 67.

Remarque II.

Cherchons ce que deviennent les formules II quand a, b, c, sont infiniment petits. Il faut poser $\cos a = 1$:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C = -\cos(B + C);$$
$$A + B + C = \pi.$$

Elles signifient donc que la somme des angles d'un triangle plan vaut deux droits.

71. Propriété des sinus.

Résolvons la première équation (I) par rapport à sin A :

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Le second membre est symétrique en a, b, c ; d'où la relation :

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}.$$

Comme il s'agit d'angles inférieurs à π dont les sinus sont positifs, on a :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \qquad \text{(III)}$$

Les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

Remarque.

Si les arcs a, b, c, sont infiniment petits, le triangle devient plan. On peut confondre ces arcs et leurs sinus ; d'où :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Cette formule, applicable à un triangle plan infiniment petit, l'est à tout triangle plan semblable. Nous retrouvons la formule I du § 67.

72. Autres relations.

Partons des relations (I) :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

D'où : $\cos a = \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin c \cos A,$

$$\cos a \sin^2 b = \sin a \cos b \sin b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Divisons par $\sin a \sin b$:

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin c \cos A : \sin a.$$

Utilisons les formules (III), il vient enfin :

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A,$$

et par analogie : $\text{cotg}\, a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \,\text{cotg}\, A$;

$$\text{cotg}\, b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \,\text{cotg}\, B,$$
$$\text{cotg}\, b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \,\text{cotg}\, B ; \qquad \text{(IV)}$$
$$\text{cotg}\, c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \,\text{cotg}\, C,$$
$$\text{cotg}\, c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \,\text{cotg}\, C.$$

73. Triangles rectangles.

Nous poserons $A = \pi : 2$ dans les relations précédentes. On trouve les dix formules :

$$\cos a = \cos b \cos c, \qquad \cos a = \text{cotg}\, B \,\text{cotg}\, C ;$$
$$\sin b = \sin a \sin B, \qquad \sin c = \sin a \sin C ;$$
$$\text{tg}\, b = \text{tg}\, a \cos C, \qquad \text{tg}\, c = \text{tg}\, a \cos B ;$$
$$\text{tg}\, b = \sin c \,\text{tg}\, B, \qquad \text{tg}\, c = \sin b \,\text{tg}\, C ;$$
$$\cos B = \sin C \cos b, \qquad \cos C = \sin B \cos c.$$

Le lecteur cherchera ce que deviennent ces formules quand les arcs a, b, c, sont infiniment petits, c'est-à-dire quand le triangle rectangle devient plan.

74. Angles solides ; surface des polygones sphériques.

1°. — Soit une courbe fermée quelconque C. Une droite passe par le point O et s'appuie constamment sur la courbe : elle détermine un cône. Avec le point O comme centre, traçons une sphère dont nous prendrons le rayon pour unité; par suite, l'unité d'aire sera l'aire du carré ayant ce rayon pour côté.

On appelle *angle solide* du cône, l'aire de la portion de sphère déterminée par le cône.

Représentons-nous un parapluie fermé : l'angle solide déterminé par l'étoffe est nul. Ouvrons-le de manière que l'étoffe *supposée élastique* s'applique sur le plan normal au manche ; l'angle solide est moitié de la sphère, soit 2π. Enfin rabattons l'étoffe contre le prolongement idéal du manche, comme il advient dans la pratique par un grand vent : l'angle solide vaut l'aire de la sphère, soit 4π.

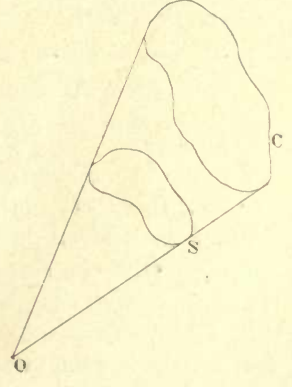


Fig. 55.

La considération des angles solides est fondamentale en Physique ; leur mesure se ramène à la mesure des aires des portions de sphère limitées par des courbes données. Voici quelques exemples.

2°. — Aire du fuseau ; angle solide d'un angle dièdre.

On appelle fuseau la portion de la surface de la sphère limitée par deux grands cercles $AB''A'$, $AC''A'$, passant par les extrémités d'un

diamètre commun AA'. Le cône correspondant est formé par les deux plans passant par ce diamètre : son sommet est en O.

L'aire S du fuseau est évidemment proportionnelle à l'angle plan du dièdre C''OB''. Cet angle est égal à l'angle que font entre elles les tangentes menées en A aux deux grands cercles.

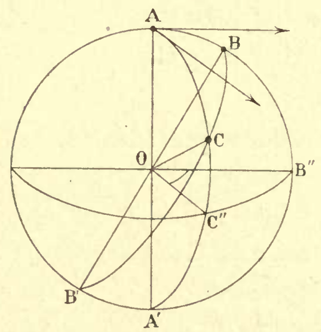


Fig. 56.

Aussi dirons-nous que *l'aire du fuseau est proportionnelle à l'angle* A.

On a : $S = kA$.

Pour $A = 2\pi$, l'aire du fuseau est égale à celle de la sphère, soit 4π.

Le coefficient de proportionnalité k se trouve ainsi déterminé :

$$k = 2, \qquad S = 2A.$$

Ainsi l'aire du fuseau est égale à deux fois son angle plan. Cela veut dire que, pour avoir cette aire, il faut multiplier par 2A l'aire du carré qui a pour côté le rayon de la sphère.

Il va de soi que A *n'est pas évalué en degrés, mais en radians.*

L'unité d'angle (radian) évaluée en degrés est 57° 17′ 45″ (§ 65).

3°. — AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE ; ANGLE SOLIDE LIMITÉ PAR UNE PYRAMIDE TRIANGULAIRE.

Considérons les trois fuseaux déterminés par les angles A, B, C, du triangle sphérique ABC. Admettons comme évident que le fuseau C peut être constitué par les triangles CAB et CA'B'. On a :

$$\text{fus A} + \text{fus B} + \text{fus C} = 1/2 \text{ sphère} + 2 \text{ aire } \overset{\frown}{ABC}.$$

D'où : $$\text{aire } \overset{\frown}{ABC} = (A + B + C) - \pi.$$

La surface d'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits (excès sphérique).

Ainsi la surface de la sphère étant 4π, la surface du triangle trirectangle (tel que serait AB''C'' si l'angle A était droit) est $\pi : 2$. D'autre part, ses trois angles sont droits ; *l'excès sphérique* est $3\pi : 2 - \pi = \pi : 2$. Le théorème est vérifié.

Il résulte de là que la somme des angles d'un triangle sphérique est toujours supérieure à π. Pour que l'excès sphérique soit nul, il faut que l'aire soit elle-même nulle : le triangle est infiniment petit et assimilable à un triangle plan (§ 70, Remarque II).

4°. — AIRE D'UN POLYGONE SPHÉRIQUE DE n CÔTÉS.

Il suffit de le décomposer en triangles sphériques pour voir que *son aire* S *est égale à la somme* I *de ses angles intérieurs diminuée de* $(n - 2)\pi$.

D'où résulte que la somme des angles intérieurs d'un polygone sphérique est toujours supérieure à celle d'un polygone plan du même

nombre de côtés. Elle ne lui devient égale que lorsque l'aire du polygone sphérique s'annule ; il est alors assimilable à un polygone plan, tracé sur le plan tangent à la sphère.

Évaluons la somme E des angles extérieurs du polygone.

On a : $S = I - (n-2)\pi$, $E + I = n\pi$; d'où : $E = 2\pi - S$.

La somme des angles extérieurs d'un polygone sphérique est égale à l'excès de 2π sur l'aire de ce polygone. Elle ne devient égale à 2π que si l'aire s'annule : le polygone est assimilable à un polygone plan tracé sur le plan tangent à la sphère.

Elle est nulle pour $S = 2\pi$; le polygone est un grand cercle.

Remarque. Si les polygones sont tracés sur une sphère de rayon R, on obtient leurs aires en multipliant par R^2 les expressions précédentes.

75. Aire des zones ; angle solide d'un cône circulaire.

On appelle *zone* une portion de sphère comprise entre deux plans parallèles qui en sont les *bases*. La distance des bases est la *hauteur* h de la zone.

1°. — L'aire d'une zone prise dans une sphère de rayon R, est $2\pi Rh$. En effet, considérons la zone de très petite hauteur limitée par les plans AA, BB (fig. 57). Nous pouvons l'assimiler à un cône tronqué.

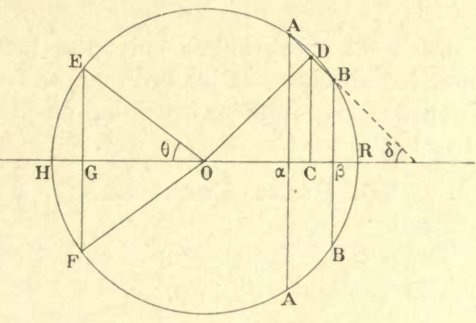


Fig. 57.

Coupons ce cône suivant une génératrice et développons-le.

Nous obtenons un fragment de couronne circulaire dont l'aire est :

$$S = \pi(\overline{A\alpha} + \overline{B\beta})\,AB = 2\pi\,\overline{DC}\,.\,AB.$$

Or : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\alpha\beta}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{DC}} = \dfrac{1}{\cos\delta}$; $\qquad S = 2\pi\,\overline{OD}\,.\,\overline{\alpha\beta} = 2\pi Rh.$ (1)

Soit maintenant une zone de hauteur finie. Par des plans parallèles aux bases, décomposons-la en zones de hauteurs $h_1, h_2, \ldots$ L'aire totale est la somme des aires de ces zones élémentaires.

D'où : $$S = 2\pi R(h_1 + h_2 + \ldots) = 2\pi Rh ;$$

h est la hauteur totale.

2°. — On appelle *calotte* une zone dont l'une des bases est un plan tangent.

L'aire de la calotte EHF est :

$$S = 2\pi R\,.\,HG = 2\pi R(\overline{OH} - \overline{OG}) = 2\pi R^2(1 - \cos\theta). \quad (2)$$

Par suite, on a pour l'angle solide d'un cône circulaire dont le demi-angle au sommet est θ :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta), \qquad (2')$$

formule fondamentale en Électricité et en Magnétisme.

3°. — Cette formule est un cas particulier d'une formule plus générale. L'aire d'une zone quelconque peut s'écrire :

$$S = 2\pi R^2(\cos\theta_0 - \cos\theta_1); \qquad (1')$$

θ_0 et θ_1 sont les *colatitudes* des cercles de base, le diamètre normal aux bases jouant le rôle de *ligne des pôles*. Quand on pose $\theta_0 = 0$, on retrouve la calotte ; la formule (1') redonne (2').

Angle d'une courbe avec les axes ou avec d'autres courbes.

Dans les paragraphes suivants, nous employons la même échelle pour les abscisses et les ordonnées. Toute modification d'échelle pour l'une des coordonnées modifie, en effet, les angles des figures.

Les axes sont rectangulaires.

76. Pente d'une courbe. Angle d'une droite avec les axes.

1°. — Nous avons défini la *pente* de la courbe ADM au point A par le quotient $dy : dx$, qui est la limite du rapport $\overline{DE} : \overline{AE}$,

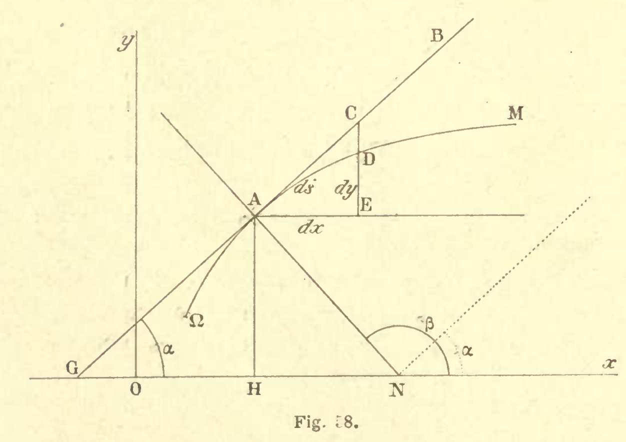


Fig. 58.

quand D se rapproche indéfiniment de A; simultanément les points C et D tendent à se confondre.

On a donc : $$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{AH}}{\overline{GH}} = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

La *pente* mesure donc la tangente de l'angle α que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x (α *n'est déterminé qu'à* π *près*). On voit la nécessité de supposer la même échelle pour les deux coordonnées : l'équation (1) n'est exacte que dans cette hypothèse.

2°. — Mesurons les arcs *sur la courbe* à partir d'une origine quelconque Ω; posons $\overline{\Omega A} = s$. Puisque les points B et C finissent par se confondre, le triangle curviligne ADE tend vers un triangle rectiligne rectangle; on a donc :

$$\lim \overline{AD}^2 = \lim \overline{AC}^2 = ds^2. \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2}$$

Est-il besoin de dire que cette équation n'est exacte qu'à la limite? Si l'on considère les quantités ds, dx, dy, non plus comme des infiniment petits (c'est-à-dire des quantités qui *tendent* vers 0), mais comme des quantités petites, même très petites, la relation (2) n'est qu'approchée. Elle l'est d'autant plus que les quantités sont plus petites.

A la limite, on a exactement (pour un choix convenable de l'angle α) :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{3}$$

En prenant le quotient et en additionnant les carrés, on retrouve bien les relations (1) et (2).

3°. — Droite.

Tout ceci est applicable à la droite :

$$ax + by + c = 0. \tag{4}$$

On a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

L'équation (4) peut donc prendre la forme :

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = d. \tag{5}$$

Identifions (4) et (5); il vient :

$$\pm\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \pm\cos\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Considérons la droite NA normale à GA. Elle fait avec Ox un angle β tel qu'on ait :

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\beta = \cos\alpha, \qquad \cos\beta = -\sin\alpha.$$

L'équation de NA a donc la forme :

$$x\sin\beta - y\cos\beta = e, \qquad \text{ou encore :} \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = e.$$

Nous avons maintenant une interprétation du § 24. Dire que pour deux droites normales, les pentes p et p' sont liées par la relation $pp' = -1$, revient à dire qu'on a :

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = -1, \qquad \text{si} \qquad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

77. Angle de deux droites; angle de deux courbes.

1°. — Soit les droites :

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0.$$

Elles font avec l'axe des x les angles α et β :

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\sin\beta = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}, \qquad \cos\beta = -\frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

D'où : $$\cos\gamma = \cos(\beta - \alpha) = \frac{bb' + aa'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

Pour que les droites soient normales, on doit avoir :

$$\cos\gamma = 0, \qquad bb' + aa' = 0,$$

relation déjà établie par une autre voie (§ 24, *4°*).

2°. — Soit à calculer l'angle γ que font les tangentes à deux courbes : $y = f_1(x)$, $y' = f_2(x')$, par exemple en un point d'intersection. On trouve immédiatement, d'après le paragraphe précédent :

$$\cos\gamma = \frac{dxdx' + dydy'}{dsds'}.$$

En particulier, si les courbes sont normales, on a :

$$dxdx' + dydy' = 0, \qquad \frac{dx}{dy}\frac{dx'}{dy'} = -1,$$

Supposons les courbes données sous la forme :

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0.$$

Différentions ces équations (§ 9) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy = 0.$$

La condition de normalité (par exemple, au point d'intersection de coordonnées x, y) est :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

78. Changement d'axes de coordonnées.

Rapportons le point P d'abord au système d'axes rectangulaires Ox, Oy, ensuite au système d'axes rectangulaires Ox', Oy', qui a même origine et fait l'angle θ avec le premier.

Projetons le parcours OAP sur Ox', puis sur Oy'; il vient :

$$\overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC}, \qquad x' = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$\overline{OD} = \overline{OF} + \overline{FD}, \qquad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \qquad (1)$$

Inversement projetons le parcours OCP sur Ox, puis sur Oy; il vient :

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OG} + \overline{GA}, & x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ \overline{OB} &= \overline{OH} + \overline{HB}, & y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta. \end{aligned} \qquad (2)$$

Il est clair que les formules (1) et (2) se déduisent les unes des

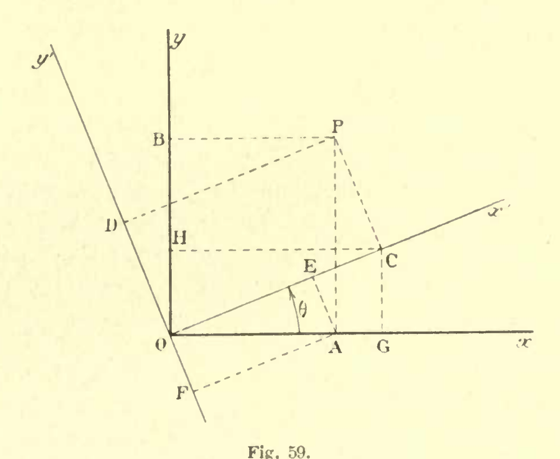


Fig. 59.

autres en remplaçant x, y, par x', y', et inversement, et en remplaçant θ par $-\theta$.

On n'oubliera pas que $\overline{OF} = -\overline{FO}$, $\overline{GA} = -\overline{AG}$.

79. Retour sur le choix des fonctions circulaires.

Nous pouvons maintenant revenir sur ce que nous disons au § 44. Chaque fois qu'il s'agira d'exprimer l'angle de deux droites, les distances d'un point à une droite, généralement les propriétés métriques des figures composées de points, de droites et de cercles, nous aurons à considérer des fonctions circulaires qui se ramènent aux sinus, cosinus, tangente et cotangente, c'est-à-dire en définitive au sinus. Il n'existe en réalité qu'une fonction circulaire à laquelle toutes les autres se réduisent.

Nous insistons sur cette conclusion, parce que la méthode est générale. Nous la retrouverions dans la théorie des fonctions elliptiques (§ 185), si le cadre de cet ouvrage nous permettait d'insister. Étant données des fonctions devant jouer un certain rôle et définies en conséquence, il s'agit toujours de déterminer combien il en existe d'essentiellement différentes, puis comment on peut ramener les autres à celles-là, qu'on prend naturellement le plus simples possible.

Coordonnées polaires.

80. Formules fondamentales.

1°. — Nous repérons chaque point A du plan : 1° par l'angle θ que fait avec une droite Ox de référence le vecteur OA qui joint l'origine O au point A; 2° par la distance $\overline{OA}$ de l'origine au point A.

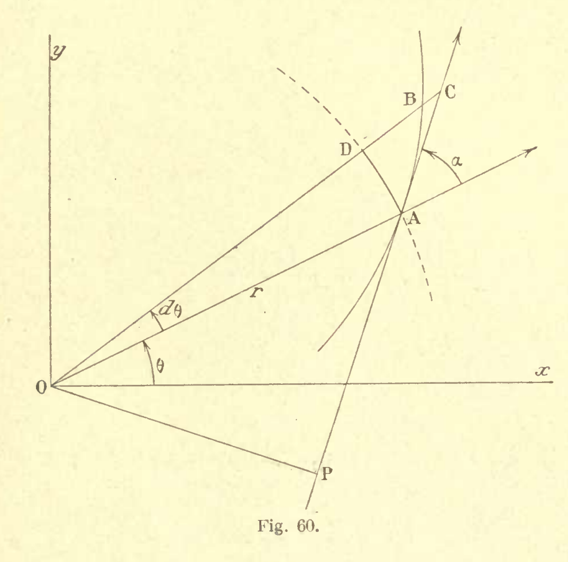


Fig. 60.

Le point B de la courbe voisin de A est repéré par un angle $\theta + d\theta$, et par une distance :

$$r + dr = \overline{OD} + \overline{DB}.$$

Les formules usuelles proviennent immédiatement de ce qu'*à la limite* le triangle curviligne ADB (formé de l'arc de cercle AD, de la droite DB et de l'arc de la courbe $\overline{AB} = ds$), triangle qui est toujours rectangle en D, devient rectiligne. La droite AC, tangente en A, finit par se confondre avec l'arc AB de courbe.

Posons : $\overline{AD} = rd\theta$, $\overline{DB} = dr$, $\overline{AB} = ds$.

2°. — Soit α l'angle que fait la tangente AC en A avec le rayon vecteur OA, angle compté positivement dans le même sens que θ, à partir du rayon vecteur vers la tangente. On a immédiatement :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{rd\theta}{dr};$$

$$\cos \alpha = \frac{dr}{ds}, \qquad \sin \alpha = \frac{rd\theta}{ds}.$$

Écrire que le rayon vecteur r est maximum ou minimum, revient à écrire que l'angle α est droit :

$$dr : d\theta = 0, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \infty.$$

3°. — Soit $r = f(\theta)$, l'équation de la courbe. Posons que r s'annule pour $\theta = \theta_0$. Cherchons quelle est alors la direction de la tangente à la courbe, ou, ce qui revient au même, la valeur de l'angle α.

Un changement de la droite de référence (§ 34, *2°* : changement de variable : $\Theta = \theta - \theta_0$) permet de poser que r s'annule pour $\Theta = 0$. Nous apprendrons plus tard à développer $f(\Theta + \theta_0)$ en série suivant les puissances croissantes de la variable Θ. Au voisinage de $\Theta = 0$, ne conservons que la puissance inférieure du développement dont la valeur l'emporte infiniment sur celles des autres termes (§ 36, *3°*). Posons donc, *conformément à notre hypothèse :*

$$r = a\Theta^n; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{rd\Theta}{dr} = \frac{\Theta}{n}.$$

Donc α, est nul pour $\Theta = 0$. *Lorsque le rayon vecteur s'annule pour une valeur θ_0 de θ, la tangente à la courbe se confond avec la direction $\theta = \theta_0$ de ce rayon vecteur.*

4°. — La longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente est :

$$p = \overline{OP} = r \sin\alpha = \frac{r^2 d\theta}{ds}.$$

81. Spirale d'Archimède; sous-normale.

1°. — La spirale d'Archimède a pour équation : $r = a\theta$.

On tire de là : $\operatorname{tg}\alpha = r : a = \theta$.

La tangente de l'angle α, nulle à l'origine, croît indéfiniment. Donc la tangente à la spirale est confondue avec le rayon vecteur Ox à l'origine (§ 80, *3°*); à mesure que θ croît, l'angle α augmente et tend vers $\pi : 2$.

La spirale est naturellement indéfinie dans les deux sens, car rien n'empêche de faire varier θ de 0 à $-\infty$. On obtient une courbe symétrique de la précédente par rapport à la verticale passant au point O.

Fig. 61.

2°. — Soit OA le rayon vecteur du point A.

Menons la droite ON perpendiculaire sur OA, puis la normale AN à la courbe en A. Le segment $\overline{ON}$ déterminé par ces deux droites s'appelle *sous-normale*. On a généralement :

$$\overline{ON} = r \operatorname{cotg}\alpha = dr : d\theta.$$

Pour la spirale d'Archimède, la sous-normale est constante et égale à a.

3°. — Rapprochons ce résultat du précédent; nous concluons qu'à mesure que θ croît, un arc de spirale voisin de A se confond de

plus en plus exactement avec un arc de cercle de même rayon moyen $\overline{\text{NA}}$ et dont le centre est en un point N déterminé comme nous l'avons dit.

On utilise la spirale d'Archimède pour construire des *excentriques* (*courbe en cœur,* voir Mécanique, § 123).

82. Spirale hyperbolique; sous-tangente.

1°. — La spirale hyperbolique a pour équation : $r\theta = a$.

Soit A un point de la courbe. A mesure que θ diminue, r augmente.

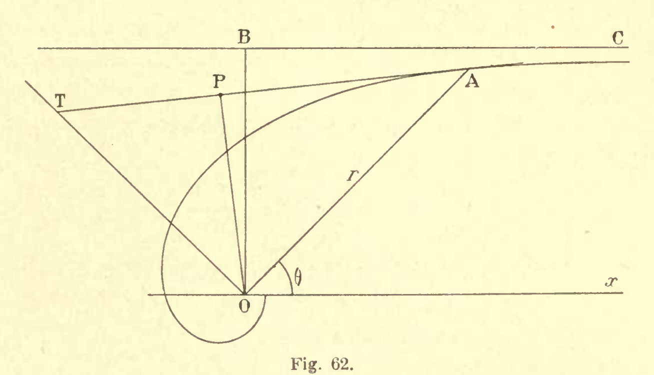


Fig. 62.

Montrons que la courbe admet une asymptote parallèle à la droite de référence Ox.

Pour cela, calculons la distance de l'origine à la tangente à la courbe. On a (§ 80, 4°) :

$$p = \overline{\text{OP}} = \frac{r^2 d\theta}{ds} = \frac{r\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+\theta^2}}.$$

$\overline{\text{OP}}$ tend vers a, quand θ tend vers 0.

2°. — Soit OA le rayon vecteur du point A. Menons la droite OT perpendiculaire sur OA, puis la tangente AT à la courbe en A. Le segment $\overline{\text{OT}}$ ainsi déterminé s'appelle *sous-tangente*. On a généralement :

$$\overline{\text{OT}} = r \operatorname{tg} \alpha = \frac{r^2 d\theta}{dr}.$$

D'après un théorème connu, le produit de la sous-normale par la sous-tangente est égal au carré du rayon vecteur :

$$\overline{\text{OT}} \,.\, \overline{\text{ON}} = r^2;$$

ce qu'on vérifiera sur les formules trouvées.

Pour la spirale hyperbolique, la sous-tangente est constante et égale à a.

CHAPITRE V

CERCLE. DÉVELOPPÉE ET DÉVELOPPANTES. CYCLOÏDES ET ÉPICYCLOÏDES

Cercle[1].

83. Équation du cercle.

Soit a et b les coordonnées du centre C; écrivons que la distance $\overline{AC}$ d'un point quelconque A de la courbe au centre C est constante et égale à r. Le triangle rectangle ABC donne (fig. 63) :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2,$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (1)$$

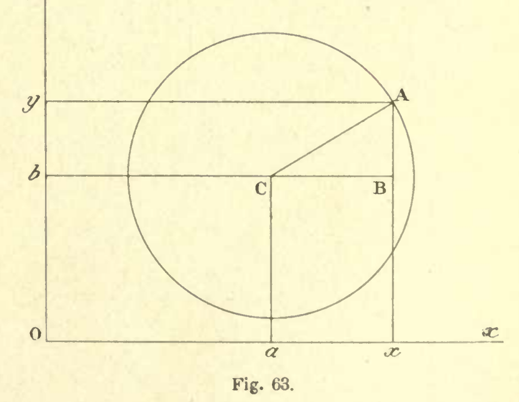


Fig. 63.

Inversement, pour qu'une *équation quadratique* :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy + 2qx + 2sy + t = 0, \quad (2)$$

représente un cercle, on doit avoir :

$$m = n, \qquad p = 0.$$

On peut alors identifier la forme (2) à la forme (1), déterminer les coordonnées du centre et le rayon, qui sont les paramètres caractéristiques du cercle.

Développons (1) :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0. \qquad (1')$$

---

[1] Il serait plus correct de dire *circonférence de cercle*. Pour faire court, nous emploierons le mot *cercle* pour désigner à la fois la figure en général et la courbe qui la limite.

Identifions avec (2) :

$$a = -\frac{q}{m}, \qquad b = -\frac{s}{m}, \qquad r^2 = a^2 + b^2 - \frac{t}{m} = \frac{q^2 + s^2 - mt}{m^2}.$$

Pour que le rayon soit réel, il faut que la condition :

$$q^2 + s^2 - mt > 0, \quad \text{soit satisfaite.}$$

84. Équation de la tangente.

Soit ξ, η, les coordonnées du point de la circonférence par lequel nous voulons mener la tangente. L'équation générale de celle-ci est (§ 30) :

$$\frac{x - \xi}{d\xi} = \frac{y - \eta}{d\eta}. \tag{1}$$

Différentions l'équation :

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = r^2; \tag{2}$$

il vient :

$$d\xi(\xi - a) + d\eta\,(\eta - b) = 0.$$

D'où l'équation de la tangente :

$$(x - \xi)(\xi - a) + (y - \eta)(\eta - b) = 0. \tag{3}$$

Elle est identique à :

$$(x - a)(\xi - a) + (y - b)(\eta - b) = r^2, \tag{4}$$

comme on le vérifie immédiatement en retranchant membre à membre (3) de (4). Il reste précisément l'équation (2) qui est satisfaite par hypothèse.

Si le centre est à l'origine des coordonnées, $a = b = 0$, l'équation de la tangente se réduit à :

$$x\xi + y\eta = r^2 \tag{4'}$$

85. Tangente menée d'un point extérieur; polaire.

Soit x, y, les coordonnées du point B par lequel nous menons les tangentes. Les coordonnées des points de contact A et A′ satisfont à la condition (4) du paragraphe précédent :

$$(x - a)(\xi - a) + (y - b)(\eta - b) = r^2, \tag{1}$$

où x et y, coordonnées de B, sont invariables. L'équation (1) en ξ et η est celle d'une droite passant par les points de tangence; c'est donc l'équation de la corde AA′ que nous appellerons *polaire du point* B. Pour déterminer A et A′,

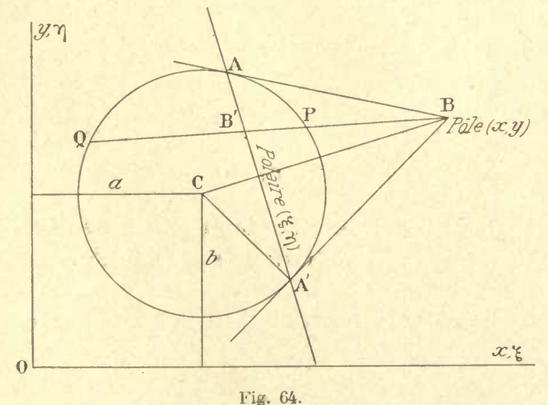


Fig. 64.

il faut chercher les coordonnées des points d'intersection de la droite (1) avec le cercle; autrement dit, il faut résoudre le système d'équations simultanées en ξ et η :

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = r^2,$$
$$(\xi - a)(x - a) + (\eta - b)(y - b) = r^2.$$

86. Division harmonique; propriété de la polaire.

1°. — On dit que quatre points B, P, B', Q, forment une *division harmonique* quand le rapport des distances de B aux points P et Q est égal au rapport des distances de B' aux mêmes points. Tenant compte des signes, on a :

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = -\frac{\overline{B'P}}{\overline{B'Q}}. \qquad (1)$$

Si l'on projette la droite sur une droite quelconque, par exemple sur l'un des axes de coordonnées, cette relation subsiste entre les projections des points B, P, B', Q.

2°. — Soit x, y, les coordonnées de B; ξ, η, les coordonnées de B'. Les coordonnées d'un point quelconque de la droite BB' peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{x + \alpha\xi}{1 + \alpha}, \qquad \frac{y + \alpha\eta}{1 + \alpha};$$

α est un nombre quelconque variable de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour $\alpha = 0$, on trouve le point B; pour $\alpha > 0$, on trouve un point P compris entre B et B'; enfin, pour α positif et très grand, on trouve le point B'. Aux valeurs de α comprises entre 0 et -1, correspondent les points situés à droite du point B; pour $\alpha = -1$, on passe de l'∞ à droite de B, à l'infini à gauche de B'; quand α décroît de -1 à $-\infty$, on revient au point B'.

3°. — Quatre points B, B', P, Q, forment une division harmonique, si leurs coordonnées sont :

$$x, y; \quad \xi, \eta; \quad \frac{x + \alpha\xi}{1 + \alpha}, \quad \frac{y + \alpha\eta}{1 + \alpha}; \quad \frac{x - \alpha\xi}{1 - \alpha}, \quad \frac{y - \alpha\eta}{1 - \alpha}.$$

En effet, la relation (1), appliquée aux projections des points sur l'axe Ox, s'écrit :

$$\frac{(1 + \alpha)x - (x + \alpha\xi)}{(1 - \alpha)x - (x - \alpha\xi)} + \frac{(1 + \alpha)\xi - (x + \alpha\xi)}{(1 - \alpha)\xi - (x - \alpha\xi)} = 0,$$

qui est une identité. On obtient aussi une identité en considérant les projections sur Oy.

Quand nous donnons à α une série de valeurs, nous obtenons autant de couples de points P, Q, formant sur la droite *deux divisions* dont nous étudierons plus tard les propriétés (§ 354, *1°*). En

particulier, pour $\alpha = 1$, nous obtenons le point P milieu de BB′ et le point Q à l'infini.

4°. — Ceci posé, écrivons que les points P et Q sont sur un cercle de rayon r, dont, pour simplifier, nous prendrons le centre comme origine des coordonnées. Nous avons les conditions :

$$(x + \alpha\xi)^2 + (y + \alpha\eta)^2 = (1 + \alpha)^2 r^2,$$
$$(x - \alpha\xi)^2 + (y - \alpha\eta)^2 = (1 - \alpha)^2 r^2.$$

Retranchons membre à membre, divisons par 4α; il reste :

$$x\xi + y\eta = r^2.$$

Cette relation doit exister entre les coordonnées x, y, du point B et les coordonnées ξ, η, du point B′ (§ 85). *Donc une sécante qui passe par le point invariable* B *est divisée harmoniquement par le point* B, *les intersections avec le cercle et l'intersection avec la polaire du point* B.

87. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

On appelle *puissance* d'un point B par rapport à un cercle, le produit (fig. 64) :

$$\Pi^2 = \overline{BA}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{BQ}.$$

Mais on a : $$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 - r^2,$$

$$\Pi^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2.$$

Pour trouver la puissance, on substitue donc les coordonnées du point B dans l'équation du cercle mise sous la forme $S = 0$, et où les coefficients (toujours égaux) de x^2 et y^2 sont supposés égaux à l'unité.

88. Axe radical de deux circonférences; corde d'intersection.

1°. — Cherchons le lieu des points P dont la puissance est la même par rapport aux deux circonférences :

$$S_1 = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0,$$
$$S_2 = x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0.$$

D'après le paragraphe précédent, il faut écrire :

$$S_1 = S_2, \qquad 2x(a_2 - a_1) + 2y(b_2 - b_1) - (c_2 - c_1) = 0;$$

x et y sont les coordonnées d'un point du lieu cherché.

Ce lieu est donc une droite qu'on appelle *axe radical.*

Il est évident que l'axe radical est normal à la ligne des centres. La pente de cette dernière ligne est $p = (b_2 - b_1) : (a_2 - a_1)$, tandis que, d'après l'équation précédente, la pente de l'axe radical est $p' = -(a_2 - a_1) : (b_2 - b_1)$; on a bien $pp' = -1$ (§ 24).

2°. — Quand les cercles se coupent (fig. 65, à droite), l'axe radical coïncide évidemment avec la corde d'intersection.

Prenons la question d'une manière plus générale. Les points d'intersection des deux courbes *quelconques* $S_1=0$, $S_2=0$, satisfont

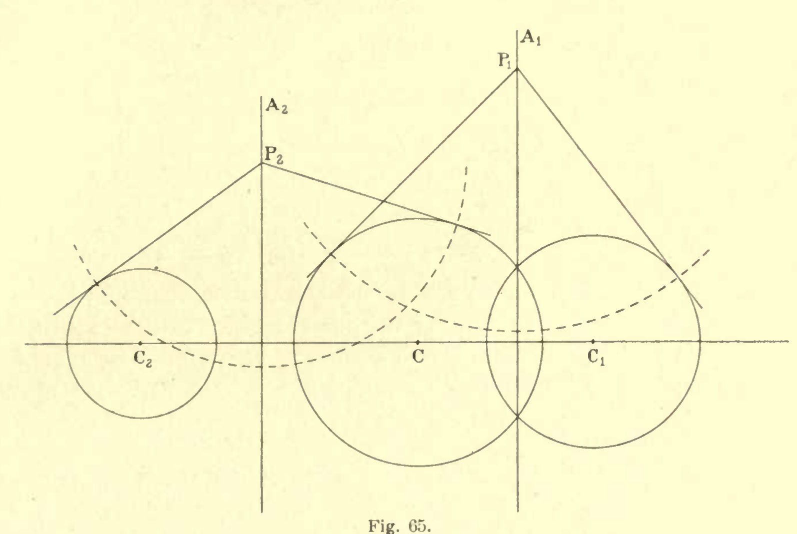


Fig. 65.

simultanément à ces équations. Ils satisfont donc à l'équation $S_1-S_2=0$. Autrement dit, les trois courbes $S_1=0$, $S_2=0$, $S_1-S_2=0$, ont les mêmes points d'intersection.

Dans le cas particulier des cercles, la courbe $S_1-S_2=0$, est une droite : donc c'est la corde d'intersection.

Le même raisonnement étant valable dans tous les cas, on est conduit à dire que l'axe radical est toujours la corde d'intersection; mais les points d'intersection peuvent être réels ou imaginaires (fig. 65, à gauche).

89. Faisceaux de cercles admettant le même axe radical.

1°. — Soit $D=0$, l'équation de la droite qu'on impose comme axe radical; soit $S=0$, l'équation d'un des cercles. Tous les autres ont une équation de la forme :

$$S+\lambda D=0,$$

où λ est un paramètre arbitraire. En effet, prenons deux d'entre eux :

$$S+\lambda_1 D=0, \qquad S+\lambda_2 D=0.$$

Leur axe radical a pour équation :

$$(S+\lambda_1 D)-(S+\lambda_2 D)=(\lambda_1-\lambda_2)\,D=0,$$

qui représente la droite donnée $D=0$, puisque λ_1 diffère de λ_2.

2°. — Prenons l'axe radical pour axe Oy $(x=0)$, et (§ 88, *1°*) la ligne des centres pour axe des x; l'équation des cercles du faisceau peut d'abord être de la forme (fig. 65 à gauche, cercles en pointillé de la figure 66) :

$$x^2+y^2+2\lambda x+s^2=0.$$

Nous pouvons écrire cette équation :

$$(x+\lambda)^2+y^2-\lambda^2+s^2=0.$$

Il existe deux cercles qui se réduisent à des points (cercles évanouissants, *points limites* A et B de la figure 66); ils sont donnés par les conditions :

$$\lambda=\pm s, \qquad x=-\lambda=\mp s, \qquad y=0.$$

Pour que les cercles soient réels, la valeur absolue de λ doit être supérieure à s. Pour $\lambda=\pm\infty$, on obtient l'axe radical lui-même. Les deux points d'intersection des cercles entre eux et avec leur axe radical sont imaginaires; ils ont pour coordonnées :

$$x=0, \qquad y=\pm\sqrt{-s^2}.$$

3°. — Si nous prenons l'équation des cercles du faisceau sous la forme (fig. 65 à droite) :

$$x^2+y^2+2\lambda x-s^2=0,$$

les points limites sont imaginaires, mais les deux points d'intersection des cercles entre eux et avec leur axe radical sont réels; ils ont pour coordonnées :

$$x=0, \qquad y=\pm s.$$

90. Lieu des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné.

1°. Soient deux points A et B, pris sur l'axe Ox et dont les abscisses sont $\pm s$. Cherchons le lieu des points de coordonnées x, y, tels que le rapport de leurs distances à ces points fixes soit constant :

$$\rho^2=\frac{y^2+(x+s)^2}{y^2+(x-s)^2}=\text{Constante}. \qquad (1)$$

Cette condition est satisfaite si l'on a :

$$y^2+x^2-2\lambda x+s^2=0, \qquad (\text{I})$$

où λ est un paramètre variable. Substituant dans (1), il vient :

$$\rho^2=(\lambda+s):(\lambda-s).$$

Le faisceau des cercles (I) (représenté en pointillé dans la fig. 66) admet Oy comme axe radical. Chaque cercle est caractérisé par un rapport ρ déterminé. On vérifiera que la valeur absolue de λ restant comprise entre s et l'infini, ρ prend telle valeur qu'on désire.

2°. — Faisceau des cercles normaux aux précédents.

Ils rentrent dans la formule :

$$y^2 + x^2 - 2\mu y - s^2 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Ces cercles admettent Ox comme axe radical. Mais tandis que l'axe radical du faisceau (I) coupe les cercles en des points imaginaires :

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{-s^2},$$

l'axe radical du faisceau (II) coupe les cercles en des points réels :

$$y = 0, \qquad x = \pm\sqrt{s^2}.$$

Les cercles II passent tous par A et B.

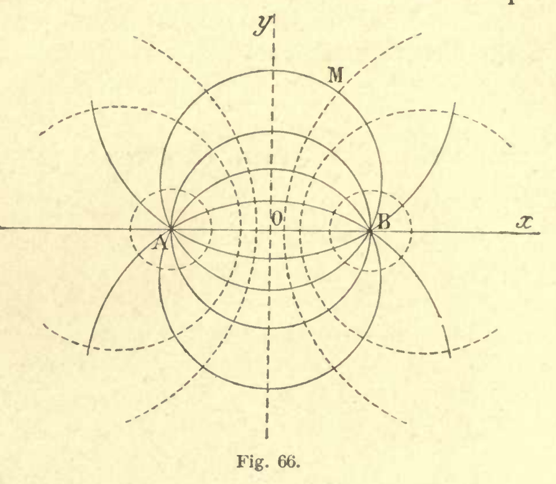


Fig. 66.

3°. — Démontrons qu'un cercle quelconque de l'un des faisceaux coupe orthogonalement un cercle quelconque de l'autre faisceau.

Pour que deux cercles se coupent à angle droit, il doit exister entre leurs rayons r_1 et r_2, et la distance d de leurs centres, la relation :

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2. \qquad (2)$$

Or (§ 83) on a pour le faisceau (I) : $r_1 = \sqrt{\lambda^2 - s^2}$;

pour le faisceau (II) : $r_2 = \sqrt{\mu^2 + s^2}$.

Les coordonnées du centre sont pour le faisceau (I) :

$$y = 0, \qquad x = \lambda.$$

Les coordonnées du centre sont pour le faisceau (II) :

$$x = 0, \qquad y = \mu;$$

d'où :

$$d^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

La condition (2) est donc satisfaite.

Cercle osculateur; rayon de courbure.

91. Cercle osculateur.

1°. — Les coordonnées de tous les points d'un cercle satisfont à l'équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2, \qquad (1)$$

où a, b, ρ, sont des constantes. L'équation (1) établit entre x et y une relation qui doit être vérifiée identiquement pour tous les points

du cercle. Elle l'est, par conséquent, pour le point A de coordonnées x, y, et pour le point D, voisin sur le cercle, de coordonnées $x+dx$, $y+dy$ (fig. 67) :

$$(x+dx-a)^2+(y+dy-b)^2=\rho^2. \tag{2}$$

La combinaison de (1) et (2) donne (en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0, \tag{3}$$

qu'on obtient directement en dérivant (1) par rapport à x.

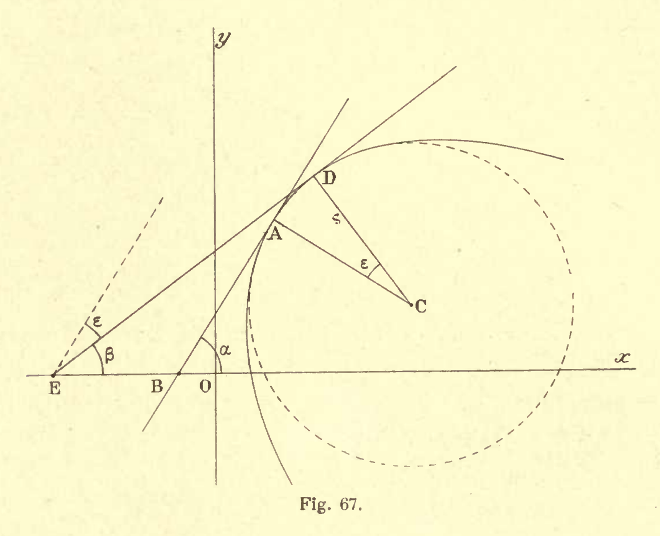


Fig. 67.

L'équation (3) établit une relation entre les coordonnées d'un point du cercle et la pente de la tangente en ce point. Elle exprime que la normale au cercle pour un point de coordonnées x, y, passe par le point de coordonnées a, b, c'est-à-dire par le centre (§ 30).

Écrivons la même relation (3) pour le point voisin, de coordonnées $x+dx$, $y+dy$. Inutile de recommencer un calcul analogue au précédent; nous obtenons le résultat en dérivant (3) par rapport à x :

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0. \tag{4}$$

Résolvons (1), (3) et (4) par rapport à a, b, ρ; on trouve :

$$\rho=\pm(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}:y''; \qquad y'=\frac{dy}{dx}, \qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}; \tag{5}$$

$$a=x-(1+y'^2)y':y'', \qquad b=y+(1+y'^2):y''. \tag{6}$$

a et b sont donc connus sans ambiguïté en fonction de x, y, y', y''. Les résultats (5) et (6) ne nous apprennent rien de neuf : ce sont *pour le cercle* de pures et simples identités.

2°. — Par le point A, menons une infinité de courbes $y = f(x)$, telles que la pente y', calculée en ce point A, soit la même pour toutes : *les courbes ont même tangente au point* A. Elles sont indiscernables les unes des autres et indiscernables de leur tangente commune, tant qu'on se borne à considérer la pente y'.

Supposons maintenant que ces courbes possèdent au point A, non seulement la même dérivée première y', mais encore la même dérivée seconde y''. Elles sont indiscernables tant qu'on se borne à considérer les deux premières dérivées.

Interprétons géométriquement ce résultat et cherchons ce que toutes ces courbes ont en commun.

3°. — Parmi toutes ces courbes, considérons le cercle qui admet précisément au point A les valeurs y' et y'' imposées pour les deux premières dérivées. Les formules données ci-dessus permettent de calculer ses caractéristiques, c'est-à-dire les rayons et les coordonnées du centre. D'après ce que nous avons dit plus haut, toutes les courbes $y = f(x)$, sont indiscernables de ce cercle, tant qu'on se borne à considérer les deux premières dérivées. Il peut donc servir à les caractériser *autour du point* A; il définit la pente et la variation de la pente; on l'appelle *cercle osculateur.*

Son rayon ρ *est le rayon de courbure au point* A.

L'inverse $1 : \rho$ *mesure ce qu'on appelle la courbure.*

Les coordonnées a et b définissent le centre de courbure.

On comprend le procédé. De même que pour définir la pente au point A, on remplaçait la courbe par une droite convenablement choisie, pour définir les variations de la pente au voisinage de ce point, on remplace la courbe par un cercle convenablement choisi. Le cercle est la courbe la plus simple ayant une pente variable.

92. Autre manière de calculer le rayon de courbure.

1°. — Soit C le centre de courbure; soit A, D, deux points voisins distants de l'arc ds (fig. 67).

Menons les normales en A et D; elles se coupent nécessairement au point C puisque le cercle se confond avec la courbe au voisinage du point A. Soit ε l'angle de ces normales; on a :

$$\rho\varepsilon = ds.$$

Menons les tangentes en A et en D; elles font avec l'axe des x des angles α et β. On a évidemment : $\varepsilon = \alpha - \beta$.

Or : $\operatorname{tg}\alpha = y', \qquad \alpha = \operatorname{arctg} y'.$

ε est (au signe près) la variation de α quand on passe du point A au point D; on a (au signe près) :

$$\varepsilon = d\alpha = d \operatorname{arctg} y'.$$

Effectuons l'opération indiquée (§ 60) :

$$d \operatorname{arctg} u = \frac{du}{1+u^2}, \qquad \varepsilon = d \operatorname{arctg} y' = y''dx : (1+y'^2);$$

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon} = \pm \frac{dx}{\varepsilon}\sqrt{1+y'^2} = \pm (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''.$$

C'est le résultat du paragraphe précédent. La quantité ρ n'est déterminée qu'au signe près : nous pouvons convenir de la prendre toujours positivement ; nous verrons plus loin (§ 93) comment on détermine le côté de la courbe où se trouve le centre de courbure.

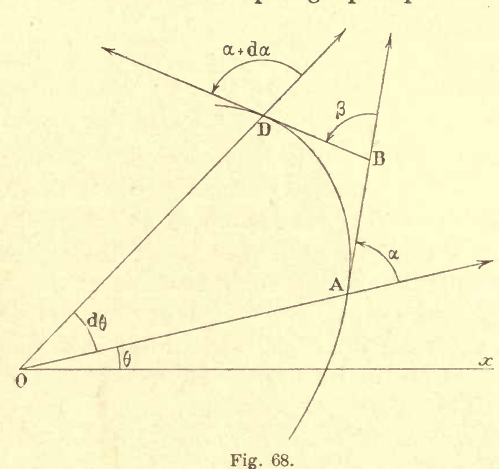


Fig. 68.

2°. — La même méthode donne facilement l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires. Reprenons les notations du § 80.

Il s'agit d'évaluer l'angle que font entre elles les tangentes en deux points voisins A et D (fig. 68).

En coordonnées polaires, on détermine d'abord l'angle α avec le rayon vecteur *qui est variable;* d'où une très légère complication.

On a, dans le quadrilatère ODBA :

$$d\theta + (\alpha + d\alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \alpha) = 2\pi, \qquad \beta = d\theta + d\alpha.$$

Mais : $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{rd\theta}{dr}, \qquad d\alpha = d \,.\, \operatorname{arctg} \dfrac{rd\theta}{dr} = d \,.\, \operatorname{arctg} \left[r : \dfrac{dr}{d\theta} \right].$

Effectuons la différentiation indiquée :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} \right] : \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right].$$

D'où : $\rho = \dfrac{ds}{d\alpha + d\theta} = \left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} : \left[r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2} \right].$

3°. — Nous utiliserons fréquemment la proposition suivante : Soit un cercle de centre C et sa tangente en O (fig. 69). On a :

$$\overline{OA}^2 = \overline{AB} \,.\, \overline{AD}.$$

Supposons que le point A s'approche indéfiniment de O. L'angle

EBA tend vers zéro, et, par suite, $\overline{AB}$ et $\overline{EB}$ ont même limite. La longueur $\overline{AD}$ tend vers $\overline{OC} = 2\rho$. On a donc (§ 10, 3°) :

$$\rho = \lim \frac{\overline{OA}^2}{2\overline{EB}} = \lim \frac{\overline{OE}^2}{2\overline{EB}}.$$

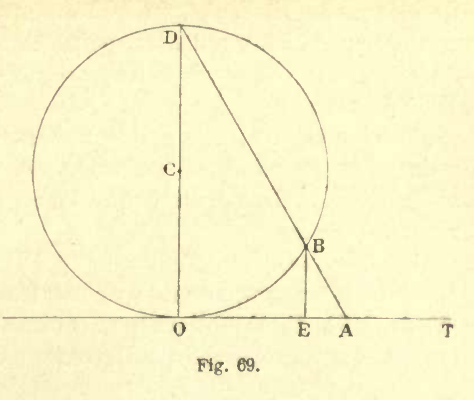


Fig. 69.

Soit maintenant une courbe quelconque dont OT est la tangente. Mesurons pour chaque point E, le rapport $\overline{OE}^2 : 2\overline{EB}$. Cherchons la limite de ce rapport quand E se rapproche indéfiniment de O ; *cette limite est le rayon de courbure en* O.

On remarquera que les distances $\overline{OE}$ et $\overline{EB}$ ne sont pas du même ordre ; c'est précisément pourquoi nous pouvons négliger $\overline{EA}$ devant $\overline{OE}$.

93. Concavité, convexité d'une courbe. Inflexion.

On appelle *concavité* d'une courbe au voisinage d'un point A de cette courbe, le côté de la courbe où se trouve le centre C du cercle osculateur, autrement dit, le centre de courbure correspondant au point A.

On appelle *convexité* le côté de la courbe où ne se trouve pas le centre de courbure.

On dit que la courbe présente une *inflexion* au point P quand le rayon de courbure correspondant au point P est infini. Le petit arc de courbe voisin de P est assimilable à un élément de droite ; on peut dire que le centre de courbure est sur la normale à cet élément, à l'infini et *arbitrairement* d'un côté ou de l'autre de la droite.

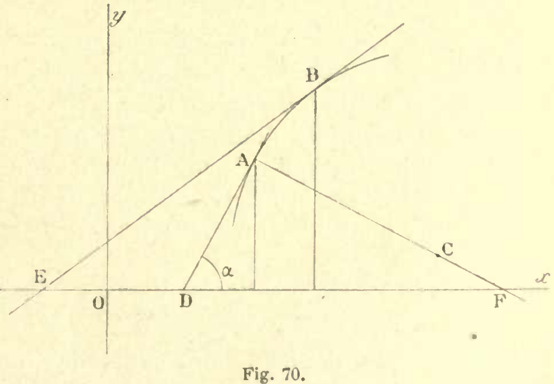


Fig. 70.

Il est facile de reconnaître de quel côté de la normale est le centre de courbure (fig. 70).

Au point A de la courbe, menons la tangente AD et la normale AF. Le quotient $y' = dy : dx$ est proportionnel à tg α, mesure tg α, *quelles que soient les échelles pour les abscisses et les ordonnées*.

On sait de plus que la tangente varie toujours dans le même sens que l'arc (§ 58). Ceci posé, pour que la courbe ait la forme repré-

sentée, c'est-à-dire pour que le centre de courbure soit du côté AF de la courbe, il faut que la tangente BE au point B soit plus horizontale que la tangente au point A. Il faut donc que pour $dx > 0$, on ait $d\alpha < 0$, par suite, $d\,\mathrm{tg}\,\alpha < 0$, $dy' = y''dx < 0$, $y'' < 0$. D'où la règle :

L'ordonnée du centre de courbure est inférieure à l'ordonnée du point correspondant de la courbure, si $y'' < 0$; *elle est supérieure, si* $y'' > 0$. On vérifiera que la règle est la même quand α est supérieur à $\pi : 2$.

Il y a inflexion si $y'' = 0$ (§ 18).

Le lecteur comparera le résultat à celui qu'expriment les formules (6) du § 91. Il n'oubliera pas qu'implicitement on suppose ici les arcs comptés sur la courbe positivement dans le sens des x croissants.

94. Variation des rayons de courbure et des pentes avec les changements d'échelle.

1°. — Quand les Physiciens représentent leurs expériences, ils utilisent rarement les mêmes échelles sur les deux axes. Cherchons comment les pentes et les rayons de courbure dépendent de ces échelles.

Nous avons entre les variables ξ, η, une relation $f(\xi, \eta) = 0$. Pour la représenter, nous utilisons des coordonnées dont les longueurs sont :

$$x = m\xi, \qquad y = n\eta.$$

Changer les échelles, c'est changer les nombres m et n. Par exemple, si au lieu du millimètre nous prenons pour unité le centimètre, nous multiplions par 10 les deux nombres m et n. Si l'unité est le centimètre pour l'axe des x, le millimètre pour l'axe des y, nous avons la relation $m : n = 10$.

2°. — La pente de la courbe tracée est :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m}\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{n}{m}\eta'.$$

Comme η' est donnée, nous concluons que la pente est proportionnelle à l'unité prise sur Oy, en raison inverse de l'unité prise sur Ox. Elle reste la même si les deux nombres n et m sont multipliés par le même nombre (Cf. § 51, *2°*).

3°. — Le rayon de courbure de la courbe tracée est au signe près :

$$\rho = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y'' = \left(1 + \frac{n^2}{m^2}\eta'^2\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{n}{m^2}\eta''.$$

On a en effet :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m}\frac{d}{dx}\eta' = \frac{n}{m^2}\frac{d}{d\xi}\eta' = \frac{n}{m^2}\eta''.$$

Multiplier par le même facteur les nombres n et m, c'est multiplier ρ par ce nombre; par exemple, si on double les échelles, le rayon de courbure est partout multiplié par deux. D'une manière générale, la modification du rayon de courbure dépend de la pente au point considéré.

Développée, développantes.

95. Développée, développantes. Courbes parallèles.

On appelle *développée* d'une courbe le lieu des centres de courbure qui correspondent aux différents points de cette courbe. Étudions les relations qui existent entre la *développée* d'une courbe et cette courbe qu'on appelle *développante :*

1°. — Reprenons l'équation :

$$x - a + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (1)$$

Elle signifie que le point α, centre de courbure de la courbe I au

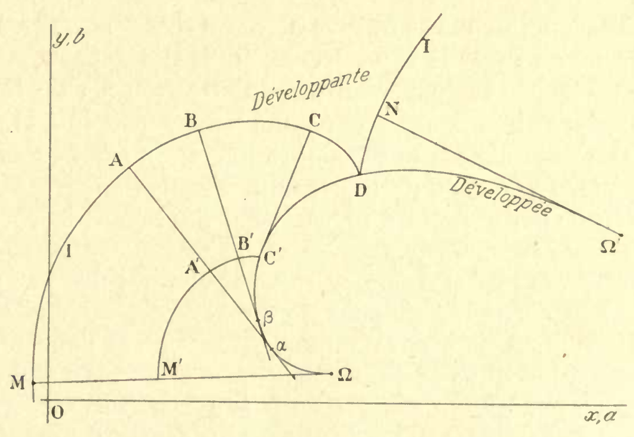


Fig. 71.

point A, et dont les coordonnées sont a, b, est sur la normale menée à I par le point A de coordonnées x, y (fig. 71).

Écrivons la même relation pour le point B de coordonnées $x + dx$, $y + dy$, et pour le point β, centre de courbure correspondant, de coordonnées $a + da$, $b + db$.

Prenons x pour variable; dérivons par rapport à x tous les termes de l'équation (1) qui est identiquement satisfaite :

$$1 - \frac{da}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{db}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (2)$$

Tenons compte de la relation (4) du § 91 : substituons au dernier terme du premier membre sa valeur; simplifions. Il reste :

$$\frac{dy}{dx}\frac{db}{da}=-1. \qquad (3)$$

Cette relation signifie que *la tangente à la développée est la normale à la développante.*

2°. — Évaluons la variation du rayon de courbure. On a :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2, \qquad d\rho=d\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

$$d\rho=\frac{(x-a)(dx-da)+(y-b)(dy-db)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}.$$

Mais des relations (1) et (3) on tire :

$$\frac{x-a}{da}=\frac{y-b}{db}.$$

Remplaçons $x-a$ et $y-b$ par les quantités proportionnelles da et db. Utilisons la relation (3); il reste :

$$d\rho=\sqrt{da^2+db^2}, \qquad \overline{\mathrm{A}\alpha}=\overline{\alpha\beta}+\overline{\beta\mathrm{B}}.$$

La variation du rayon de courbure est précisément égale à l'arc de la développée.

3°. — Tracé de la développante a partir de la développée. — Un fil est attaché au point Ω et s'enroule sur la développée. A partir du point α où il quitte la courbe, il suit la direction αA de la tangente à cette courbe au point α. Prenons une longueur de fil ΩM, telle que le point M appartienne à la développante. *Quand le fil s'enroule sur la développée, son extrémité décrit la développante.*

Nous exprimons ainsi que la variation du rayon de courbure est égale à l'arc de développée.

4°. — Courbes parallèles. — Prenons sur le fil des longueurs différentes : par exemple, coupons-le en M′. Son extrémité décrit la courbe M′A′B′C′. A une développée correspondent donc une infinité de développantes qui ont les mêmes normales; les points de deux développantes respectivement situés sur les normales communes sont à une distance invariable. *Les courbes sont dites parallèles.*

On a en effet : $\overline{\mathrm{MM'}}=\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{CC'}}.$

5°. — Toute développante coupe orthogonalement la développée, puisque la tangente à la développée est normale à la développante. C'est ce qui arrive aux points D et C′. Pour obtenir la suite de la développante, on enroule un fil sur le reste de la développée. S'il est attaché en Ω' et de longueur Ω'N, il permettra de décrire l'arc DN de développante.

Au point D, les deux arcs de développante sont tous deux normaux à la développée et, par conséquent, tangents entre eux : *la développante présente un point dit de rebroussement.*

96. Allures générales des développées.

1°. — La développée présente un *point de rebroussement* sur toute normale qui correspond à un maximum ou à un minimum de la courbure pour la développante; il va de soi que cette normale est la tangente de rebroussement. On entend par là que la développée se compose d'arcs qui ont un point commun sur la normale correspondante à un maximum ou à un minimum de courbure pour la développante, et qui admettent cette normale comme tangente commune.

Soit A'B'C'D' la développée de la courbe ABCD.

Pour obtenir l'arc AB, *nous déroulons* un fil enroulé sur A'B' et fixé, par exemple, en B'. Son extrémité A décrit la développante.

Nous arrivons ainsi au point B où, par hypothèse, le rayon de courbure est maximum (courbure minima). Le fil doit maintenant *s'enrouler;* donc nous changeons d'arc sur la développée. Les deux arcs A'B', B'C', admettent évidemment comme tangente commune la normale BB' menée à la développante en B.

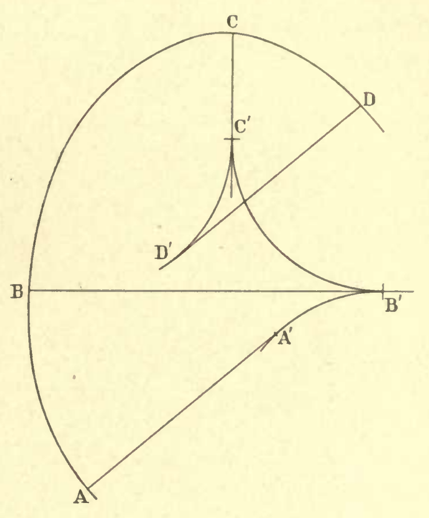


Fig. 72.

L'enroulement du fil sur B'C' donne l'arc BC. Par hypothèse, en C le rayon de courbure est minimum (courbure maxima). Nous sommes alors forcés de changer non seulement d'arc de développée, mais encore de fil. Notre nouveau fil s'attachera, par exemple, en D'; nous le déroulerons pour obtenir l'arc CD de développante.

En définitive, nous obtenons une développante parfaitement continue, ainsi que sa pente et sa courbure, avec des arcs *quelconques* de développée, astreints seulement à être tangents entre eux à leurs extrémités, comme le montre la figure. Ces extrémités correspondent aux rayons de courbure maximum et minimum de la développante.

Il est clair que la pointe du rebroussement est tournée vers la développante quand le rayon de courbure est minimum; elle est tournée en sens contraire quand il est maximum.

2°. — Les branches infinies de la développée sont de deux espèces.

Les unes correspondent aux points d'inflexion de la développante. Les normales à la développante en ces points sont des asymptotes de la développée.

Les autres correspondent aux branches infinies de la développante; elles n'admettent pas d'asymptotes. Quand la développante admet

une asymptote, nous connaissons sa tangente à l'infini, nous connaissons donc *la direction* de sa normale à l'infini et, par suite, *la direction* de la tangente à la développée; mais d'une manière générale cette connaissance ne nous avance en rien.

3°. — Dire que la développante a *un point de rebroussement* A, c'est dire ni plus ni moins qu'au voisinage de ce point, elle est formée de deux branches qui y aboutissent et *y ont une tangente commune* AT. Mais les courbures de ces deux branches au point A peuvent être très différentes, parfois de signes contraires.

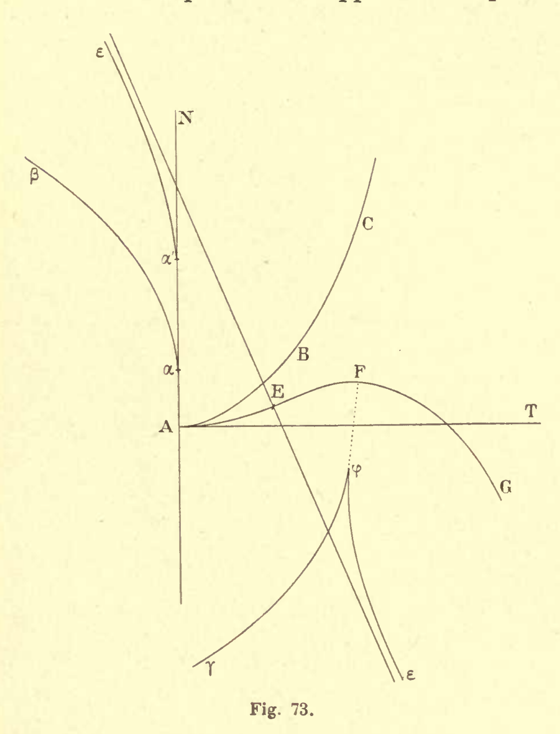


Fig. 73.

La développée a donc généralement *deux points d'arrêts* distincts, α, α', correspondant au point A. Autrement dit, elle est formée de deux branches $\alpha\beta$, $\alpha'\varepsilon$, qui s'arrêtent brusquement sur la normale AN menée à la développante au point A, et qui sont tangentes à cette normale.

Comme cas particulier, il peut arriver que les courbures soient les mêmes et de même signe au point A pour les deux branches de la développante, auquel cas la développée possède, elle aussi, un point de rebroussement.

97. Développées des lignes trigonométriques.

1°. — Développée de la sinusoïde.

Il résulte d'abord du paragraphe précédent que la développée possède un point de rebroussement sur les ordonnées des maximums B ou des minimums D de la sinusoïde (fig. 74).

Calculons le rayon de courbure correspondant; pour donner plus de généralité à notre résultat, prenons la sinusoïde sous la forme :

$$\frac{y}{y_0} = \sin\frac{2\pi x}{\lambda}. \qquad (1)$$

y_0 est l'ordonnée maxima, λ est la longueur de la période évaluée en espace; $\lambda = \overline{AE}$. On tire immédiatement de (1) :

$$r = \pm \left[1 + \frac{4\pi^2 y_0^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right]^{\frac{3}{2}} : \left[\frac{4\pi^2 y_0}{\lambda^2} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}\right].$$

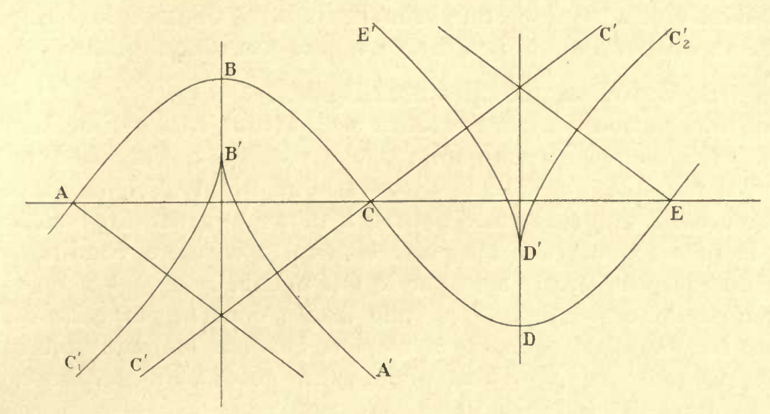


Fig. 74.

Le rayon de courbure minimum a pour valeur :

$$x = \frac{\lambda}{4}, \qquad r = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 y_0} = \overline{BB'}.$$

Le rayon de courbure devient infini, la sinusoïde a une inflexion pour les points A, C, E, ...; ils correspóndent à $x = k\lambda : 2$, où k est un entier quelconque. La développée admet les normales en ces points comme asymptotes.

La figure 74 montre la forme de la courbe.

2°. — Développée de la tangentoïde.

Nous ne calculerons pas la valeur du rayon de courbure ; nous nous contenterons d'établir l'allure de la développée (fig. 75).

La tangentoïde a une inflexion en A,

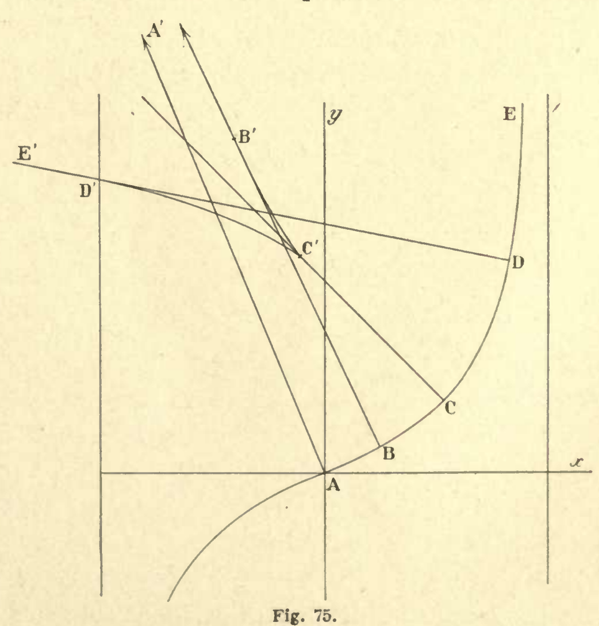


Fig. 75.

pour un arc nul; la normale correspondante est une asymptote de la développée. La courbure de la tangentoïde, nulle en A, croît et atteint son maximum en C. Sur la normale en ce point est le rebroussement de la développée. Enfin la courbure recommence à décroître et tend vers 0 quand l'arc tend vers $\pi : 2$. L'arc correspondant C'E' de la développée est donc une branche infinie, dont, à la limite, la direction est parallèle à Ax. Elle n'admet pas d'asymptote.

98. Courbes presque rectilignes.

Soit une courbe dont la courbure est partout très petite. Menons la tangente en un de ses points; pour réaliser la condition précédente, il ne suffit pas que la distance d'un point quelconque de la courbe à cette tangente reste petite; il faut que la pente y' soit à peu près la même pour tous les points. Si cette dernière condition est satisfaite, la première le sera par le fait même.

Prenons donc pour axe Ox, une droite dont la pente ne diffère jamais beaucoup de celle de la courbe. En tous les points de celle-ci y' est très petit; y'^2 est négligeable devant l'unité. Le rayon de courbure est donc fourni par l'équation :

$$\pm 1 : \rho = y''.$$

En particulier, la courbe dont la courbure est proportionnelle à l'ordonnée satisfait à la condition :

$$ky = -y'' ;$$

c'est une sinusoïde. La courbure est nulle en tous les points où la courbe rencontre l'axe Ox : ce sont des points d'inflexion.

99. Développantes de cercle.

1°. — D'une manière générale, les développantes obtenues en pre-

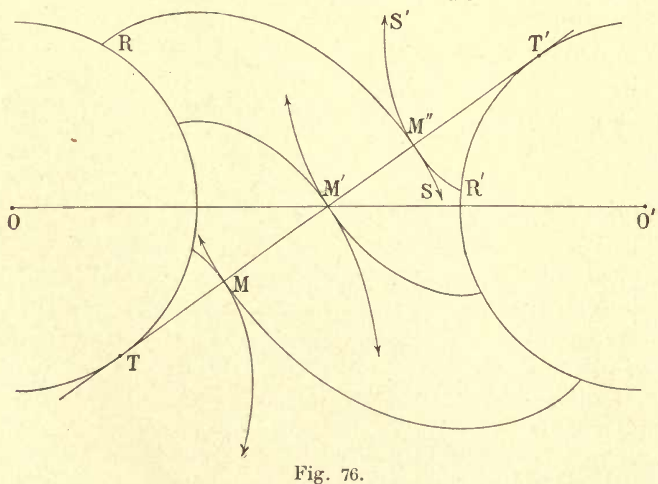


Fig. 76.

nant des longueurs différentes de fil ne sont pas identiques. Elles le

sont pour le cercle. Toutes les développantes peuvent se superposer au moyen d'une rotation convenable autour du centre du cercle.

Soient deux cercles de centres O et O′ et de rayons quelconques. Menons les développantes de ces cercles (RM″S, R′M″S′, par exemple), de manière qu'elles soient tangentes. Le point M″ de tangence est sur la tangente commune aux deux cercles, puisque cette droite est par construction la normale commune aux deux développantes. Faisons tourner les cercles de manière que les développantes restent tangentes entre elles. Le point M″ décrit la ligne TT′ ; la normale commune passe par le point invariable M′.

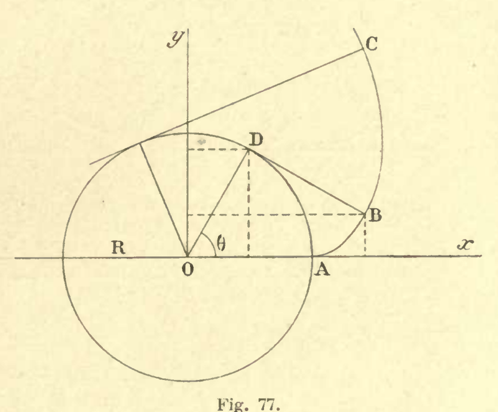


Fig. 77.

C'est un résultat qui est utilisé dans la théorie des engrenages (Mécanique, § 109).

2°. — L'équation de la développante de cercle se déduit immédiatement de ce que le segment de droite $\overline{DB}$ (fig. 77) est normal à OD et égal à l'arc $\overline{AD}$:

$$\overline{DB} = R\theta, \qquad \overline{OD} = R.$$

En projetant le parcours ODB successivement sur Ox et sur Oy, on trouve :

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta + R\theta\sin\theta, \\ y &= R\sin\theta - R\theta\cos\theta. \end{aligned} \qquad (1)$$

Les équations (1) rentrent dans un type général que nous étudierons plus loin (§ 178).

Cycloïdes et épicycloïdes.

Pour construire les courbes dont il est parlé dans les paragraphes suivants, on se procurera : 1° de la crémaillère à petites dents comme l'industrie en fabrique pour les tirages des instruments d'Optique ; 2° des roues dentées de diamètres différents engrenant entre elles et avec la crémaillère. Par flexion, on pourra donner à celle-ci toutes les formes désirables, et en particulier la forme de cercles à grand rayon.

100. Cycloïdes, trochoïdes.

1°. — La *cycloïde* est la courbe engendrée par un point invariablement lié à un cercle qui roule sur une droite.

On conserve généralement le nom de *cycloïde* à la courbe décrite

par un point du cercle. Si le point est dans le cercle, à une distance $\delta = \overline{CP}$ du centre inférieure au rayon R $(\delta < R)$, la cycloïde est dite *raccourcie;* elle est *allongée* si le point est hors du cercle $(\delta > R)$.

La figure 78 montre les trois espèces de courbes : la cycloïde possède un point de rebroussement; la cycloïde allongée a un point double et pas d'inflexion; la cycloïde raccourcie a un point d'inflexion.

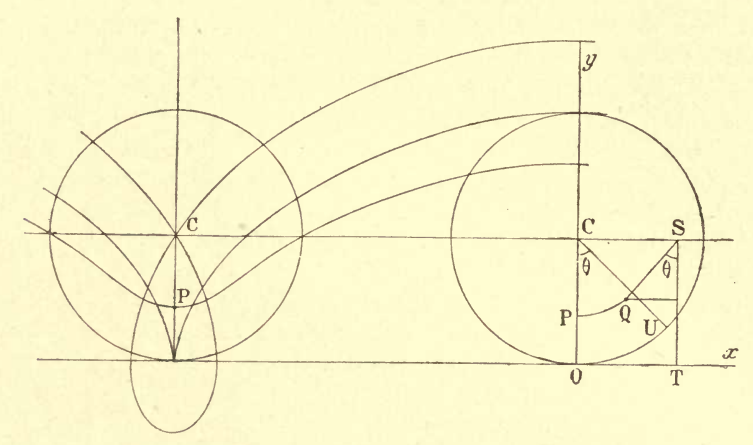


Fig. 78.

Déterminons les équations de ces courbes.

Soit : $\xi = R\omega t, \qquad \eta = R,$

les coordonnées du centre C du cercle. Il est censé se mouvoir uniformément parallèlement à Ox. Quand il arrive en S, le cercle a roulé d'un angle θ tel que le point U coïncide avec T. On a :

$$\text{arc } \overline{OU} = \overline{OT}, \qquad R\theta = R\omega t, \qquad \theta = \omega t.$$

Le point lié invariablement au cercle est venu en Q : l'angle QST est égal à θ, puisque la figure QST est la figure PCU déplacée. Les coordonnées de Q sont donc :

$$x = R\theta - \delta \sin\theta, \qquad y = R - \delta\cos\theta.$$

La cycloïde proprement dite a pour équation :

$$x = R(\theta - \sin\theta), \qquad y = R(1 - \cos\theta).$$

TANGENTE A LA CYCLOIDE. CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION.

Quand une courbe roule sans glisser sur une autre courbe, il se produit comme une rotation élémentaire autour du point de contact; celui-ci joue momentanément le rôle de point fixe : on l'appelle pour cette raison *centre instantané de rotation* (§ 139).

Les arcs infiniment petits décrits simultanément par les divers points de la figure mobile, peuvent être assimilés à des arcs de cercle

dont le point de contact est le centre. *On obtient donc les normales à ces arcs en les joignant au point de contact.*

En particulier, la normale à la cycloïde au point Q est la droite TQ (non tracée sur la figure 78, tracée sur la figure 79).

101. Propriétés particulières de la cycloïde.

1°. — Évaluons le rayon de courbure de la cycloïde.

Posons $\omega t = \theta$, pour simplifier l'écriture. On a :

$$\frac{dx}{d\theta} = R(1 - \cos\theta) = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = R\sin\theta = \sqrt{2Ry - y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{R}{y^2},$$

$$\rho = 2\sqrt{2Ry}.$$

Or on a (fig. 79) :

$$\overline{TQ}^2 = R^2\sin^2\theta + y^2 = 2Ry - y^2 + y^2 = 2Ry.$$

Donc le rayon de courbure au point Q vaut deux fois la distance TQ du point qui décrit la cycloïde, au point de tangence du cercle générateur.

2°. — Il résulte immédiatement de là que la développée d'une cycloïde est une cycloïde égale.

Le point V appartient à la cycloïde OV engendrée par un point du cercle dont le centre décrit C'S' et qui roule sur la droite O'T'.

En effet, le point V est en O au début de l'opération; le point Q' diamétralement opposé est en O'. On a :

$$\text{arc } \overline{QT} = \overline{OT} = \text{arc } \overline{Q'T'} = O'T'.$$

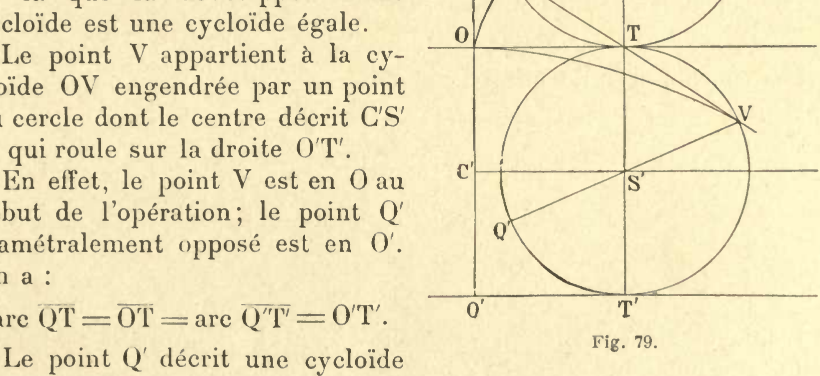


Fig. 79.

Le point Q' décrit une cycloïde identique à OQ ; il en est naturellement de même du point V diamétralement opposé, au transport près de la longueur πR parallèlement à Ox.

3°. — On déduit de ce résultat la longueur d'un arc de cycloïde. La normale à la cycloïde OQ enveloppe la cycloïde OV.

Donc : $$\text{arc } \overline{VO} = \overline{VQ} = 2\,TQ.$$

En particulier, la cycloïde entière est longue de quatre fois le diamètre du cercle générateur.

102. Épicycloïdes ; hypocycloïdes.

Un cercle de rayon R roule sur un cercle de rayon r. On demande

l'équation de la trajectoire d'un point P situé à une distance $\delta = \overline{CP}$, du centre du cercle mobile et entraîné par son mouvement (fig. 80).

Nous pouvons prendre pour variable l'un des deux angles α ou θ.

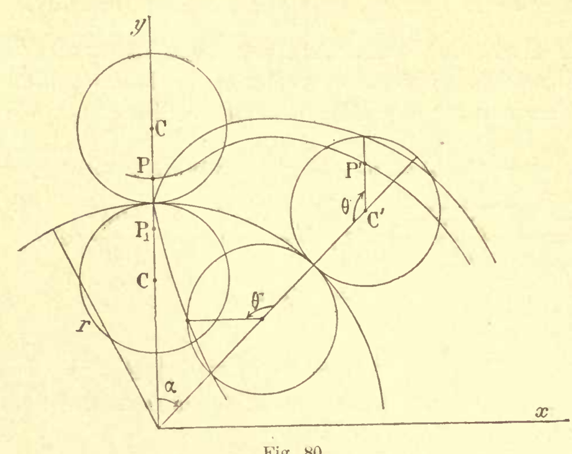


Fig. 80.

Ils sont reliés par l'équation qui exprime le roulement sans glissement : $$r\alpha = R\theta.$$

Les coordonnées du point C' sont :

$$x' = (r + R) \sin \alpha, \qquad y' = (r + R) \cos \alpha.$$

Les coordonnées du point P' sont :

$$x = x' - \delta \sin [\pi - (\theta + \alpha)] = x' - \delta \sin (\theta + \alpha),$$

$$y = y' + \delta \cos [\pi - (\theta + \alpha)] = y' - \delta \cos (\theta + \alpha).$$

$$x = (r + R) \sin \alpha - \delta \sin \frac{r + R}{R} \alpha,$$

$$y = (r + R) \cos \alpha - \delta \cos \frac{r + R}{R} \alpha.$$

L'épicycloïde est *raccourcie* quand $\delta < R$; la figure 80 en représente une portion.

Elle est *allongée* et bouclée quand $\delta > R$.

Les épicycloïdes sont *fermées*, quand $mr = nR$, où m et n sont entiers. S'ils sont premiers entre eux, la courbe est obtenue après n tours du cercle roulant, accomplissant m révolutions autour du cercle fixe.

1°. — Pour retrouver les formules des cycloïdes, explicitons l'angle θ.

$$x = (r + R) \sin \frac{R\theta}{r} - \delta \sin \frac{r + R}{r} \theta,$$

$$y = (r + R) \cos \frac{R\theta}{r} - \delta \cos \frac{r + R}{r} \theta.$$

Faisons $r = \infty$. Nous pouvons remplacer dans les premiers termes du second membre le sinus par l'arc et le cosinus par l'unité ; dans les seconds termes du second membre, le coefficient de θ devient l'unité. Il reste :

$$x = (r + R)\frac{R\theta}{r} - \delta \sin\theta = R\theta - \delta \sin\theta,$$

$$y - r = R - \delta \cos\theta.$$

Ce sont les équations du § 100.

3°. — Hypocycloïdes.

L'épicycloïde est intérieure quand le cercle de rayon R roule à l'intérieur du cercle de rayon r. On vérifiera immédiatement que son équation est obtenue en changeant R en $-R$:

$$x = (r - R)\sin\alpha - \delta \sin\frac{r - R}{R}\alpha,$$

$$y = (r - R)\cos\alpha + \delta \cos\frac{r - R}{R}\alpha.$$

Les épicycloïdes intérieures sont aussi connues sous le nom d'*hypocycloïdes*.

4°. — Engrenage de Lahire.

Si le cercle qui roule admet pour diamètre le rayon du cercle immobile ($r = 2R$), un point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle immobile. On a :

$$\delta = R, \qquad x = 0, \qquad y = 2R\cos\alpha.$$

Un point quelconque du plan mobile décrit l'ellipse :

$$\frac{x^2}{(R - \delta)^2} + \frac{y^2}{(R + \delta)^2} = 1.$$

Nous reviendrons plus longuement sur ce résultat (§§ 140 et 146).

5°. — Hypocycloïde a quatre rebroussements : astroïde.

Si le cercle qui roule admet pour diamètre la moitié du rayon du cercle immobile ($r = 4R$), un point du cercle mobile ($\delta = R$) décrit une courbe connue sous le nom d'*hypocycloïde à quatre rebroussements* (§ 131, fig. 101). Elle a pour équations (§ 226) :

$$x = 3R\sin\alpha - R\sin 3\alpha = 4R\sin^3\alpha,$$

$$y = 3R\cos\alpha + R\cos 3\alpha = 4R\cos^3\alpha.$$

Éliminant α entre les deux équations précédentes, on trouve :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4R)^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$$

Remarque. La condition $mr = nR$, où m et n sont entiers, conduit à des hypocycloïdes *fermées* possédant n rebroussements. Pour $m = 1, n = 2$, l'hypocycloïde se réduit à un diamètre (voir ci-dessus *4°*). Pour $m = 1, n = 3$, on a une *étoile* à trois branches. Pour $m = 1$, $n = 4$, la courbe (voir *5°*) porte le nom d'*astroïde*. Et ainsi de suite.

CHAPITRE VI

SECTIONS CONIQUES

Réduction de l'équation générale du second degré.

103. Courbes du second degré possédant un centre de symétrie ou privées de centre.

1°. — Soit l'équation générale du second degré en x et y :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy + 2qx + 2sy + t = 0. \qquad (1)$$

Transportons l'origine au point $x = a$, $y = b$. Conservons les mêmes notations pour désigner les nouvelles coordonnées. L'opération revient à remplacer partout x par $x + a$, y par $y + b$. En effet, le nouvel x est plus petit que l'ancien de la quantité a, le nouvel y plus petit que l'ancien de la quantité b. Pour que l'équation (1) subsiste, il faut donc augmenter le nouvel x de a, le nouvel y de b (§ 34, 2°) :

$$m(x + a)^2 + n(y + b)^2 + \dots + t = 0. \qquad (2)$$

Développons (2). Nous vérifions immédiatement que les coefficients des termes du second degré sont restés les mêmes.

L'équation devient :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy + 2q'x + 2s'y + t' = 0; \qquad (3)$$

en posant : $q' = ma + pb + q,$

$s' = nb + pa + s,$

$t' = ma^2 + nb^2 + 2pab + 2qa + 2sb + t.$

2°. — Choisissons a et b de manière que les termes du premier degré disparaissent :

$$q' = ma + pb + q = 0,$$
$$s' = pa + nb + s = 0.$$

D'où : $$a = \frac{nq - ps}{p^2 - mn}, \qquad b = \frac{ms - pq}{p^2 - mn}.$$

Par suite, les courbes du second degré forment deux groupes.

Pour les unes (*ellipses*, *hyperboles*), la solution existe ; on trouve pour a et b des valeurs finies. Les courbes sont caractérisées par la condition : $p^2 - mn \gtrless 0$.

Pour les autres (*paraboles*), on a : $p^2 - mn = 0$. Le point de coordonnées a, b, est à l'infini.

3°. — Supposons donc l'opération possible et effectuée ; on a :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy + t' = 0. \tag{4}$$

L'origine est un centre de symétrie. En effet, l'équation, satisfaite pour un système de coordonnées $+x, +y$, l'est encore pour le système $-x, -y$. Les points P, P′, se groupent deux par deux sur des droites POP′ passant par l'origine, de part et d'autre et à égale distance de cette origine : ce qui définit l'origine comme *centre de symétrie* (fig. 81).

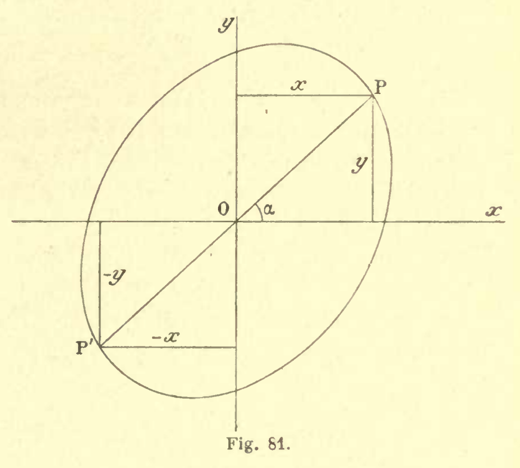


Fig. 81.

Les courbes du premier groupe (*ellipses*, *hyperboles*) ont donc un centre à distance finie ; les *paraboles* ont, si l'on veut, un centre à l'infini.

104. Séparation des ellipses et des hyperboles.

La séparation s'effectue en regardant si la courbe est *limitée en tous sens* (*ellipses*), *ou si elle a des points à l'infini* (*hyperboles*).

Pour que la courbe ait des points à l'infini, il faut qu'on puisse trouver des solutions de l'équation (4) qui correspondent à des valeurs simultanées très grandes de x et de y.

Considérons un de ces systèmes qui définit un point P. Joignons ce point P à l'origine O ; soit α l'angle que fait avec Ox la droite OP.

On a : $$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \qquad m + n \operatorname{tg}^2 \alpha + 2p \operatorname{tg} \alpha + \frac{t'}{x^2} = 0.$$

Mais on peut négliger le dernier terme devant les trois premiers, puisque *par hypothèse* x est très grand.

Donc la courbe aura des points à l'infini (*hyperboles*), si l'équation du second degré en $\operatorname{tg} \alpha$:

$$m + 2p \operatorname{tg} \alpha + n \operatorname{tg}^2 \alpha = 0, \tag{5}$$

a ses racines réelles. C'est dire qu'on a : $p^2 - mn > 0$.

La courbe est limitée en tous sens (*ellipses*), si les racines de l'équation (5) sont imaginaires : $p^2 - mn < 0$.

Corollaire.

Si la courbe est *centrée* et a des points à l'infini, elle se confond à l'infini avec deux droites qui lui sont *asymptotes* (§ 35). Autrement dit, ses points à l'infini sont sur deux droites qui passent par le centre par raison de symétrie ; leurs *pentes* sont les racines $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, de l'équation (5). Au surplus, la courbe est rencontrée à l'infini par toutes les parallèles à ses asymptotes (§ 25, 2°).

Remarque I.

Dans le cas de la parabole (courbe non centrée), on a :

$$p^2 - mn = 0.$$

Opérant sur l'équation (1) comme nous l'avons fait sur l'équation (4), nous obtenons une équation (5) qui a ses racines réelles et égales. La parabole a donc des points à l'infini qui sont dans une direction *unique*. On l'appelle *direction de l'axe de la parabole*.

Remarque II.

Supposons qu'en ramenant l'équation générale à la forme (4), on trouve $t' = 0$. Les ellipses se réduisent à un point, l'origine, qui est centre de symétrie : $x = 0$, $y = 0$. Les hyperboles se réduisent à deux droites non confondues passant par l'origine.

105. Changement des axes de coordonnées, l'origine restant le centre de symétrie.

1°. — Cherchons comment se transforme l'équation :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy + t' = 0, \qquad (4)$$

quand on remplace les axes (supposés rectangulaires) par d'autres axes rectangulaires faisant avec les premiers l'angle θ (§ 78).

Il faut effectuer dans l'équation (4) la substitution linéaire :

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta,$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

On trouve : $m'x'^2 + n'y'^2 + 2p'x'y' + t' = 0$;

$$m' = m\cos^2\theta + n\sin^2\theta + 2p\sin\theta\cos\theta,$$

$$n' = m\sin^2\theta + n\cos^2\theta - 2p\sin\theta\cos\theta,$$

$$p' = -(m - n)\sin\theta\cos\theta + p(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

On vérifiera immédiatement les relations :

$$m' + n' = m + n, \qquad p'^2 - m'n' = p^2 - mn.$$

Ces quantités sont des *invariants ;* on exprime par là qu'elles ne sont pas modifiées par les changements d'axes. Nous étions déjà certains que le signe de la seconde ne pouvait changer, puisqu'il définit la nature de la courbe.

2°. — Écrivons maintenant la condition $p' = 0$.

On a : $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta, \qquad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$;

D'où :
$$p' = 0, \qquad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2p}{m - n}. \tag{6}$$

Or, la tangente pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, nous sommes assurés de trouver un angle 2θ, par suite un angle $2\theta + \pi$, qui satisfont à l'équation (6). Nous déterminons donc deux angles θ et $\theta + \pi : 2$ qui annulent p'. Autrement dit, *il existe deux systèmes d'axes rectangulaires, eux-mêmes rectangulaires entre eux, pour lesquels l'équation générale se ramène à la forme :*

$$m'x^2 + n'y^2 + t' = 0.$$

Si alors m' et n' sont de même signe, la courbe est une ellipse ; s'ils ont des signes contraires, c'est une hyperbole.

Remarquons que deux systèmes d'axes rectangulaires *rectangulaires entre eux* ne définissent que deux droites rectangulaires ; l'axe Ox de l'un des systèmes se confond avec l'axe Oy de l'autre.

106. Réduction dans le cas des paraboles.

Dans le cas des paraboles, les termes du second degré en x et y constituent un carré parfait (§ 104, rem. I). Mettons l'équation sous la forme :

$$(Ax + By)^2 + 2qx + 2sy + t = 0.$$

Faisons le changement d'axes. Le terme entre parenthèses devient :

$$x'(A \cos \theta + B \sin \theta) - y'(A \sin \theta - B \cos \theta).$$

Par un choix convenable de l'angle θ, il est possible d'annuler le coefficient de x' ou celui de y'. On a les conditions :

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{A}{B}, \qquad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{B}{A}; \qquad \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 = -1.$$

Nous définissons ainsi deux systèmes d'axes rectangulaires, rectangulaires entre eux.

On peut donc ramener l'équation des paraboles arbitrairement à l'une des formes :

$$m'x^2 + 2q'x + 2s'y + t' = 0, \qquad n'y^2 + 2q'x + 2s'y + t' = 0.$$

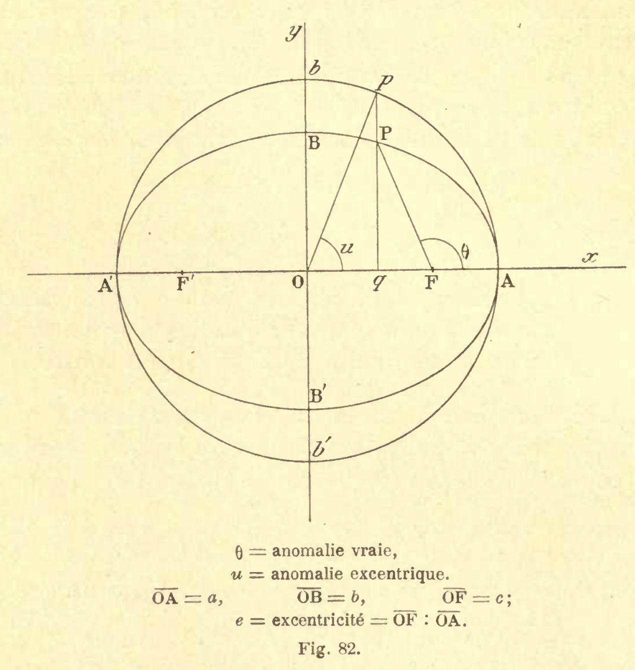
Rien n'empêche maintenant de transporter l'origine en un point de coordonnées a et b. Nous profiterons des deux arbitraires pour ramener l'équation à l'une des formes :

$$m'x^2 + 2q''y = 0, \qquad n'y^2 + 2s''x = 0.$$

Ellipse.

107. Équation et propriétés générales.

Conformément aux paragraphes précédents, *l'ellipse* est une courbe dont, par un choix convenable de l'origine des coordonnées et de la



θ = anomalie vraie,
u = anomalie excentrique.
$\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OF} = c$;
e = excentricité = $\overline{OF} : \overline{OA}$.

Fig. 82.

direction des axes (supposés ici rectangulaires), l'équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \text{(I)}$$

Nous poserons $a > b$; a est le *demi grand axe* $\overline{OA}$ (fig. 82), b le *demi petit axe* $\overline{OB}$. Nous écrirons :

$$c^2 = a^2 - b^2; \qquad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}, \qquad e = \frac{c}{a},$$

e est *l'excentricité*.

Les points F et F' qui sont sur le grand axe à une distance $\pm c$ de l'origine, sont les *foyers*.

La courbe est symétrique par rapport à Ox, puisque, pour la même valeur de x, l'équation est satisfaite pour deux valeurs égales et de signes contraires de y. La courbe est symétrique par rapport à Oy, puisque, pour la même valeur de y, l'équation est satisfaite pour deux valeurs égales et de signes contraires de x. Le point O est un centre

de symétrie, puisque l'équation, satisfaite pour les coordonnées x, y, l'est aussi pour les coordonnées $-x$, $-y$.

On peut considérer l'ellipse comme la projection d'un cercle de rayon a, ayant en commun avec l'ellipse les points A et A' extrémités du grand axe, et dont le plan Π' fait avec le plan Π de l'ellipse un angle dont le cosinus est $b : a$.

Les droites du plan Π' parallèles à Ox se projettent en vraie grandeur sur le plan Π. Les droites du plan Π' parallèles à Oy ont sur Π des projections qui leur sont plus petites dans le rapport $b : a$.

La figure 82 montre le cercle supposé rabattu sur le plan Π.

Un point p du cercle est défini par l'angle u, qu'on appelle *anomalie excentrique*. Ses coordonnées sont :

$$a \cos u, \qquad a \sin u.$$

Après projection sur le plan de l'ellipse, on a pour le point P correspondant à p :

$$x = a \cos u, \qquad y = (a \sin u)\frac{b}{a} = b \sin u.$$

Le système : $\quad x = a \cos u, \qquad y = b \sin u, \qquad$ (II)

définit l'ellipse au moyen de la variable auxiliaire u. A chaque valeur de cette variable correspond un système de valeurs de x et de y, c'est-à-dire un point de l'ellipse. Éliminant u, on retrouve l'équation (I).

108. Ellipsographe.

Une droite CBA se déplace sur une équerre E, de manière que

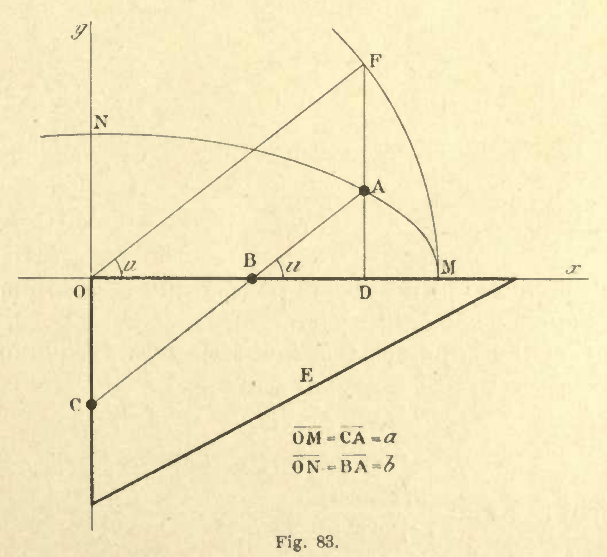


Fig. 83.

les points B et C décrivent les côtés de l'angle droit. On demande la trajectoire du point A (fig. 83).

Posons : $\overline{BA} = b$, $\overline{CA} = a$; $\overline{CB} = a - b$.

Prenons pour variable auxiliaire l'angle u. On a :

$$\overline{DA} = y = \overline{BA} \sin u = b \sin u, \qquad \overline{OD} = x = \overline{CA} \cos u = a \cos u ;$$

$$x = a \cos u, \qquad y = b \sin u.$$

C'est une ellipse. L'angle u est *l'anomalie excentrique*, ce que la figure 83 rend évident.

Sur ce principe sont construits les *ellipsographes*; ces appareils permettent de tracer les ellipses qui se rencontrent dans les constructions navales, et dont le grand axe dépasse fréquemment un mètre.

109. Ellipse en coordonnées polaires.

1°. — On peut d'abord prendre le point O pour origine des coordonnées R, φ (fig. 84). On a :

$$x = R \cos \varphi, \qquad y = R \sin \varphi ; \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}. \qquad \text{(III)}$$

Cette forme permet de démontrer que *la somme des carrés des inverses de deux rayons vecteurs rectangulaires est constante.*

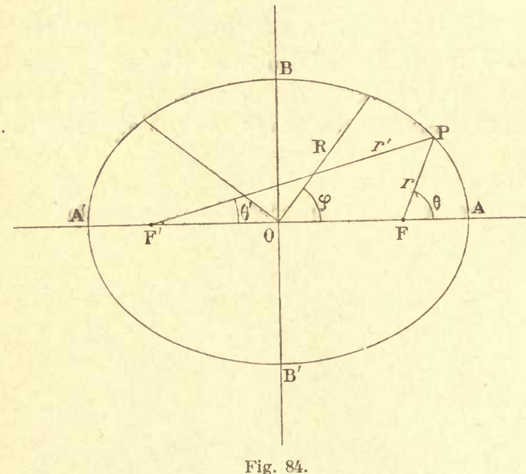


Fig. 84.

En effet, donnons successivement à φ des valeurs qui diffèrent de $\pi : 2$. On a :

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2},$$

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}.$$

Additionnons :

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

2°. — Il est plus intéressant de prendre l'un des foyers pour origine des coordonnées r, θ. L'angle θ s'appelle *anomalie vraie*.

Transportons l'origine des coordonnées en F. L'équation devient :

$$\xi = x - c, \qquad \frac{(\xi + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons : $\xi = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

On obtient : $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \theta)}, \qquad \text{(IV)}$$

Si on transporte l'origine en F', on a :

$$r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta'} = \frac{b^2}{a(1 - e \cos \theta')}.$$

On peut écrire ces relations :

$$r = \frac{b^2}{a} - e\xi, \qquad r' = \frac{b^2}{a} + e\xi', \qquad \xi' - \xi = 2c.$$

Additionnons : $$r + r' = \frac{2b^2}{a} + 2ec = \frac{2b^2 + 2c^2}{a} = 2a.$$

La somme des distances d'un point de l'ellipse aux foyers est constante et égale au grand axe (§ 5).

3°. — Enfin il est souvent commode de prendre comme coordonnées le rayon vecteur r et l'anomalie excentrique u. On a :

$$x = \xi + c = a \cos u, \qquad r = \frac{b^2}{a} - e(a \cos u - c) ;$$

$$r = a(1 - e \cos u). \tag{5}$$

Cette formule est très employée en Astronomie.

110. Diamètres conjugués [1].

1°. — Traçons un cercle sur le plan Π' et considérons toutes les cordes parallèles à un diamètre D. Il est évident que le diamètre D′ perpendiculaire à D les coupe toutes par moitié. Réciproquement, le diamètre D coupe par moitié toutes les cordes C′ parallèles à D′.

Les diamètres rectangulaires D et D′ sont dits *conjugués*.

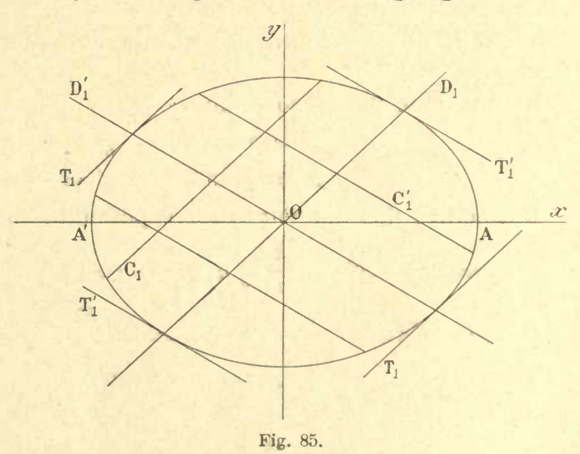


Fig. 85.

2°. — Projetons orthogonalement le cercle sur un plan quelconque Π. La courbe obtenue est une ellipse (§ 107) dont le grand axe est parallèle à l'intersection des plans Π et Π'. Les droites de Π' se projettent sur des droites de Π; des parallèles de Π' ont pour projections des parallèles de Π.

Si trois points A, B, C, d'une droite quelconque du plan Π' sont

---

[1] Le mot *conjugué*, que nous employons ici pour la première fois, n'a pas de sens spécifique. Chaque fois que nous établirons une relation entre deux points, deux droites, un point et une droite, etc., etc..., nous dirons que les termes de la relation sont *conjugués* ; le mot *correspondant* a exactement le même sens. Par exemple, nous pouvons dire aussi bien que les points p et P de la figure 82 se correspondent ou sont conjugués.

Le mot *homologue* n'a pas davantage de sens spécifique. Il signifie que les objets considérés ont les mêmes propriétés, propriétés qui doivent être définies dans chaque cas. Par exemple, les sommets homologues de deux triangles semblables correspondent aux angles respectivement égaux.

tels qu'on ait $\overline{AB} = \overline{BC}$, les trois points correspondants A_1, B_1, C_1, du plan Π sont aussi sur une droite et tels qu'on ait $\overline{A_1B_1} = B_1C_1$.

Donc les cordes parallèles C_1 de l'ellipse, projections des cordes C du cercle, sont coupées par moitié par la projection D'_1 du diamètre D' ; réciproquement, les cordes C'_1 de l'ellipse, projections des cordes C' du cercle, sont coupées par moitié par la projection D_1 du diamètre D.

Il existe donc dans une ellipse des couples de diamètres *conjugués,* tels que chacun coupe par moitié toutes les cordes parallèles à l'autre. Chaque couple correspond à un couple de diamètres rectangulaires dans le cercle.

3°. — Les tangentes au cercle peuvent être considérées comme des cordes limites. Elles se projettent suivant des tangentes à l'ellipse. Donc si aux extrémités du diamètre D_1 on mène les tangentes T'_1, elles sont parallèles au diamètre conjugué D'_1. Elles sont naturellement parallèles entre elles en vertu de l'existence du centre de symétrie O.

111. Théorèmes d'Apollonius.

1°. — Puisque deux diamètres (droites passant par le centre de symétrie) conjugués de l'ellipse sont les projections de deux diamètres rectangulaires du cercle, les points où ils coupent l'ellipse correspondent à deux valeurs u, u', de l'anomalie excentrique qui diffèrent de $\pi : 2$.

Ils ont donc pour coordonnées :

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u;$$
$$x' = a\sin u, \qquad y' = -b\cos u.$$

Les pentes des diamètres correspondants sont :

$$p = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg} u, \qquad p' = \operatorname{tg}\beta = \frac{y'}{x'} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} u.$$

D'où la relation : $$pp' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

2°. — Appelons a' et b' les demi-longueurs des diamètres conjugués. On a :

$$a'^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u,$$
$$b'^2 = x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u.$$

Additionnons membre à membre :

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante. Elle est égale à la somme des carrés des axes qui sont évidemment deux diamètres conjugués.

3°. — Calculons le sinus de l'angle ψ que font deux diamètres conjugués. On a : $\psi = \alpha - \beta$.

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{b\sin u}{\sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}} = \frac{b\sin u}{a'}.$$

On trouve de même aisément :

$$\cos \alpha = \frac{a \cos u}{a'}; \qquad \sin \beta = -\frac{b \cos u}{b'}, \qquad \cos \beta = \frac{a \sin u}{b'}.$$

D'où : $$\sin \psi = \sin(\alpha - \beta) = ab : a'b'; \qquad a'b' \sin \psi = ab.$$

L'aire du parallélogramme (§ 68) *construit sur deux diamètres conjugués est constante. Elle est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les axes.*

Les deux dernières propositions sont connues sous le nom d'Apollonius.

112. Tangente à l'ellipse ; polaire d'un point.

1°. — Nous avons démontré au § 5, 2°, que la tangente à l'ellipse en un point est bissectrice des droites qui le joignent au foyer.

Cherchons l'équation de la tangente. Soit ξ, η, les coordonnées d'un point P de l'ellipse ; soit x, y, celles d'un point quelconque de la tangente en P.

On a (§ 30) : $$\frac{x - \xi}{d\xi} = \frac{y - \eta}{d\eta}. \qquad (1)$$

Différentions l'équation : $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1; \qquad (2)$$

on trouve :

$$\frac{\xi}{a^2} d\xi + \frac{\eta}{b^2} d\eta = 0, \qquad d\xi : \left(\frac{a^2}{\xi}\right) = d\eta : \left(-\frac{b^2}{\eta}\right). \qquad (3)$$

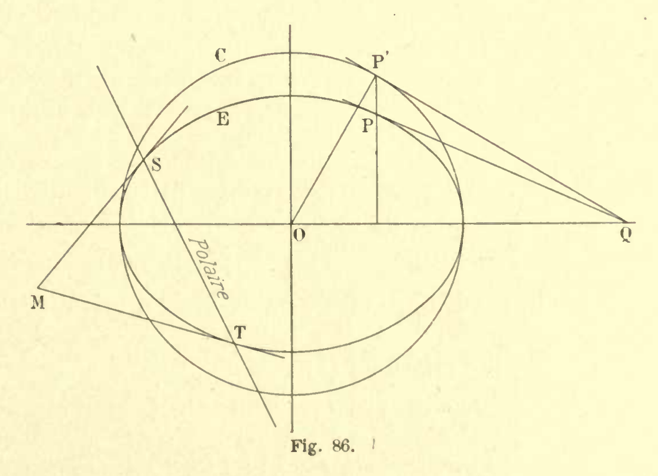


Fig. 86.

Remplaçons dans (1) $d\xi$ et $d\eta$ par les valeurs proportionnelles tirées de (3) ; utilisons (2) :

$$(x - \xi)\frac{\xi}{a^2} + (y - \eta)\frac{\eta}{b^2} = 0, \qquad \frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

2°. — Polaire d'un point (fig. 86).

Soit x, y, les coordonnées du point M par lequel on mène la tangente. L'équation (4) doit être satisfaite pour les points S, T, de l'ellipse (points de coordonnées ξ, η), où il faut construire les tangentes pour qu'elles passent par le point M. Donc (4), où ξ et η sont considérés comme variables, est l'équation de la corde ST qui joint les points de contact S, T, des tangentes menées du point donné M; *c'est la polaire du point* M (§ 85).

3°. — Construction de la tangente.

Pour construire la tangente en P, utilisons la propriété de l'ellipse E d'être la projection du cercle C. Construisons la tangente au cercle pour le point P' qui correspond à P. Elle coupe le grand axe en Q; joignons Q et P ; la droite QP est la tangente cherchée. Cela résulte de ce que, dans la projection, les relations de courbe à tangente ne sont pas modifiées.

113. Relation générale entre les pentes des diamètres conjugués.

Soit l'équation : $$mx^2 + ny^2 + 2pxy + t = 0, \qquad (1)$$

d'une conique rapportée à son centre. Au point x, y, menons la tangente. Sa pente est déterminée par l'équation :

$$mxdx + nydy + p(xdy + ydx) = 0.$$

Posons : $$q_1 = dy : dx, \qquad q_2 = y : x.$$

Il vient : $$nq_1q_2 + p(q_1 + q_2) + m = 0. \qquad (2)$$

Or, d'après ce que nous avons démontré plus haut, la tangente au bout du diamètre D_2 de pente q_2, est parallèle au diamètre conjugué D_1 de D_2. Donc (2) est la relation générale entre les pentes des diamètres conjugués. L'existence des termes du premier degré dans (1) ne modifie pas (2), parce qu'ils correspondent à une simple translation des axes de coordonnées.

114. Mobile se déplaçant sur une ellipse.

1°. — La courbe exprimée au moyen de la variable auxiliaire u :

$$x = a \cos u, \qquad y = b \cos (u - \delta), \qquad (1)$$

est encore une ellipse. En posant $\delta = \pi : 2$, on retrouve la forme utilisée au § 107.

Éliminons u entre les relations (1) :

$$y = b \cos \delta \cos u + b \sin \delta \sin u,$$

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \delta = \sin \delta \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Élevons les deux membres au carré, il vient :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \delta. \qquad (2)$$

C'est une ellipse, mais qui n'est plus rapportée à ses axes.

2°. — Posons que la variable u varie proportionnellement au temps. Les équations (1) expriment donc, non seulement que le mobile de coordonnées x, y, décrit une ellipse, mais encore qu'il la décrit suivant une certaine loi. Nous montrerons plus tard que *les aires balayées par le rayon vecteur qui joint le centre de l'ellipse au mobile, varient proportionnellement au temps* (*loi des aires*, § 175).

Le tour d'ellipse est effectué dans le temps nécessaire pour que la variable u augmente de 2π.

Posons : $u = \frac{2\pi t}{T}$; T est la période.

Le paramètre δ spécifie la position du mobile à l'origine des temps ; *c'est la phase* (§ 52).

Si $\delta = 0$ ou π, l'ellipse s'aplatit en une droite qui passe par l'origine des coordonnées : la vibration est rectiligne.

Si $\delta = \pi : 2$, ou $3\pi : 2$, l'ellipse est rapportée à ses axes.

D'une manière générale, les formules du § 105 permettent de calculer la position des axes.

3°. — Chacune des équations (1) représente une vibration sinusoïdale (§ 52). Considérons les n mouvements :

$$x_1 = a_1 \cos(u - \alpha_1), \qquad y_1 = b_1 \cos(u - \beta_1);$$
$$x_2 = a_2 \cos(u - \alpha_2), \qquad y_2 = b_2 \cos(u - \beta_2);$$

. . . .

Chaque système représente une ellipse de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos(\alpha - \beta) + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2(\alpha - \beta).$$

Nous avons démontré que la somme $\sum x$ des mouvements vibratoires sinusoïdaux dirigés suivant Ox est elle-même un mouvement sinusoïdal (§ 53) ; $\sum y$ est aussi un mouvement sinusoïdal.

On a donc identiquement :

$$x = x_1 + x_2 + \ldots = \text{M} \cos(u - \mu),$$
$$y = y_1 + y_2 + \ldots = \text{N} \cos(u - \nu).$$

D'où la proposition suivante : *Considérons des ellipses de même centre, de même période et décrites isolément suivant la loi des aires. Quelles que soient les phases respectives des mobiles sur chacune d'elles, si on compose à chaque instant tous les déplacements, on obtient un mouvement elliptique décrit lui-même suivant la loi des aires.* Le mot *composition* est pris au sens géométrique ; on obtient les coordonnées du déplacement résultant en ajoutant respectivement les abscisses et les ordonnées des mouvements composants.

Ce théorème a une interprétation mécanique très simple ; son importance est capitale en Optique.

115. Somme d'ellipses de même centre, de mêmes directions d'axes et dont les axes sont dans un rapport donné.

Le théorème précédent ne suppose rien sur les positions relatives des axes des ellipses composantes. Admettons maintenant que les ellipses concentriques ont mêmes directions d'axes, et que leurs axes sont dans le même rapport. Prenons Ox et Oy comme directions des axes ; nous pouvons leur donner les équations :

$$x_1 = a_1 \cos(u - \alpha_1), \qquad y_1 = ka_1 \sin(u - \alpha_1) ;$$

$$x_2 = a_2 \cos(u - \alpha_2), \qquad y_2 = ka_2 \sin(u - \alpha_2) ;$$

. . . .

On vérifiera que l'ellipse résultante est elle-même de la forme :

$$x = \text{M} \cos(u - \mu), \qquad y = k\text{M} \sin(u - \mu),$$

quelles que soient les phases $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Ce théorème est fondamental dans l'Optique du Quartz.

116. Développée de l'ellipse.

1°. — Partons de l'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

En différentiant une et deux fois, on en tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

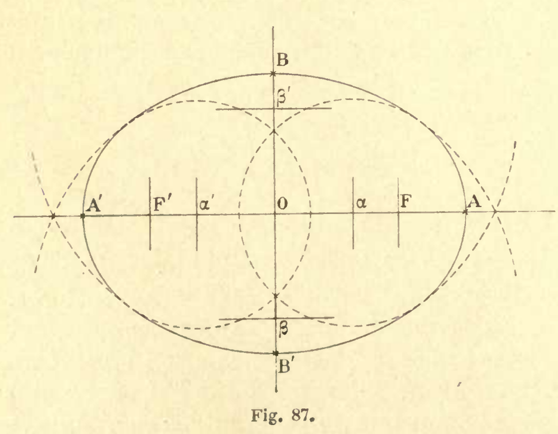


Fig. 87.

D'où le rayon de courbure (§ 91) :

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Pour le point A :

$$(y = 0, \quad x = a)$$

$$\rho = b^2 : a ;$$

pour le point B :

$$(y = b, \quad x = 0)$$

$$\rho = a^2 : b.$$

Le lecteur tracera une ellipse d'après la propriété des foyers (boucle de fil passant sur deux punaises et tendue par la pointe d'un crayon). Il vérifiera que l'ellipse est

déjà presque complètement obtenue quand on a tracé les quatre cercles osculateurs qui correspondent aux extrémités des axes.

Le centre de courbure α qui correspond à A, est compris entre le centre O de l'ellipse et le foyer F. Le centre de courbure β correspondant à B est au delà du point O ; il peut être entre O et B', comme le montrent les figures 87 et 88. Si l'ellipse est suffisamment aplatie, il est au delà du point B'.

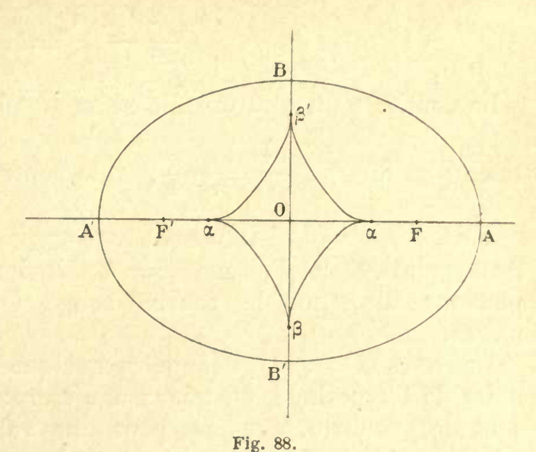


Fig. 88.

2°. — Développée.

Appliquons les formules du § 91. Soit ξ, η, les coordonnées du centre de courbure :

$$\xi = x - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{dy}{\quad}\right) : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

$$\eta = y + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Remplaçons les dérivées par leurs expressions ; il vient :

$$\xi = \frac{c^2x^3}{a^4}, \qquad \eta = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

A l'arc AB de l'ellipse $(x > 0,\ y > 0)$ correspond l'arc $\alpha\beta$ de la développée $(x > 0,\ y < 0)$.

Substituons dans l'équation de l'ellipse ; nous trouvons pour la développée : $$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Pour le point A : $\overline{O\alpha} = c^2 : a$,

B : $\overline{O\beta} = -c^2 : b$.

Hyperbole.

117. Équation et propriétés générales.

Conformément au § 104, l'*hyperbole* est une courbe dont, par un choix convenable de l'origine des coordonnées et de la direction

des axes (supposés ici rectangulaires), l'équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \text{(I)}$$

La courbe a un centre ; elle se confond à l'infini avec les asymptotes (fig. 89) : $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$, de pentes : $\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$.

Faisons $y = 0$; il vient : $x = \pm a$. La courbe coupe Ox en deux points réels. Faisons $x = 0$; il vient : $y = \pm \sqrt{-b^2}$. Nous pouvons dire que la courbe coupe Oy en deux points imaginaires.

Les axes Ox et Oy (appelés quelquefois axe *réel* et axe *imaginaire* de l'hyperbole, ou mieux axe *transverse* et axe *non transverse*) sont de symétrie, puisque, pour une valeur de l'une des coordonnées, on trouve deux valeurs égales et de signes contraires de l'autre.

L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes se déduit de celle de l'ellipse en changeant b^2 en $-b^2$; en vertu de cette remarque, beaucoup de calculs ne sont pas à recommencer. Nous poserons :

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad e = c : a.$$

L'*excentricité* e est supérieure à 1 ; elle était inférieure à 1 pour

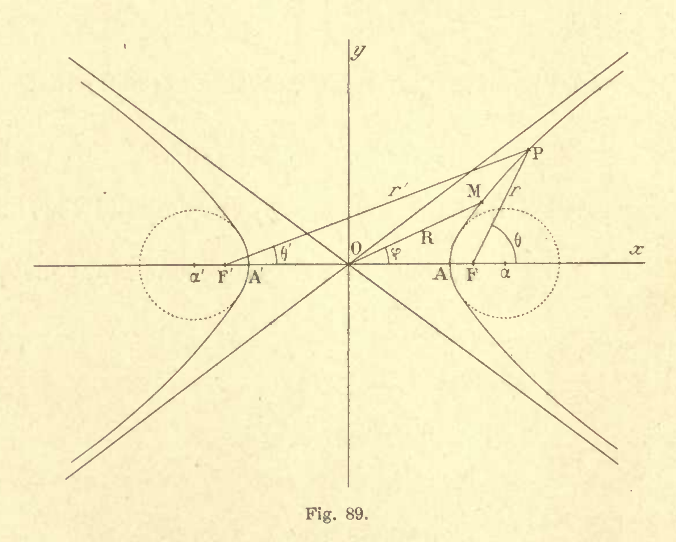


Fig. 89.

l'ellipse. Les points F et F', dits *foyers*, sont sur l'axe Ox à une distance $\pm c$ de l'origine.

L'hyperbole est dite *équilatère* quand $a = b$. Les asymptotes sont alors rectangulaires.

118. Hyperbole en coordonnées polaires.

1°. — On peut d'abord prendre le point O pour origine des coordonnées R, φ.

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi; \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

2°. — Il est plus intéressant de prendre l'un ou l'autre foyer pour origine des coordonnées, r, θ. L'angle θ s'appelle *anomalie vraie* (fig. 90 et 91).

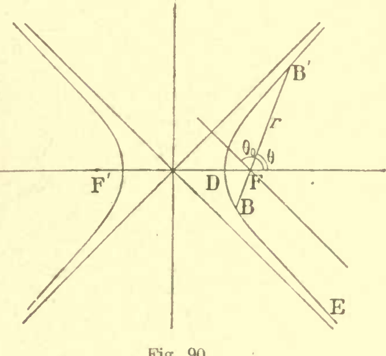


Fig. 90.

Transportons l'origine en F (§ 34). L'équation devient :

$$\xi = x - c, \qquad \frac{(\xi + c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons :

$$\xi = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

On obtient :
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = -\frac{b^2}{a(1 + e\cos\theta)}. \qquad \text{(IV)}$$

θ variant entre 0 et θ_0, on décrit la branche DBE de l'hyperbole; r varie entre $a(1 - e) = a - c = -(c - a)$, pour $\theta = 0$, et $-\infty$ pour $\theta = \theta_0$.

Transportons l'origine en F'. On trouve :

$$r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta'} = -\frac{b^2}{a(1 - e\cos\theta')}.$$

On peut écrire ces relations :

$$r = -\frac{b^2}{a} - e\xi, \qquad r' = -\frac{b^2}{a} + e\xi'; \qquad \xi' - \xi = 2c.$$

Additionnons : $\quad r + r' = -\dfrac{2b^2}{a} + 2ec = 2a.$

Mais r mesure le rayon vecteur changé de signe. D'où le théorème : *La différence des distances d'un point de l'hyperbole aux foyers est constante et égale à l'axe transverse.*

119. Tangente à l'hyperbole.

1°. — Soit ξ, η, les coordonnées d'un point S de l'hyperbole (fig. 91); soit x, y, celles d'un point quelconque de la tangente en S.

On a (§ 30) :
$$\frac{x - \xi}{d\xi} = \frac{y - \eta}{d\eta}. \qquad (1)$$

Différentions l'équation :
$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

On trouve :
$$d\xi : \left(\frac{a^2}{\xi}\right) = d\eta : \left(\frac{b^2}{\eta}\right). \qquad (3)$$

Dans (1) remplaçons $d\xi$ et $d\eta$ par les valeurs proportionnelles tirées de (3); utilisons (2); il reste :

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1. \tag{4}$$

2°. — Il est facile de montrer directement que *la tangente à l'hyperbole au point* S *est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FS

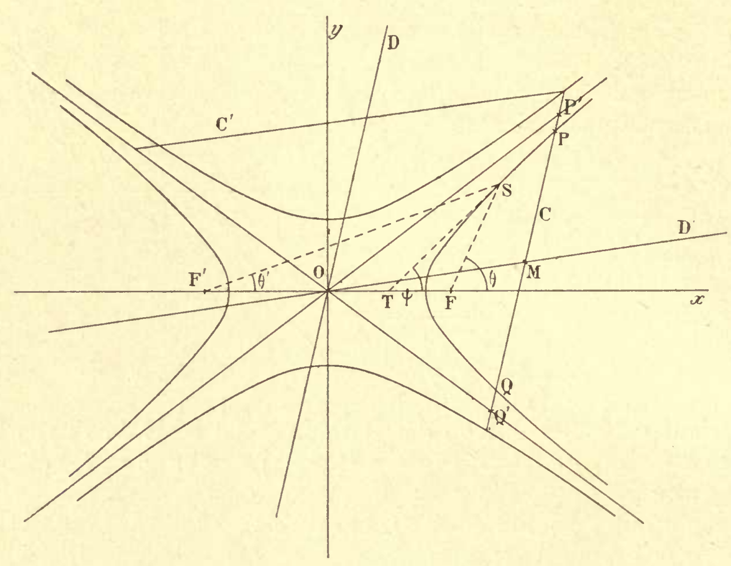


Fig. 91.

et F'S. Soit ψ l'angle que fait la tangente ST avec Ox; il s'agit de vérifier la relation : $2\psi = \theta + \theta'$.

On a :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\eta}{\xi - c}, \qquad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\eta}{\xi + c}; \qquad \operatorname{tg}(\theta + \theta') = \frac{2\eta\xi}{\xi^2 - \eta^2 - c^2}.$$

On a d'autre part, en vertu de l'équation (4) :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}, \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2b^2a^2\eta\xi}{a^4\eta^2 - b^4\xi^2}.$$

On vérifie aisément que la condition :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg}(\theta + \theta'),$$

est une identité, en vertu de (2).

120. Diamètres conjugués.

Reprenons la théorie des diamètres conjugués par une méthode directe. Soit :

$$mx^2 + ny^2 = 1, \tag{1}$$

une conique à centre. Coupons par la ligne :

$$y = px + q. \tag{2}$$

Éliminons successivement y et x entre les équations (1) et (2). Nous obtenons les coordonnées des points d'intersection P, Q, au moyen d'équations du second degré. On trouve (fig. 91) :

$$x = -\frac{npq}{m+np^2} \pm S = x' \pm S,$$

$$y = \frac{mq}{m+np^2} \pm S' = y' \pm S'.$$

Il est clair que les coordonnées du point M qui est à égale distance des points P et Q, sont x' et y'. Le point M se trouve donc sur une droite OM passant par l'origine et dont la pente est :

$$\frac{y'}{x'} = p' = -\frac{m}{np}, \quad pp' = -\frac{m}{n}. \qquad (3)$$

Or q a disparu de la relation (3); *donc toutes les cordes* C *parallèles à* (2) *sont coupées en deux parties égales par une droite, passant évidemment par l'origine qui est un centre; cette droite* D′ *est appelée diamètre conjugué des cordes* C.

La relation (3) étant symétrique en p et p', les cordes C′ parallèles à D′ sont coupées en parties égales par le diamètre D parallèle aux cordes C.

La formule (3) contient comme cas particulier la formule du § 111, *1*°. Appliquée à l'hyperbole, elle donne :

$$pp' = b^2 : a^2.$$

Les asymptotes peuvent être considérées comme des diamètres conjugués superposés ; on a alors :

$$p = p' = \pm b : a.$$

Remarque.

Toutes les hyperboles :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k^2,$$

ont mêmes asymptotes et mêmes systèmes de diamètres conjugués. Elles représentent, si l'on veut, la même hyperbole construite à des échelles qui croissent à mesure que k^2 augmente. En particulier, l'une de ces hyperboles (échelle infiniment petite) se confond avec les asymptotes : celles-ci admettent donc le même système de diamètres conjugués que l'hyperbole.

Le segment P′Q′ est coupé en parties égales par le point M, tout comme le segment PQ.

121. Hyperboles conjuguées.

1°. — Deux hyperboles sont dites *conjuguées* quand elles satisfont aux équations : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$

Elles ont mêmes asymptotes. L'axe réel de l'une est l'axe imaginaire de l'autre.

Elles admettent le même diamètre pour la même série de cordes ; il en est de même évidemment pour leurs asymptotes. La conjuguée d'une hyperbole *équilatère* lui est identique, à l'orientation près.

2°. — Considérons deux diamètres conjugués D′ et D. L'un étant dans l'angle xOP′, l'autre est dans l'angle P′Oy. Donc D′ rencontre réellement une hyperbole, D rencontre réellement l'hyperbole conjuguée. Grâce à l'adjonction de cette hyperbole conjuguée, nous pouvons parler *des longueurs* de deux diamètres conjugués, ce qui ne serait pas immédiatement possible si nous ne considérions qu'une des hyperboles.

122. Théorèmes d'Apollonius.

Comme ils n'ont aucune application, nous ne ferons guère que les énoncer. On les démontre aisément en cherchant directement les longueurs de deux diamètres conjugués.

Coupons la courbe $mx^2+ny^2=1$, par la droite $y=px$.

$$x^2=\frac{1}{m+np^2},\qquad y^2=\frac{p^2}{m+np^2};\qquad a'^2=x^2+y^2=\frac{1+p^2}{m+np^2}.$$

Pour le diamètre conjugué, on a (§ 120) :

$$b'^2=\frac{1+p'^2}{m+np'^2},\quad \text{avec la condition :}\quad pp'=-\frac{m}{n}.$$

D'où généralement (§ 111) : $a'^2+b'^2=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}$.

Dans le cas de l'hyperbole, il faut remplacer b^2 par $-b^2$, b'^2 par $-b'^2$.

Posons $\chi=$ D′OD. On vérifie les relations :

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,\qquad a'b'\sin\chi=ab.$$

La différence des carrés de deux diamètres conjugués est constante.

L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.

L'angle χ est défini par la relation :

$$\operatorname{tg}\chi=\frac{p-p'}{1+pp'}.$$

123. Développée de l'hyperbole.

Nous ne recommencerons pas les calculs. Le rayon de courbure et la développée de l'hyperbole se déduisent du rayon de courbure et de la développée de l'ellipse en changeant b^2 en $-b^2$. On obtient ainsi :

$$\rho=-\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},\qquad \left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Conformément au § 96, la développée présente des points de rebroussement en α et α' ; ce sont les centres de courbure de l'hy-

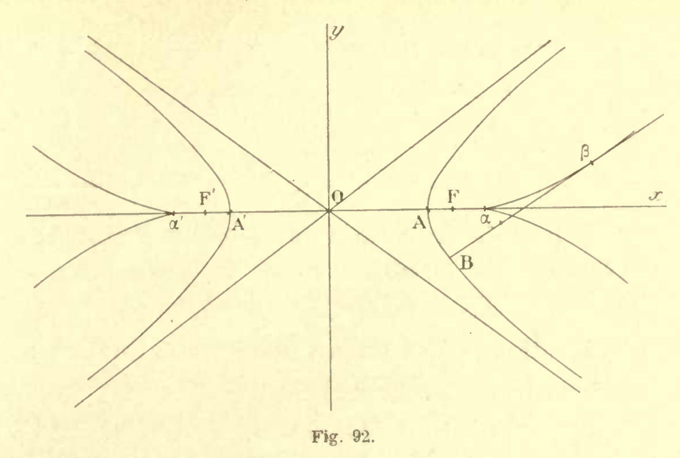


Fig. 92.

perbole pour les points A et A' où la courbure passe par un maximum. La tangente de rebroussement est Ox.

Parabole.

124. Équation et propriétés générales.

1°. — Conformément au § 106, la *parabole* est une courbe dont, par un choix convenable de l'origine des coordonnées et de la direction des axes (supposés ici rectangulaires), l'équation prend la forme (fig. 93) :

$$y^2 = 2px.$$

p est le *paramètre*.

Le point F dont l'abscisse est $\overline{AF} = p : 2$, s'appelle *foyer*. La droite Ax est l'*axe* de la parabole. L'axe Ay est tangent à la parabole en son *sommet* A. On appelle *directrice* une droite Δ parallèle à Oy, et telle que $\overline{AE} = -p : 2$. L'axe Ax est de symétrie.

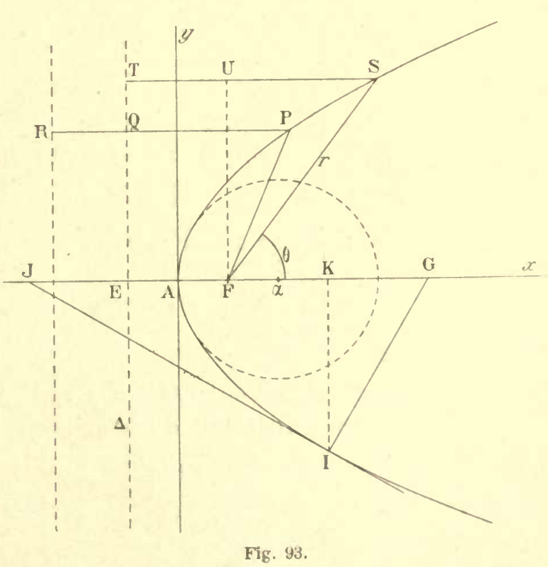


Fig. 93.

Les droites parallèles à l'axe rencontrent la courbe à l'infini (§ 104).

2°. — Coordonnées polaires.

Transportons l'origine au foyer ; l'équation devient :

$$\xi = x - \frac{p}{2}, \qquad y^2 = 2p\left(\xi + \frac{p}{2}\right) = 2p\xi + p^2.$$

Posons : $\xi = r\cos\theta, \qquad \eta = r\sin\theta.$

On trouve :

$$y^2 + \xi^2 = (p + \xi)^2, \qquad -r = p + \xi, \qquad r = -\frac{p}{1+\cos\theta}. \qquad \text{(II)}$$

Quand θ varie de 0 à π, r varie de $-p : 2$ (point A) à $-\infty$.

3°. — Propriété de la directrice Δ.

On a : $\overline{\mathrm{TS}} = \overline{\mathrm{TU}} + \overline{\mathrm{US}} = p + \xi.$

La seconde équation (II) se traduit donc par la relation :

$$\overline{\mathrm{TS}} = \mathrm{FS}.$$

Les points de la parabole sont équidistants d'un point fixe F *et d'une droite invariable* Δ. On n'oubliera pas que nos conventions sur θ entraînent à compter r négativement.

125. Tangente et normale à la parabole.

1°. — Soit ξ, η, les coordonnées d'un point I de la parabole ; soit x, y, les coordonnées d'un point quelconque de la tangente en I.

On a (§ 30) : $$\frac{x-\xi}{d\xi} = \frac{y-\eta}{d\eta}; \qquad (1)$$

$$\eta^2 = 2p\xi, \qquad \eta\,d\eta = p\,d\xi. \qquad (2)$$

Remplaçons dans (1), $d\xi$ et $d\eta$ par les quantités proportionnelles tirées de (2) ; il reste : $p(x+\xi) = y\eta.$ (3)

Dans l'équation (3), faisons $y = 0$; il vient : $x = -\xi$.

Le point J d'intersection de la tangente en I avec l'axe de la parabole est tel que : $\overline{\mathrm{JA}} = \overline{\mathrm{AK}}.$

2°. — Montrons qu'on a : $\mathrm{FI} = \overline{\mathrm{FJ}}.$

$$\overline{\mathrm{FI}}^2 = \left(\xi - \frac{p}{2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\xi - \frac{p}{2}\right)^2 + 2p\xi = \left(\xi + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Or $\overline{\mathrm{JA}} = \xi$, $\quad \overline{\mathrm{AF}} = p : 2$; $\quad$ d'où : $\quad \mathrm{FI} = \overline{\mathrm{JA}} + \overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{JF}}.$

La tangente à la parabole fait des angles égaux avec l'axe Ax *et avec la droite menée du foyer au point de contact.*

3°. — La normale a pour équation (§ 30) :

$$(x-\xi)d\xi + (y-\eta)d\eta = 0, \qquad \eta(x-\xi) + p(y-\eta) = 0; \qquad (4)$$

Dans l'équation (4), faisons $y = 0$; il vient : $x - \xi = p$.

Or $x - \xi = \overline{\mathrm{AG}} - \overline{\mathrm{AK}} = \overline{\mathrm{KG}}.$

Donc la sous-normale $\overline{\mathrm{KG}}$ *est constante et égale au paramètre p.*

126. Diamètres.

1°. — Le diamètre D des cordes C parallèles à une direction donnée *quelconque* est parallèle à l'axe.

En effet, coupons la courbe : $y^2 = 2px$, par la droite;

$$y = Px + q.$$

Les ordonnées des points d'intersection P et Q sont les racines de l'équation :

$$Py^2 = 2p(y - q); \qquad y = \frac{p}{P} \pm S.$$

L'ordonnée du point M, moyenne des ordonnées des points P et Q, est donc :

$$y = p : P. \tag{1}$$

Elle ne dépend pas de q : ce qui démontre le théorème.

Réciproquement, toute parallèle à l'axe est un diamètre; la pente P des cordes correspondantes est fournie par l'équation (1).

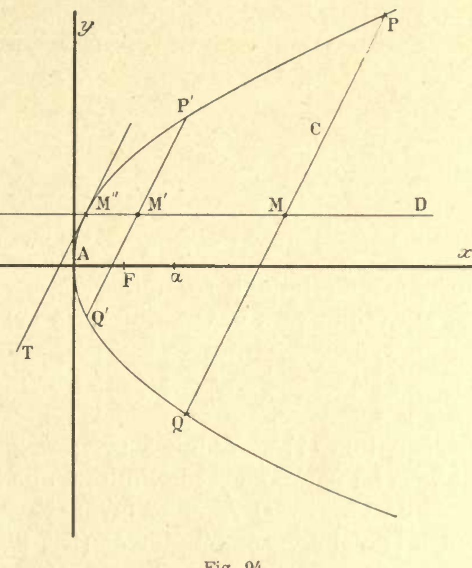


Fig. 94.

La tangente est la limite d'une corde; conséquemment menons par M'', intersection de la parabole et du diamètre D des cordes C, une droite M''T parallèle à ces cordes : elle est tangente à la parabole.

2°. — Menons les tangentes à la parabole aux points P et Q, extrémités d'une corde. On vérifiera aisément qu'elles se coupent sur le diamètre D de cette corde à une distance du point M'' égale à M''M. Cette proposition généralise ce que nous avons démontré au § 125, *1°* : la corde IK est alors normale à l'axe Ax qui est le diamètre conjugué correspondant.

Au § 244, nous donnons une démonstration de ce théorème que nous utilisons plus loin.

127. Parabole comme limite de l'ellipse ou de l'hyperbole.

1°. — La parabole est la limite d'une ellipse dont une des extrémités du grand axe A' et le foyer F' restent fixes, et dont le centre O s'éloigne indéfiniment (fig. 95 à gauche).

Transportons l'origine des coordonnées en A'. L'équation de l'ellipse devient (§ 34) :

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2x^2}{a}. \qquad (1)$$

Écrivons que le foyer est fixe. Posons donc :

$$\overline{\text{A'F'}}=\frac{p}{2}=a-c=a-\sqrt{a^2-b^2}=a\left[1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right].$$

Pour que $\overline{\text{A'F'}}$ reste constant, il faut que b et a croissent simul-

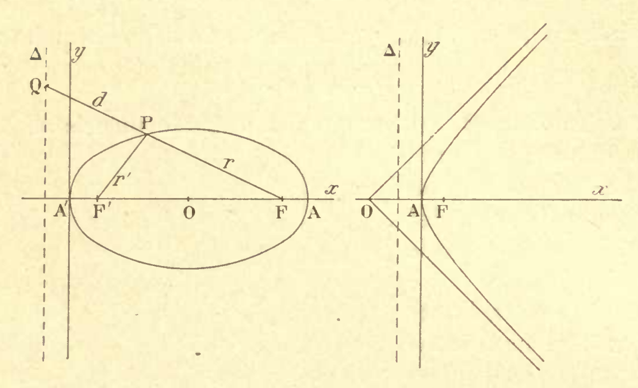


Fig. 95.

tanément de telle sorte que $b^2 : a$ reste fini, et par suite que $b^2 : a^2$ tende vers 0. On a alors (§ 12) :

$$a\left[1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right]=a\left[1-\left(1-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right]=\frac{b^2}{2a}=\frac{p}{2}.$$

L'équation (1) se réduit à : $y^2=2px$.

2°. — La parabole est la limite d'une hyperbole dont une des extrémités de l'axe réel A et le foyer F voisin restent fixe, et dont le centre O s'éloigne indéfiniment (fig. 95 à droite).

Transportons l'origine des coordonnées en A. L'équation de l'hyperbole devient :

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=\frac{2b^2}{a}x+\frac{b^2x^2}{a^2}. \qquad (2)$$

Écrivons que le foyer est fixe. Posons donc :

$$\overline{\text{AF}}=\frac{p}{2}=c-a=\sqrt{a^2+b^2}-a=a\left[\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}-1\right].$$

Le même raisonnement que plus haut réduit l'équation (2) à :

$$y^2=2px,$$

quand a croît indéfiniment.

3°. — Toutes les propriétés de la parabole peuvent se déduire comme limites des propriétés de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Ainsi tous les diamètres de ces courbes passent par le centre; donc, le centre allant à l'infini, tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.

La tangente à l'ellipse ou à l'hyperbole au point P fait des angles égaux avec les droites qui joignent le point P aux foyers. L'un des foyers allant à l'infini, la droite correspondante devient parallèle à l'axe; d'où la proposition du § 125, *2°*.

L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante; l'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante. On vérifie immédiatement qu'à la limite ces propositions donnent la suivante : la parabole est le lieu des points également éloignés d'un point fixe et d'une droite (§ 124, *3°*).

Démontrons pour l'ellipse; la démonstration est semblable pour l'hyperbole. Quand le foyer F va à l'infini (fig. 95), sa distance:

$$\overline{FP} + \overline{PQ} = r + d,$$

à une droite δ *quelconque* normale à Ox, devient constante pour toutes les droites FQ qui passent par les points P à distance finie sur la parabole. Simultanément FPQ devient normale à la droite δ, puisqu'elle devient parallèle à Ox.

Mais on a toujours : $\qquad r + r' = C^{te}.$

Des deux conditions précédentes, on tire :

$$r' = d + C^{te}.$$

En choisissant convenablement la droite δ, on annule la constante. Il suffit évidemment de lui donner une abscisse égale et de signe contraire à celle du foyer F' : on définit ainsi la *directrice* Δ.

On remarquera que l'ellipse est le lieu des points également distants d'un foyer F' et du cercle décrit de l'autre foyer F comme centre avec un rayon $2a$. On définit ainsi un cercle *directeur* qui devient la directrice Δ quand F va à l'infini.

128. Développée de la parabole.

De l'équation : $\qquad y^2 = 2px,$

on tire : $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}, \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{p^2}{y^3}.$

D'où : $\quad \rho = \dfrac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}, \qquad \xi = p + 3x, \qquad \eta = -\dfrac{y^3}{p^2}.$

ξ et η sont les coordonnées du centre de courbure (fig. 96).

Éliminons x et y entre les deux dernières équations et l'équation de la parabole. Il vient l'équation de la développée :

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

Pour l'origine O $(x = 0, \quad y = 0)$, on a le point de rebroussement α de la développée $(\overline{O\alpha} = p)$. On vérifiera que la développée

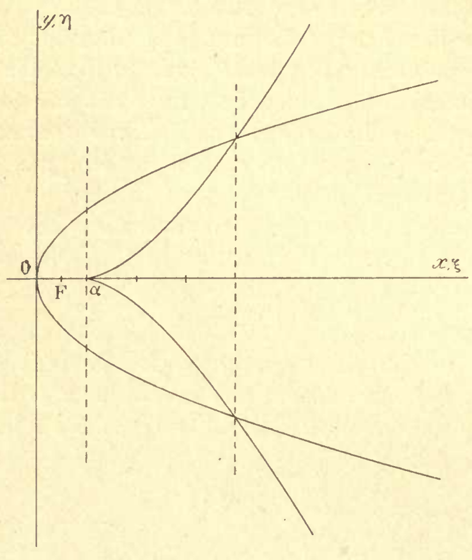


Fig. 96.

coupe la parabole pour une abscisse égale à 4 fois le paramètre. L'équation de condition est :

$$y^2 = 2px = \frac{8}{27p}(x - p)^3,$$

qui est satisfaite pour $x = 4p, \quad x - p = 3p.$

CHAPITRE VII

GÉNÉRALITES SUR LES COURBES

Enveloppe et enveloppées.

129. Définition des courbes enveloppes.

1°. — Soit une fonction égalée à zéro : $f(x, y, p) = 0,$ (1)
où entrent les coordonnées x, y, et le paramètre p. Pour chaque valeur de p, l'équation (1) représente une courbe ; d'une manière générale, elle représente un faisceau de courbes. Autrement dit, (1) représente une courbe qui se déplace dans le plan, généralement en changeant de forme.

Par exemple, l'équation : $x^2 + y^2 = p^2,$
représente un faisceau de cercles concentriques, dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le rayon est p ;

$$y = ax + p,$$

où p est le paramètre variable, représente un faisceau de droites parallèles. Dans ces deux cas, le faisceau recouvre tout le plan.

2°. — Mais il arrive que le faisceau ne recouvre qu'une partie du plan, qui est ainsi partagé en deux régions par une courbe, *enveloppe* des courbes du faisceau. Ces courbes recouvrent la portion du plan qui est d'un côté de l'enveloppe, et respectent la portion qui est de l'autre côté.

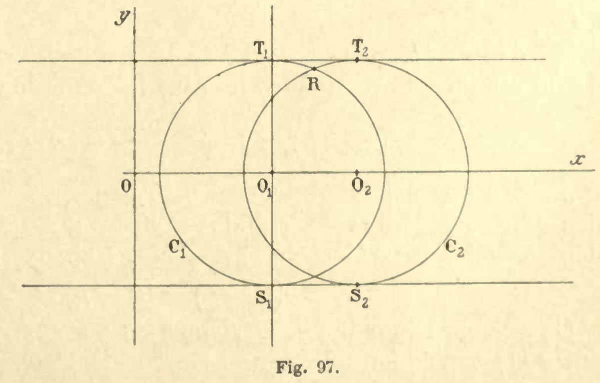


Fig. 97.

Par exemple : $$(x-p)^2+y^2=r^2, \qquad (2)$$
représente un faisceau de cercles dont le rayon est invariable et dont les centres occupent tous les points de l'axe Ox. La courbe *enveloppe* se compose évidemment de deux droites, parallèles à Ox et d'ordonnées (fig. 97) : $$y=\pm r.$$

3°. — Les courbes enveloppes, telles que nous les avons définies, jouissent de deux propriétés quasiment évidentes. D'abord elles sont tangentes à toutes les courbes du faisceau. Cette propriété résulte de ce que l'enveloppe leur est extérieure, tout en ayant avec elles un point commun ; il y a donc tangence en ce point.

En second lieu, on peut considérer l'*enveloppe* comme le lieu des intersections successives des courbes du faisceau qui sont dites *enveloppées*.

Par exemple, quand le cercle C_2 se rapproche indéfiniment du cercle C_1, leur point d'intersection R se confond *à la limite* avec les points T_1 et T_2 : il est sur l'enveloppe.

4°. — L'équation de l'enveloppe se déduit immédiatement de là. Deux courbes voisines du faisceau correspondent à deux valeurs p et $p+dp$ du paramètre ; elles ont les équations :
$$S_1=f(x,y,p)=0, \qquad S_2=f(x,y,p)+\frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p}\,dp=0.$$
Le point d'intersection se trouve sur la nouvelle courbe (§ 88, *2°*) :
$$S_2-S_1=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial p}=0. \qquad (3)$$
Par exemple, le point d'intersection d'un cercle du faisceau (2) et du cercle voisin se trouve sur la courbe :
$$\frac{\partial}{\partial p}\left[(x-p)^2+y^2-r^2\right]=-2(x-p)=0, \qquad x=p,$$
c'est-à-dire sur la droite T_1S_1 menée par le centre O_1 parallèlement à Oy.

En définitive, pour trouver le lieu des intersections successives, il faut éliminer le paramètre p entre les équations :
$$f(x,y,p)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial p}f(x,y,p)=0.$$

5°. — Pour éviter toute difficulté à propos des définitions précédentes, considérons la cubique $3y=x^3$, dont le centre O se déplace suivant la bissectrice des axes (fig. 98) :
$$3(y-p)=(x-p)^3. \qquad (1)$$
Cherchons l'enveloppe. Dérivons (1) par rapport à p ; éliminons p entre (1) et l'équation obtenue :
$$x=p\pm 1, \qquad x=y\pm 2:3. \qquad (2)$$
Ainsi (ce qui était évident *a priori*) l'enveloppe se compose de

deux droites E, E′, parallèles à la bissectrice des axes et coupant Ox en deux points d'abscisses $\pm 2 : 3$.

Contrairement à ce que nous avons dit, il semble donc que le plan n'est pas partagé en deux régions : l'une balayée par les courbes du faisceau, l'autre intacte. La règle réapparaît exacte si

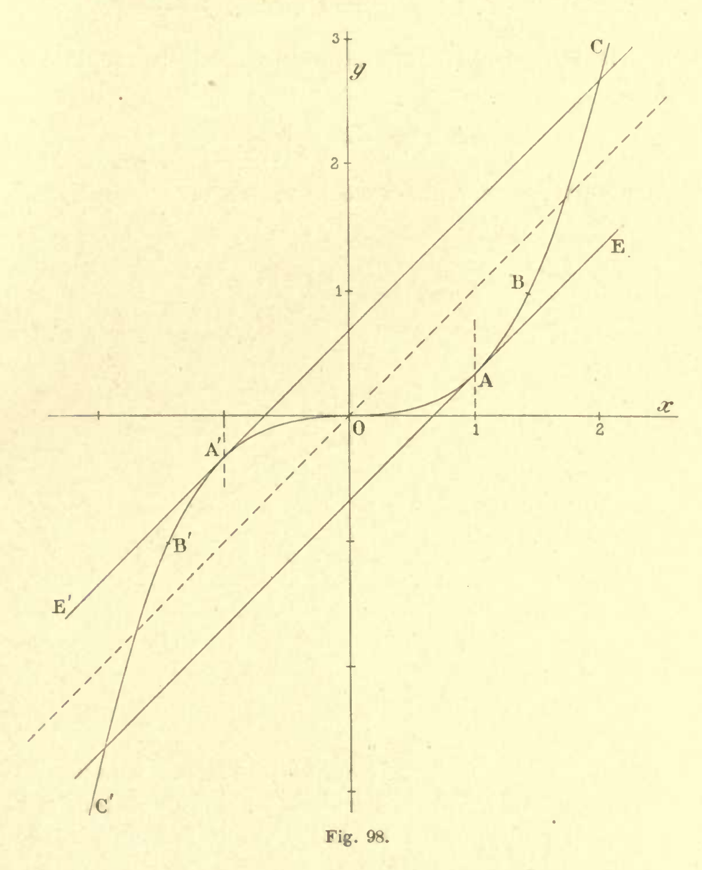


Fig. 98.

nous observons que les branches infinies de la cubique ne jouent aucun rôle dans la recherche de l'enveloppe : nous pouvons limiter la courbe en B et B′ sans y rien modifier. Il sera donc entendu que nous ne prendrons des courbes que les portions nécessaires à la définition des enveloppes considérées.

Pour en finir avec notre exemple, le point de tangence qui appartient à la courbe (1) et à son enveloppe (2) a pour abscisse :

$$x = p \pm 1.$$

130. Mouvement des projectiles; parabole de sûreté. Mirage.

1°. — Considérons un mobile qui se meut dans un milieu non résis-

tant. Il part avec une vitesse V ; la ligne de visée fait l'angle α avec l'horizontale. La composante horizontale de la vitesse est *uniforme ;* la composante verticale est *uniformément retardée.*

On a donc (fig. 99) :

$$x = V\cos\alpha \,.\, t, \qquad y = V\sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2}gt^2. \qquad (1)$$

Éliminant le temps entre ces équations, on trouve la trajectoire parabolique :

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Recommençons l'expérience avec la même vitesse initiale V, mais

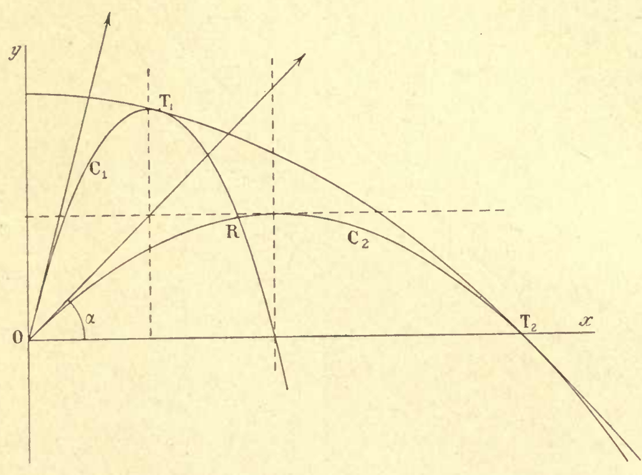


Fig. 99.

en donnant à l'angle α successivement toutes les valeurs possibles. Nous définissons un faisceau de paraboles : cherchons leur enveloppe.

Dérivons (2) par rapport à α. On trouve après des réductions aisées :

$$\mathrm{tg}\,\alpha = V^2 : (gx), \qquad x = V^2 : (g\,\mathrm{tg}\,\alpha). \qquad (3)$$

Le point d'intersection de la parabole (2) et de la verticale (3) est le point où la parabole touche son enveloppe. Éliminons α entre (2) et (3). Il vient :

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V^2}.$$

C'est une parabole, *dite de sûreté.*

Pour $x = 0, \quad y_0 = V^2 : 2g ;$

$y = 0, \quad x_0 = V^2 : g = 2y_0.$

Il est impossible d'atteindre les points qui sont *au-dessus* de la parabole de sûreté ; on peut, au contraire, atteindre *de deux manières*

ceux qui sont *au-dessous*. Autrement dit, par tout point R de la région accessible passent deux courbes du faisceau (2).

2°. — On retrouve exactement le même problème dans la théorie des *rayons lumineux courbes* et du *mirage*. Une loi simple de variation de l'indice de réfraction fournit des rayons paraboliques qu'on peut ramener à la forme (2), ou à la forme équivalente :

$$x^2 - ay = a(x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha);$$

α définit encore la tangente à l'origine. L'équation de l'enveloppe est :

$$x^2 = a(a + 2y).$$

Par tout point compris dans cette parabole passent *deux* trajectoires lumineuses : c'est à cette circonstance qu'est dû le mirage.

131. Enveloppe d'une droite de longueur l constante qui s'appuie par ses extrémités sur deux droites rectangulaires.

On peut prendre la droite sous la forme (fig. 100) :

$$y = x \operatorname{tg} \theta + l \sin \theta; \quad (1)$$

θ est le paramètre variable. Dérivons (1) par rapport à θ :

$$x = -l \cos^3 \theta. \quad (2)$$

Il faut éliminer θ entre les équations (1) et (2).

Élevons les deux membres de (1) au carré ; remplaçons x par sa valeur tirée de (2) ; on trouve aisément :

$$y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} \sin^2 \theta.$$

Remplaçons $\sin^2 \theta$ par sa valeur tirée de (2) ; on a :

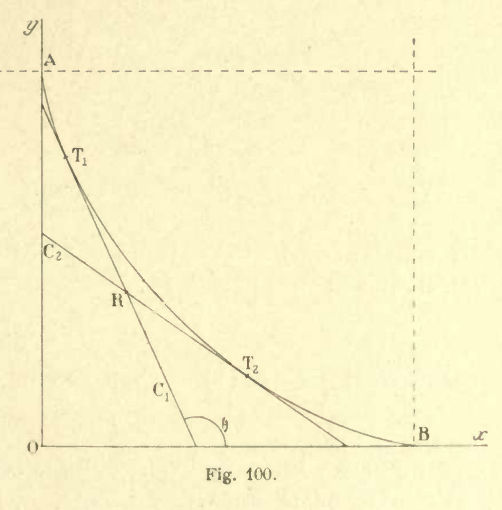


Fig. 100.

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}; \qquad \text{et enfin :} \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Nous avons déjà rencontré cette courbe au § 102, sous le nom d'*hypocycloïde à quatre rebroussements*. On peut la considérer comme la projection de la développée de l'ellipse (fig. 88) sur un plan passant par le grand axe et convenablement incliné. Elle est représentée fig. 101.

132. Enveloppe d'une droite qui détermine avec les axes un triangle d'aire constante. Généralisation.

1°. — On peut mettre l'équation de la droite sous la forme :

$$y = -\frac{p^2 x}{S} + p. \quad (1)$$

Pour $x=0$, on a $y=p$; pour $y=0$, $x=S:p$. Le pro-

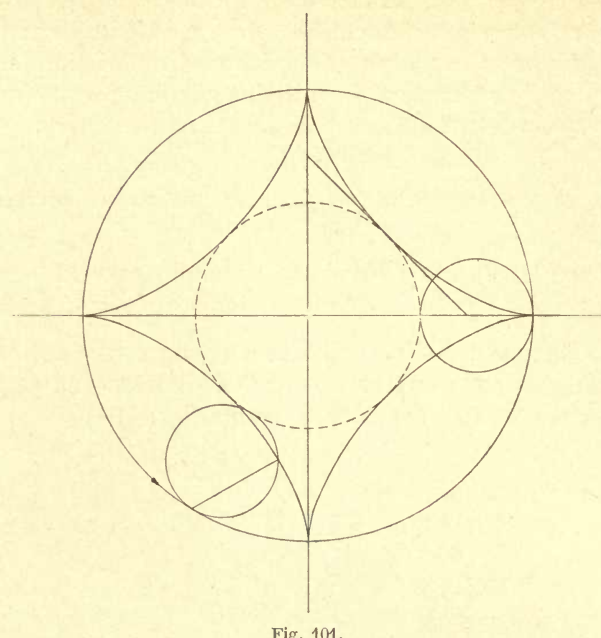


Fig. 101.

duit constant $xy=S$, représente le double de l'aire du triangle.

Dérivons par rapport à p :

$$p=S:2x. \tag{2}$$

Éliminons p entre (1) et (2) ; il vient :

$$xy=S:4;$$

l'enveloppe est une *hyperbole équilatère.*

2°. — Généralisation.

Si l'enveloppée est de la forme :

$$p^2L+2pM+R=0, \tag{1}$$

où L, M, R sont des fonctions quelconques des coordonnées, l'enveloppe a pour équation : $M^2=LR$.

Cela revient à écrire qu'en résolvant (1) par rapport à p, on trouve deux racines égales. Nous interpréterons plus loin ce résultat.

133. Enveloppe du faisceau d'ellipses du § 114.

Considérons le faisceau :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\delta, \tag{1}$$

où δ est le paramètre variable. La dérivation par rapport à δ donne les conditions :

$$\sin\delta = 0, \qquad \cos\delta = xy : ab. \tag{2}$$

La première substituée dans (1) fournit les diagonales d'un rectangle dont les côtés, de longueurs $2a$ et $2b$, sont parallèles aux axes de coordonnées. Cette solution correspond aux ellipses évanouissantes du faisceau.

Substituons la seconde condition dans (1) ; l'équation devient après des transformations simples :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 ; \qquad x = \pm a, \qquad y = \pm b.$$

L'enveloppe est le rectangle défini ci-dessus.

Du reste, ces résultats étaient évidents *a priori*.

134. Remarque sur les enveloppes.

1°. — Dans tous les exemples que nous avons traités, un point R quelconque de la portion du plan que recouvrent les courbes *enveloppées*, se trouve sur *deux* de ces courbes C_1 et C_2. Parcourons celles-ci toujours dans le même sens. Si pour C_1 nous rencontrons *d'abord* le point de tangence T_1 avec l'enveloppe, *ensuite* le point R, c'est l'inverse pour C_2 : nous rencontrons d'abord le point R, ensuite le point de tangence T_2 avec l'enveloppe.

Cette disposition est nécessaire pour que, les deux courbes se rapprochant indéfiniment, les trois points T_1, R, T_2, finissent par se confondre.

Résolvons l'équation $f(x, y, p) = 0$, par rapport à p. Soit :

$$p = \varphi(x, y),$$

la solution. D'après ce qui précède, il faut que pour le même système de valeurs x, y, le paramètre ait deux valeurs différentes. *Ces valeurs deviennent égales précisément si le point x, y, est sur l'enveloppe*. On comprend maintenant le résultat énoncé au § 132.

Par exemple, pour le cercle (2) du § 129, on peut écrire :

$$p = x \pm \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Soit x, y, les coordonnées d'un point compris dans la bande accessible ; il existe deux cercles qui y passent ; ils correspondent aux paramètres :

$$p_1 = x + \sqrt{r^2 - y^2}, \qquad p_2 = x - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Pour obtenir le point de l'enveloppe, on doit poser :

$$p_1 = p_2, \qquad y = \pm r.$$

2°. — Tout ce que nous avons dit, s'applique aux tangentes d'une courbe. On peut les considérer comme les *enveloppées* de cette courbe qui devient l'*enveloppe* de ses tangentes. La courbe limite la région

du plan que ne peuvent recouvrir les tangentes. D'un point extérieur R suffisamment voisin, nous pouvons généralement mener deux tangentes qui touchent la courbe en des points T_1 et T_2 situés de part et d'autre de R.

3°. — Démontrons analytiquement cette propriété des tangentes. Leur équation générale s'écrit (§ 30) :

$$\frac{x-\xi}{d\xi}=\frac{y-\eta}{d\eta}, \qquad (x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi}=y-\eta, \tag{1}$$

où x, y, sont les coordonnées courantes :

Les quantités ξ, η, et par suite $d\eta : d\xi$ sont fonction d'un paramètre p. Nous pouvons en effet définir la courbe par les relations :

$$\xi=\varphi(p), \qquad \eta=\chi(p), \qquad d\eta : d\xi=\psi(p). \tag{2}$$

Différentions (1) par rapport au paramètre :

$$(x-\xi)\frac{d\psi}{dp}-\psi\frac{d\xi}{dp}=-\frac{d\eta}{dp}, \qquad \text{ou :} \qquad (x-\xi)\frac{d\psi}{dp}=0,$$

en vertu des relations (2).

Si $d\psi : dp$ n'est pas identiquement nul, nous devons poser :

$$x=\xi, \qquad \text{et, en vertu de (1) :} \qquad y=\eta.$$

L'enveloppe des tangentes est la courbe (2) elle-même.

La conclusion n'est plus exacte si l'on a identiquement :

$$\frac{d\psi}{dp}=0, \qquad \psi=C^{te}=a, \qquad \eta=a\xi+b.$$

La courbe proposée est une droite avec laquelle se confondent ses tangentes.

COROLLAIRE.

L'enveloppe des normales à une courbe est la développée de cette courbe. En effet, toutes les normales sont tangentes à la développée (§ 95). Ce corollaire présente un grand intérêt, car pratiquement on forme l'équation de la développée en la considérant (non comme le lieu des centres de courbure), mais comme l'enveloppe de la normale.

135. Courbes roulantes.

1°. — Imaginons une courbe γ qui se déplace dans le plan sans se déformer (fig. 102). Dans sa position ABCDA, elle a par rapport aux axes Ox, Oy, les équations :

$$x=f(s), \qquad y=F(s). \tag{1}$$

s est l'arc de courbe compté à partir du point A, par exemple, dans le sens ABCD.

Les équations (1) donnent la forme de la courbe (par élimination de s) ; elles permettent aussi de repérer les différents points par leurs distances à l'un d'eux comptée sur la courbe même.

Déplaçons la courbe et simultanément les axes de coordonnées ;

elle vient en $A_1B_1C_1D_1A_1$, tandis que les axes vont en O_1x_1, O_1y_1. Nous avons évidemment encore :

$$x_1 = f(s), \qquad y_1 = F(s), \tag{2}$$

puisque rien n'est changé, sinon la position absolue dans l'espace.

Soit alors a, b, les coordonnées du point O_1, et θ l'angle que

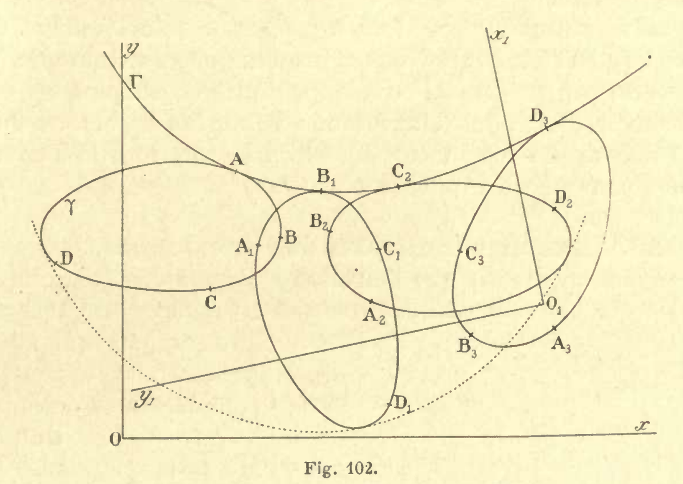


Fig. 102.

fait O_1x_1 avec Ox. Les formules de transformation du § 78 donnent :

$$x_1 + a = x \cos\theta + y \sin\theta,$$

$$y_1 + b = -x \sin\theta + y \cos\theta.$$

Les équations (2) deviennent :

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta - a &= f(s), \\ -x\sin\theta + y\cos\theta - b &= F(s). \end{aligned} \tag{3}$$

Telles sont les équations les plus générales d'une courbe qui se déplace dans un plan *sans se déformer*. Les quantités θ, a, b, sont fonctions d'un paramètre p qui est l'*opérateur* du déplacement.

Nous pouvons déterminer l'enveloppe des courbes dans leur déplacement. Si la courbe est fermée (ce qui est le cas des figures 97 et 100), l'enveloppe possède généralement deux branches limitant une portion du plan.

2°. — Jusqu'ici rien de particulier.

Mais nous pouvons (c'est alors qu'intervient le *roulement*) imposer la condition que les arcs (tels que AB_1) compris entre deux points de tangence de la courbe mobile avec son enveloppe, soient égaux identiquement aux arcs correspondants (tels que AB) de la courbe enveloppée. Dans le cas général, c'est-à-dire si nous prenons arbitrairement les fonctions θ, a, b, du paramètre p, la condition précédente n'est pas satisfaite ; *il y a glissement de l'enveloppée sur*

l'enveloppe. La suppression du glissement impose une relation entre θ, a, b.

3°. — Le problème, tel que nous venons de le poser, serait généralement inextricable. En fait, on se donne l'enveloppe et l'enveloppée ; on cherche à déterminer θ, a, b, de manière que le roulement ait lieu sans glissement.

C'est ainsi que nous procédons à propos de la cycloïde et des épicycloïdes (§§ 100 et 102). Nous nous donnons l'enveloppée (qui est un cercle de centre C) et l'enveloppe (qui est, suivant les cas, une droite ou un cercle) ; nous déterminons d'abord la trajectoire du centre C (c'est une droite ou un cercle), enfin la rotation de l'enveloppée nécessaire pour que le roulement ait lieu.

136. Branches multiples des enveloppes.

1°. — Nous avons dit que l'enveloppe séparait les régions du plan respectées par l'enveloppée dans son mouvement et sa déformation, des régions qui ne le sont pas. Mais il peut arriver que certaines régions soient recouvertes deux fois, d'autres une seule, d'autres complètement respectées. C'est dire que l'enveloppe peut avoir des branches multiples qui se coupent. On rencontre à chaque instant de tels phénomènes dans l'étude des Caustiques optiques (§ 137).

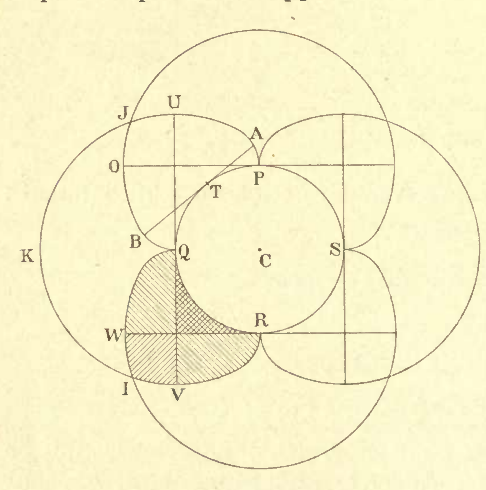


Fig. 103.

2°. — Pour fixer les idées, prenons comme enveloppée une ellipse infiniment aplatie et se réduisant à son grand axe ; autrement dit, prenons le segment de droite AB. Faisons-le rouler sur le cercle PQRS. Son enveloppe se compose d'abord de ce cercle, ensuite du lieu de ses extrémités. Pour simplifier la figure, prenons la longueur AB égale au quart de la circonférence.

Quand la droite passe de la position PO à la position QU, ses extrémités décrivent deux arcs PU, OQ, de développante de cercle (§ 99). Il semble que la proposition invoquée au § 129 ne s'applique plus : la droite n'est pas tangente à la courbe énoncée comme enveloppe. La proposition s'applique, si nous considérons la droite comme une ellipse évanouissante ; ses extrémités ont un rayon de courbure nul.

A partir de la position QU, la droite pivote sur son extrémité Q ;

l'autre extrémité décrit la demi-circonférence UV. Et ainsi de suite.

Il est facile de voir que le plan est partagé en cinq régions.

L'une est formée des portions intérieures au cercle C et des portions extérieures aux diverses branches de l'enveloppe. Elle n'est pas touchée par l'enveloppée.

La seconde région se compose des quatre aires identiques à IWQBOJKI ; elles ne sont recouvertes qu'une fois.

La troisième région se compose de quatre aires identiques, dont l'une est ombrée du nord-est au sud-ouest. Elles sont recouvertes deux fois, dans le pivotement sur deux points du cercle à 90° l'un de l'autre. Celle qui est ombrée, est recouverte d'abord pendant le pivotement sur Q, ensuite pendant le pivotement sur R.

La quatrième région se compose de quatre aires identiques, dont l'une est ombrée du nord-ouest au sud-est. Elles sont recouvertes deux fois. Celle qui est ombrée est recouverte pendant le pivotement sur Q, ensuite pendant le roulement sur QR.

La cinquième région est formée des quatre aires identiques, dont l'une est ombrée, de deux systèmes de hachures. Elle n'est touchée qu'une fois et pendant le roulement de la droite.

3°. — Si la droite était lumineuse et tournait d'un mouvement uniforme assez rapide pour que la persistance des impressions lumineuses nous montrât un éclairement permanent, les cinq régions nous apparaîtraient séparées par des lignes de discontinuité dans l'éclairement. A l'intérieur de chaque région, au contraire, l'éclairement serait continu.

137. Courbes caustiques.

Le point lumineux S émet des rayons qui rencontrent une courbe ABC. Ils se réfléchissent en faisant avec la normale à la courbe un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. On appelle *ligne caustique* la courbe enveloppe des rayons réfléchis (fig. 104).

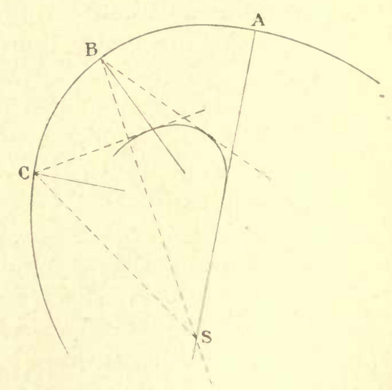
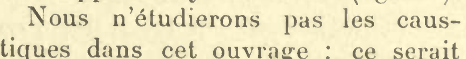


Fig. 104.


Nous n'étudierons pas les caustiques dans cet ouvrage : ce serait faire double emploi avec le Cours d'Optique géométrique (Physique, IV).

Déplacement d'une figure invariable.

138. Déplacement fini dans son plan d'une figure invariable plane.

On peut transporter dans son plan une figure invariable d'une

position F à une autre position F′ quelconque au moyen d'une rotation (fig. 105).

Réduisons la figure dans sa position F aux deux points A et B, dans sa position F′ aux deux points A′ et B′. Joignons AA′, BB′. Élevons des perpendiculaires au milieu de ces droites : elles se coupent au point C. On a :

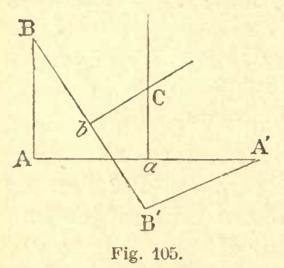


Fig. 105.

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$, par hypothèse ;

$\overline{AC} = \overline{A'C}$, $\overline{BC} = \overline{B'C}$, par construction.

Les triangles ABC, A′B′C (dont on tracera les côtés) sont égaux. Au moyen d'une rotation de centre C et d'angle :

$$ACA' = BCB' = BCA + ACB' = B'CA' + ACB',$$

on peut donc amener la figure de sa position F à sa position F′.

139. Déplacement continu dans son plan d'une figure plane. Centre instantané de rotation.

Considérons une figure se déplaçant d'un mouvement continu dans son plan. Autrement dit, *soit deux plans : l'un fixe, l'autre mobile, que nous déplaçons sur le plan fixe.*

Pour que le plan mobile passe de la position F_1 à la position très voisine F_2, nous devons, d'après le paragraphe précédent, utiliser une rotation infiniment petite autour d'un point C_1 du plan fixe ; C_1 s'appelle le *centre instantané de rotation* relatif à la position F_1 du plan mobile.

Pour que le plan mobile passe ensuite de F_2 à F_3, de F_3 à F_4..., nous devons utiliser une série de rotations infiniment petites autour d'une série de points C_2, C_3,... qui forment une courbe continue C dans le plan fixe : *c'est le lieu dans ce plan des centres instantanés de rotation.*

Pour chaque position du plan mobile, marquons sur lui le point qui coïncide avec le centre actuel de rotation (point par conséquent actuellement immobile). Le lieu de ces points forme sur le plan mobile une courbe continue Γ, que nous retrouverons plus loin.

Du paragraphe précédent résultent des corollaires évidents.

1°. — Les normales menées au même instant sur les trajectoires de tous les points du plan mobile, passent par le même point du plan fixe qui est le centre instantané de rotation pour la position considérée du plan mobile.

2°. — Les arcs élémentaires décrits en même temps par tous les points du plan mobile, sont des arcs de cercle ayant le centre instantané pour centre ; ils correspondent à la même rotation élémentaire : ils sont donc proportionnels à la distance des points au centre instantané.

Autrement dit : appelons V la vitesse linéaire d'un point P, ω la

vitesse angulaire instantanée de rotation, r la distance du point P au centre instantané. On a :

$$V = \omega r.$$

Pour un autre point P′, on aurait :

$$V' = \omega r' ; \quad \text{d'où :} \quad V : V' = r : r'.$$

En particulier, le point du plan mobile qui coïncide avec le centre instantané de rotation est actuellement immobile.

3°. — Pour connaître le centre instantané, il suffit de connaître les tangentes actuelles aux trajectoires de deux points quelconques du plan mobile. Pour connaître le lieu du centre instantané, il suffit de connaître les trajectoires de deux points quelconques.

Inversement si, par un procédé quelconque (par exemple, celui qui vient d'être indiqué), nous pouvons déterminer la position actuelle du centre instantané, nous connaissons les normales (et par suite les tangentes) aux trajectoires de tous les points P du plan mobile pour la position actuelle. Il suffit de joindre ces points P au centre instantané pour obtenir les normales ; des droites perpendiculaires passant par les points P sont les tangentes.

Voici trois exemples fondamentaux : deux points du plan mobile sont assujettis à décrire : 1° deux droites du plan fixe (ellipsographe) ; 2° une droite et un cercle (système bielle-manivelle) ; 3° deux cercles (parallélogramme de Watt).

140. Droite invariable dont les extrémités décrivent deux droites fixes. Ellipsographes.

Nous allons démontrer qu'un point quelconque du plan mobile décrit une ellipse. Nous savons (§ 108) qu'un point quelconque d'une droite dont deux points décrivent deux droites rectangulaires, décrit une ellipse ; c'est sur ce théorème que repose la construction de l'*ellipsographe*. Il s'agit de ramener le problème actuel à ce cas particulier.

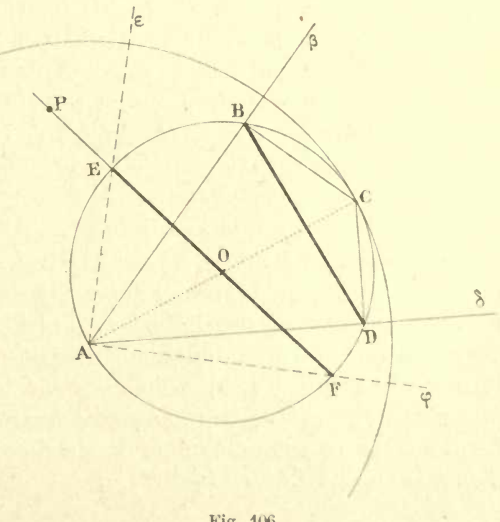


Fig. 106.

1°. — Cherchons le lieu des points du plan mobile qui décrivent des droites en même temps que les points B et D (fig. 106).

Par le point A (intersection des droites fixes β et δ) et les points B et D, menons une

circonférence. Quand BD se déplace suivant la loi imposée, cette circonférence est entraînée, *mais passe constamment par le point* A. Cela résulte de la constance de la corde BD et aussi de l'angle $\beta A \delta$; l'arc BD qui mesure cet angle invariable, et auquel correspond une corde BD invariable, doit appartenir à une circonférence de rayon invariable et passant par le sommet A de l'angle.

Je dis qu'un point quelconque E de cette circonférence décrit une droite ε passant par le point A. En effet, à l'arc invariable BE doit correspondre un angle constant $\beta A \varepsilon$.

2°. — Il existe donc dans le plan mobile une infinité de points (situés sur une circonférence) qui décrivent simultanément des droites se coupant en un même point.

Par suite, on peut remplacer le mouvement imposé par le glissement sur deux droites *rectangulaires* fixes $A\varepsilon$, $A\varphi$, d'un segment invariable EF lié au plan mobile.

L'opération est possible d'une infinité de manières ; il suffit que EF soit un diamètre du cercle ci-dessus construit.

3°. — Soit enfin à déterminer la trajectoire d'un point quelconque P du plan mobile.

C'est une ellipse, puisqu'on l'obtient en imposant à deux points E, F, d'une droite PO passant par P, des trajectoires rectilignes et rectangulaires (§ 108). Les axes de l'ellipse sont dirigés suivant $A\varepsilon$ et $A\varphi$; leurs demi-longueurs sont égales à EP et FP.

4°. — Si, conservant l'angle $\beta A \delta$, nous modifions la longueur BD, nous obtenons des ellipses homothétiques des précédentes. La proposition est évidente d'après la théorie des projections qu'on trouvera au Chapitre XVII. Le *point de vue* est un point d'une perpendiculaire élevée en A sur le plan fixe. Les plans de projection sont tous parallèles entre eux et au plan fixe.

5°. — Le centre instantané de rotation, correspondant à la position actuelle du plan mobile, est le point C diamétralement opposé au point A. On l'obtient en menant des perpendiculaires en B sur $A\beta$, en D sur $A\delta$, en E sur $A\varepsilon$,...

Le lieu C des points C sur le plan fixe est donc une circonférence de centre A et de rayon $\overline{AC} = 2\,\overline{OC}$. Le lieu Γ des points C sur le plan mobile est évidemment le cercle de centre O et de rayon AO lui-même. *Nous montrerons plus loin* (il est du reste évident, en vertu de la définition du roulement sans glissement et de la remarque qui termine le *2°* du § 129) *qu'on obtient le même mouvement du plan mobile en faisant rouler sans glissement le cercle* Γ *sur le cercle* C. Le mouvement est épicycloïdal : le dispositif est connu sous le nom *d'engrenage de Lahire* (§ 102).

141. Système bielle-manivelle.

1°. — Le point A du plan mobile décrit le cercle de centre O et

de rayon OA (fig. 107). Le point B décrit la droite OD que, pour simplifier, nous supposons passer par le centre du cercle.

Le centre instantané de rotation est à l'intersection de la droite OA (normale au cercle trajectoire du point A) et de la perpendiculaire élevée en B sur la droite OD trajectoire du point B.

La figure 107 représente la trajectoire du point P du plan mobile. Dans sa position P, la droite CP est normale à la trajectoire.

2°. — Nous laissons au lecteur le soin de construire le lieu du

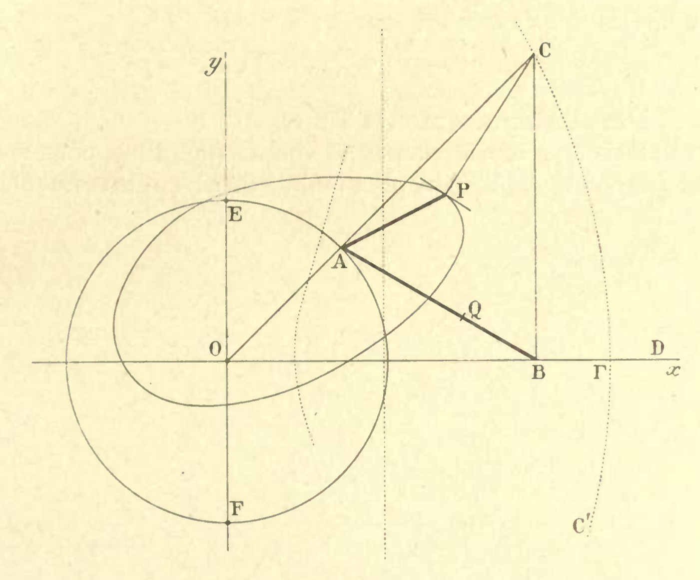


Fig. 107.

centre instantané (indiqué en pointillé sur la figure). Il vérifiera l'existence *possible* d'une asymptote verticale qui correspond au passage du point A aux extrémités du diamètre EF. Le centre instantané est alors à l'infini : la *rotation* instantanée devient une *translation* instantanée ; tous les points de la figure invariable décrivent des arcs parallèles à OD, avec des vitesses égales.

Le lecteur étudiera aussi les variations de la vitesse du point B, en supposant constante la vitesse angulaire de rotation du point A autour de l'axe O.

3°. — Cherchons l'équation de la trajectoire d'un point quelconque Q de la droite AB. Soit X, Y, les coordonnées du point A, ξ l'abscisse du point B, R le rayon du cercle, l la longueur invariable AB. On a :

$$X^2 + Y^2 = R^2, \qquad (X - \xi)^2 + Y^2 = l^2. \qquad (1)$$

Les coordonnées x, y, du point Q sont :

$$x = kX + (1-k)\xi, \qquad y = kY, \qquad (2)$$

en posant :
$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BA}} = k, \qquad \frac{\overline{BQ}}{\overline{QA}} = \frac{k}{1-k}.$$

L'équation cherchée s'obtient en éliminant X, Y, ξ, entre les quatre équations (1) et (2). Des équations (1) on tire :

$$X = \sqrt{R^2 - Y^2}, \qquad \xi = \sqrt{R^2 - Y^2} - \sqrt{l^2 - Y^2}.$$

Transportons dans la première équation (2) et utilisons la seconde ; multiplions les deux membres par k ; il vient :

$$kx = \sqrt{k^2R^2 - y^2} - (1-k)\sqrt{k^2l^2 - y^2}.$$

142. Parallélogramme de Watt.

Comme troisième cas fondamental simple (fig. 108), nous supposerons que les points A et A′ du plan mobile décrivent les circonférences

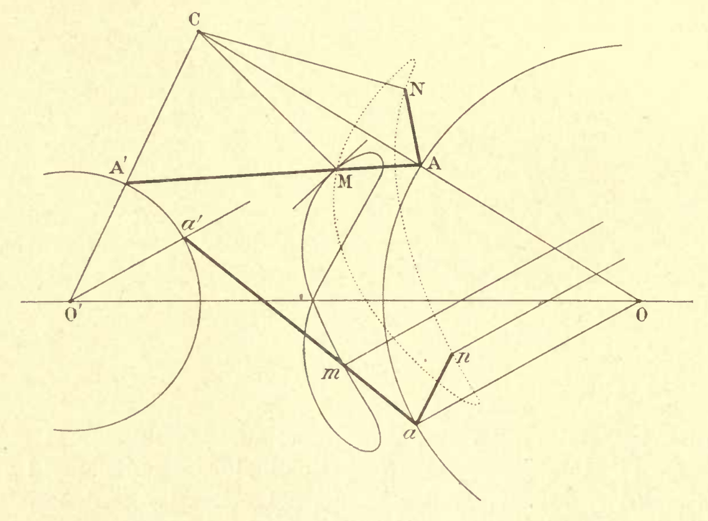


Fig. 108.

du plan fixe (de centres O et O′, de rayons R et R′). On trace aisément les trajectoires des points du plan mobile, en construisant un système articulé au moyen de bouts de carton, de punaises pour fixer les centres O et O′, de punaises renversées pour créer les articulations A et A′.

La figure 108 représente les trajectoires d'un point M pris sur la droite AA′, et d'un point N quelconque. Le centre instantané de rotation C qui correspond à la position A′AM du plan mobile, est déterminé par l'intersection des rayons OA, O′A′, qui sont les normales aux trajectoires de A et de A′.

Il existe deux positions du plan mobile pour lesquelles les rayons (Oa, $O'a'$, par exemple) sont parallèles. Le centre instantané de rotation est rejeté à l'infini ; les éléments de trajectoire de tous les points du plan mobile sont parallèles : la rotation instantanée est remplacée par une translation infiniment petite.

Le mécanisme connu sous le nom de *parallélogramme de Watt* rentre comme cas particulier dans le dispositif précédent (Mécanique rationnelle, § 126). On prend $\overline{OA} = \overline{O'A'}$.

On vérifiera par l'expérience que le milieu de AA' décrit une sorte de huit dont les branches sont très sensiblement rectilignes au voisinage de leur point de croisement : *la courbe possède deux longues inflexions*. C'est une *lemniscate* (§ 239) dans un cas particulier.

143. Généralisation de la construction du centre instantané.

1°. — Souvent le mouvement du plan mobile est défini par la trajectoire d'un de ses points, et par la condition qu'une courbe tracée sur lui glisse sur une courbe du plan fixe. Cherchons la position du centre instantané.

Par exemple (fig. 109, à droite) le point A du plan mobile décrit

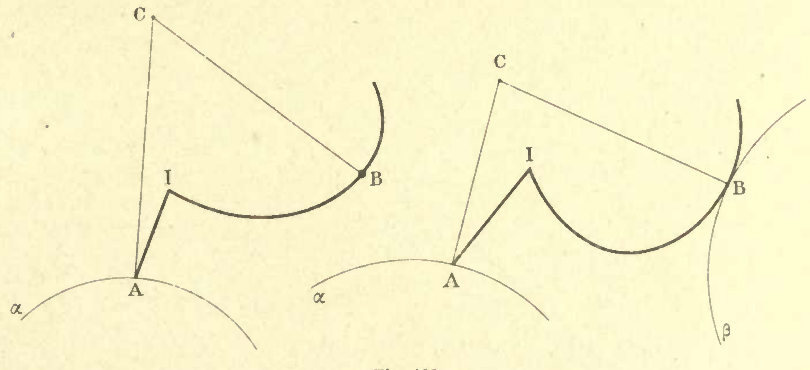


Fig. 109.

la trajectoire fixe α; la courbe IB du plan mobile glisse sur la courbe fixe β.

Considérons le point de tangence B comme lié au plan mobile pendant un temps infiniment petit. Il décrit la tangente en B à l'une ou l'autre courbes IB ou βB, tangente que nous pouvons considérer comme appartenant au plan fixe; la normale correspondante est donc la normale commune à ces courbes. Ce qui permet de déterminer le centre instantané C.

2°. — Comme cas particulier, la courbe β se réduit à un point. On est ramené à la figure 109 à gauche. Le point A du plan mobile décrit la trajectoire α, la courbe IB passe par le point fixe B. Le

centre instantané est à l'intersection des normales à la courbe α au point A et à la courbe IB au point B.

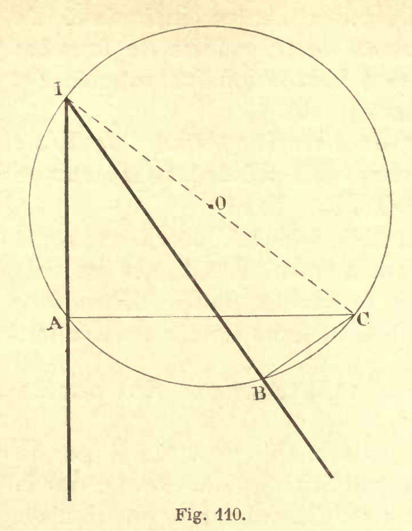


Fig. 110.

3°. — Enfin deux courbes du plan mobile peuvent être assujetties à rester tangentes à deux courbes fixes ou à passer par deux points fixes.

Soit, par exemple (fig. 110), deux droites du plan mobile assujetties à passer par les points A et B du plan fixe. Leur intersection I décrit évidemment un cercle. Menons les normales AC à AI, BC à BI; leur intersection C, centre instantané de rotation, est sur la circonférence lieu du point I, et il est diamétralement opposé à ce point.

144. Cas particulier : conchoïde, limaçon de Pascal,...

1°. — Comme cas particulier intéressant, considérons les courbes

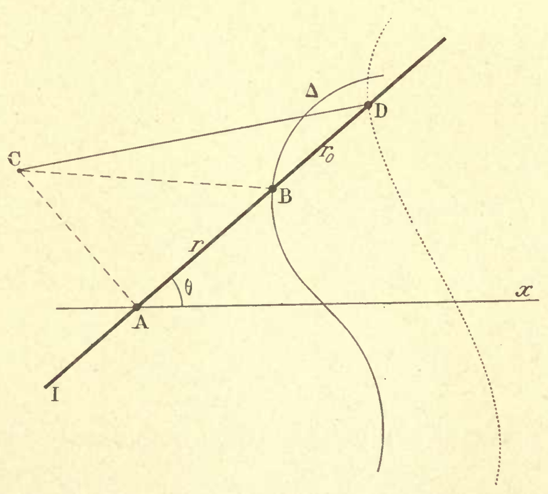


Fig. 111.

décrites par un point D d'une droite (fig. 111) assujettie à passer par le point fixe A et dont le point B décrit la trajectoire Δ.

Si l'on connaît l'équation de cette trajectoire en coordonnées polaires, $r = f(\theta)$, le point A étant pris comme origine, on a immédiatement l'équation de la trajectoire du point D :

$$r = f(\theta) + r_0.$$

Voici deux exemples.

2°. — CONCHOÏDE.

Prenons une droite pour trajectoire Δ (fig. 112). Posons $\overline{AO} = a$. Les différents points de la droite mobile décrivent des courbes appelées *conchoïdes*, et dont les équations rentrent dans la forme :

$$r = \frac{a}{\cos \theta} + r_0.$$

Toutes ces courbes admettent la droite Δ pour asymptote.

Quand r_0 est positif ou négatif, et compris entre 0 et $-a$, les courbes ont la forme I et II avec chacune deux points d'inflexion.

Quand r_0 est négatif et inférieur à $-a$, les courbes sont bouclées (IV).

Enfin si $r_0 = -a$, la courbe possède un point de rebroussement; la tangente de rebroussement est AO (§ 80, *3°*).

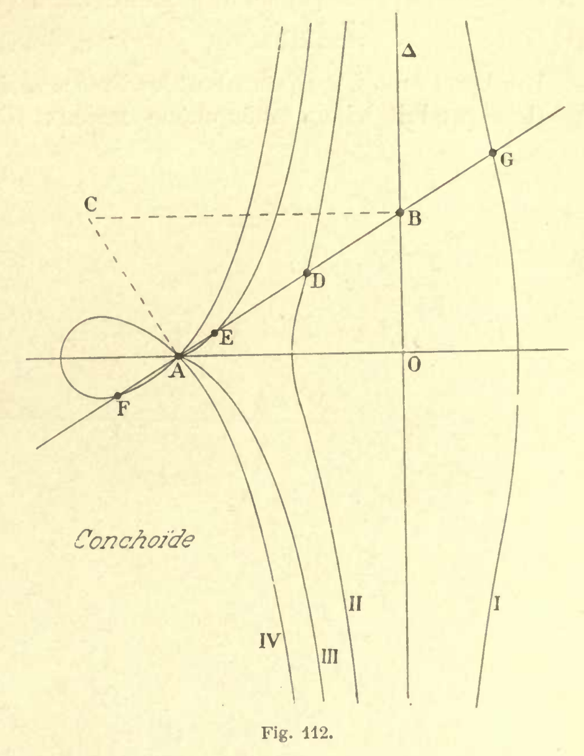


Fig. 112.

En effet, l'équation de la courbe devient :

$$r = a \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta};$$

r s'annule pour $\theta = 0$. Comme la courbe est évidemment symétrique par rapport à AO, AO est une tangente de rebroussement.

3°. — LIMAÇON DE PASCAL.

Prenons un cercle pour trajectoire Δ (fig. 113). Posons $AO = a$. Dans le triangle AOB on a :

$$R^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta, \qquad r = a\cos\theta \pm \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\theta}. \quad (1)$$

Telle est l'équation du cercle en coordonnées polaires. Par suite, l'équation générale des courbes décrites par un point D quelconque sera :

$$r = r_0 + a\cos\theta \pm \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\theta}. \quad (2)$$

La figure 113 représente deux courbes pour lesquelles on a donné à r_0 des valeurs égales et de signes contraires. Nous laissons au lec-

teur le soin de déterminer les diverses formes possibles, suivant les valeurs relatives de R, a, r_0.

Dans le cas particulier où le point A est sur le cercle $(a = R)$, les équations (1) et (2) se simplifient. On a :

$$r = 2R\cos\theta, \qquad r = r_0 + 2R\cos\theta. \qquad (1'), (2').$$

Les équations (2') représentent les *limaçons de Pascal* (§§ 149 et 237).

Il se produit ici un phénomène curieux. Tandis que, dans le cas

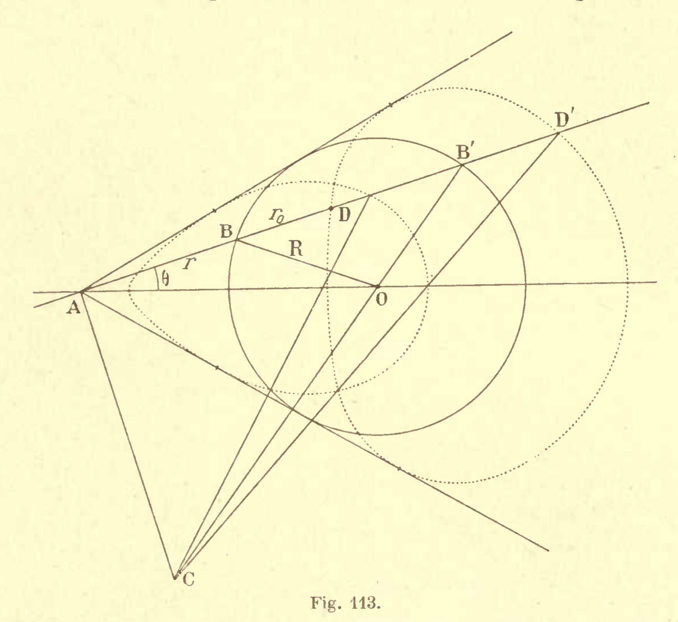


Fig. 113.

général, les courbes qui correspondent aux valeurs égales et de signes contraires $\pm r_0$ se ferment respectivement et sont indépendantes l'une de l'autre, ici au contraire on n'obtient une courbe fermée qu'en considérant *simultanément* les deux valeurs $\pm r_0$. Nous conseillons de construire les courbes pour une valeur r_0 et des valeurs de a de plus en plus voisines de R.

Les limaçons possèdent deux points d'inflexion pour $r_0 > 2R$; un rebroussement pour $r_0 = 2R$; enfin une boucle pour $r_0 < 2R$.

145. Podaires.

1°. — La figure invariable mobile peut être formée de deux droites rectangulaires assujetties : l'une à rester tangente à une courbe β, l'autre à passer par un point fixe A. Le lieu du point I s'appelle *podaire* de la courbe β par rapport au point A. On peut considérer la podaire de la courbe β comme le lieu des perpendiculaires abaissées du point A sur les tangentes à la courbe β.

Menons les normales AC à AI, BC à BI; C est le centre instan-

tané de rotation. Mais la figure AIBC est un rectangle. D'où la conséquence : *la normale en un point de la trajectoire du point* I *s'obtient en joignant ce point au milieu* M *de la droite qui joint le point fixe* A *au point actuel de tangence* B.

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés des podaires.

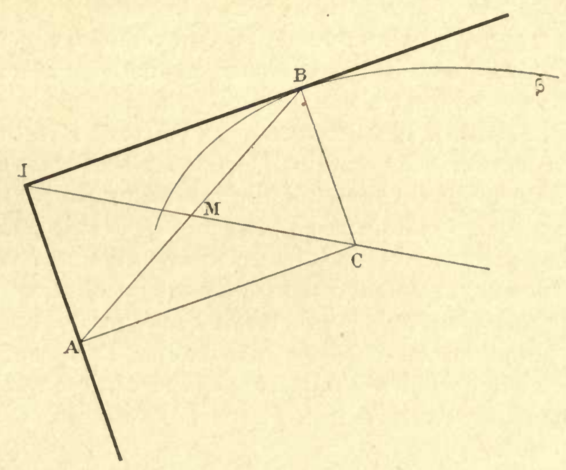


Fig. 114.

2°. — On peut généraliser la définition en supposant que l'angle BIA cesse d'être droit.

146. Roulement sans glissement d'une courbe du plan mobile sur une courbe du plan fixe.

1°. — Le mouvement du plan mobile peut être défini par le roulement sans glissement (§ 135) d'une courbe Γ de ce plan sur une courbe C du plan fixe.

Nous avons déjà dit (§ 100) qu'il se produit à chaque instant une rotation élémentaire autour du point de contact actuel *qui est le centre instantané de rotation*. La courbe C du plan fixe est donc le lieu des centres instantanés; la courbe Γ est le lieu des points du plan mobile qui coïncident successivement avec le centre instantané (§ 139).

On obtient les normales aux trajectoires des points du plan mobile en les joignant au point de tangence actuel des courbes roulantes C et Γ.

2°. — Il résulte de ce qui précède que tout mouvement d'un plan mobile sur un plan fixe est ramenable au roulement de deux courbes tracées respectivement dans ces plans ; autrement dit, peut être considéré comme *épicycloïdal*, le mot étant pris dans l'acception la plus large. On cherchera sur le plan fixe le lieu C des centres instantanés, et sur le plan mobile le lieu Γ du point qui pour chaque position du plan mobile coïncide avec le centre instantané.

Nous avons déjà trouvé (§ 140) un exemple de cette équivalence. On démontrera par un facile raisonnement géométrique que quand un cercle roule intérieurement sur un cercle de rayon double, chacun de ces points décrit un diamètre (voir § 102, la démonstration analytique).

Le dispositif est connu sous le nom d'*engrenage de Lahire.*

3°. — A propos des mouvements épicycloïdaux généraux, nous ferons une remarque curieuse. Nous savons que l'une des courbes C ou Γ peut être infinie : c'est ce qui a lieu, par exemple, dans le cas de la cycloïde (§ 100). Les deux courbes peuvent être l'une et l'autre infinies, et, comme cas particulier, *posséder des asymptotes.* La trajectoire d'un point du plan mobile peut alors devenir une courbe tout entière à distance finie; elle peut aussi devenir périodique.

La manière dont le roulement ne cesse pas d'être continu, malgré la présence des asymptotes, est intéressante à étudier de près. Elle ne se comprend bien qu'en effectuant réellement l'opération. Nous conseillons donc au lecteur de faire rouler l'une sur l'autre, par exemple, deux hyperboles équilatères égales et de chercher la trajectoire d'un point de l'axe réel de l'hyperbole mobile. Il trouvera une sorte de haricot.

Nous rencontrerons, au Chapitre XXI, deux exemples simples des cas ici énumérés (roulement d'une parabole et d'une hyperbole sur une droite : trajectoire des foyers).

Nous conseillons au lecteur de reprendre le problème de la bielle-manivelle (§ 141) et de construire les deux courbes C et Γ. La forme de la première est indiquée dans la figure 107. Nous lui laissons le plaisir de déterminer la forme de la seconde. Il verra le mouvement si simple bielle-manivelle obtenu par le roulement de deux courbes infinies dont la seconde possède deux asymptotes distinctes et plusieurs singularités.

Podaires.

147. Définition des podaires.

1°. — Le sommet d'un angle droit glisse sur une courbe ABCD (fig. 115), pendant qu'un de ses côtés passe par le point O (*pôle*).

L'autre côté (dit *côté tangent*) enveloppe une courbe BC'. La première courbe est la *podaire* de la seconde.

La podaire d'une courbe est, si l'on veut, le lieu des pieds C des perpendiculaires OC abaissées du point fixe O sur la tangente C'C à la courbe BC' (§ 145).

2°. — La courbe donnée et sa podaire sont tangentes pour tous les points de l'une ou de l'autre courbes qui sont à des distances

du point O maximums ou minimums. Car le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente coïncide alors avec le point de tangence.

3°. — Par le pôle O, menons la tangente OD à la podaire. Quand le point D se déplace très peu, la droite OD conserve une direction invariable; donc le *côté tangent* DD′ conserve lui-même une direction invariable. Deux positions voisines de ce côté se coupent à l'infini : DD′ est une asymptote de la courbe BC′.

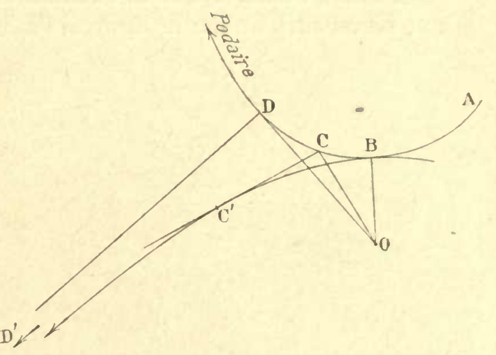


Fig. 115.

A mesure que C se rapproche de D, la droite CC′ coupe DD′ de plus en plus loin, mais toujours du côté D′. Aussitôt que C dépasse D, l'intersection a lieu du côté opposé à D′. Nous supposons que OD est une tangente ordinaire; il n'en est plus de même, si c'est une tangente d'inflexion.

4°. — Admettons qu'on puisse mener du pôle O une tangente OO′ à la courbe BC′ (fig. 116). Le point de la podaire qui correspond à O′ est évidemment le pôle O. Donc la podaire passe autant de fois par le pôle que du pôle on peut mener de tangentes à la courbe.

On vérifiera immédiatement que les tangentes à la podaire au point O sont normales au vecteur OO′ correspondant.

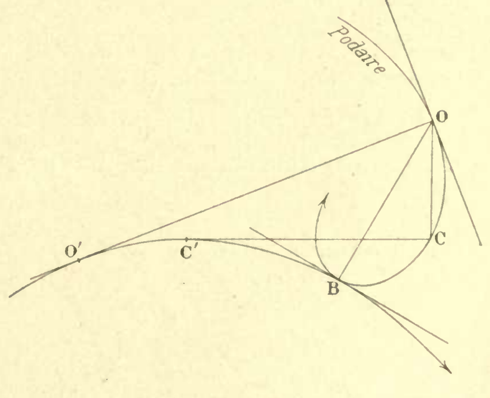


Fig. 116.

5°. — Le lecteur voudra bien méditer sur la comparaison des cas *3°* et *4°*. Quand une courbe passe par un point O, il est clair que de ce point on peut lui mener une tangente. Mais les cordes voisines de cette tangente se conduisent tout autrement que les cordes voisines de la tangente OD qu'on mène à la courbe d'un point O *qui lui est extérieur*.

Quand D se déplace de ds sur la podaire, la direction de la droite OD ne varie que d'un infiniment petit du second ordre, si dans sa position moyenne elle est tangente à la courbe. Au contraire, la

direction d'une corde qui va d'un point O d'une courbe à un point voisin, varie d'un infiniment petit du même ordre que le déplacement ds du point, bien que la corde devienne une tangente pour $ds = 0$.

148. Podaires en coordonnées polaires.

Pour bien comprendre la figure 117, le lecteur se reportera au § 92, dont nous utilisons une partie des résultats.

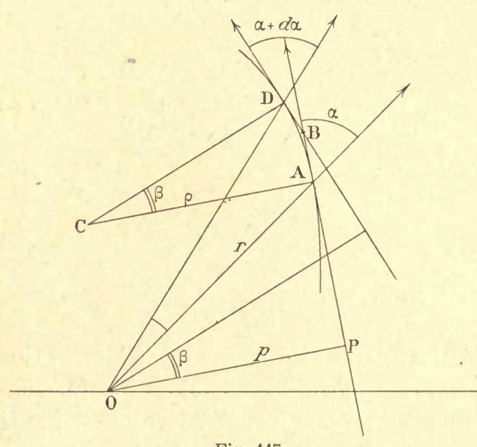


Fig. 117.

Menons les rayons vecteurs OA et OD faisant l'angle $d\theta$; menons les tangentes correspondantes, ainsi que les normales. Ces dernières se coupent au centre de courbure C.

Soit ρ le rayon de courbure ; on a :

$$\rho\beta = ds = \overline{AD}.$$

Du point O abaissons des perpendiculaires sur les tangentes. Posons $p = \overline{OP}$; p est le rayon vecteur de la podaire. Dans le triangle OAP rectangle en P, on a :

$$p = r \sin \alpha. \qquad \text{(I)}$$

D'une manière générale :

$$r d\theta = \sin \alpha \,.\, ds, \qquad dr = \cos \alpha \,.\, ds.$$

La considération du quadrilatère OABD donne :

$$\beta = d\theta + d\alpha.$$

On tire de ces relations :

$$\frac{ds}{\rho} = \beta = d\theta + d\alpha = \sin \alpha \frac{ds}{r} + d\alpha,$$

$$\frac{dr}{\rho \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{dr}{r} + d\alpha. \qquad (1)$$

Différentions (I) : $dp = r \cos \alpha \, d\alpha + \sin \alpha \, dr$,

$$\frac{dp}{r \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{dr}{r} + d\alpha. \qquad (2)$$

Comparons (1) et (2) ; il reste :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \frac{dp}{dr}. \qquad \text{(II)}$$

Cette formule est très employée dans la théorie du mirage.

149. Podaire du cercle.

1°. — Montrons que la podaire d'un cercle est un limaçon de Pascal. On a (fig. 118) :

$$p = \overline{AI} = \overline{\Omega D} - \overline{\Omega B} = r_0 + 2R\cos\theta,$$

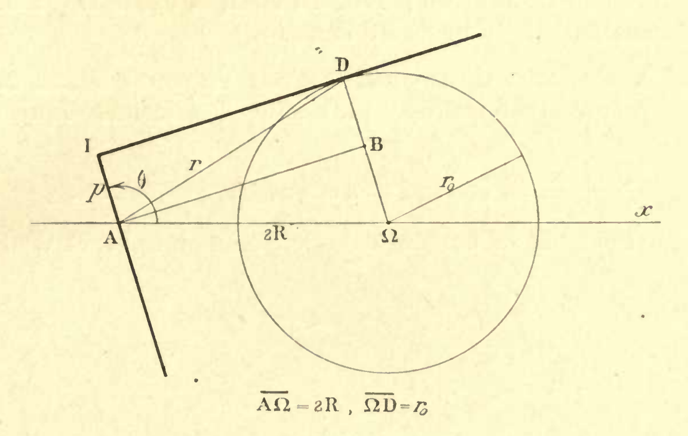


Fig. 118.

qui est précisément l'équation du § 144.

La figure 119 représente celle des formes du limaçon qui possède un point double.

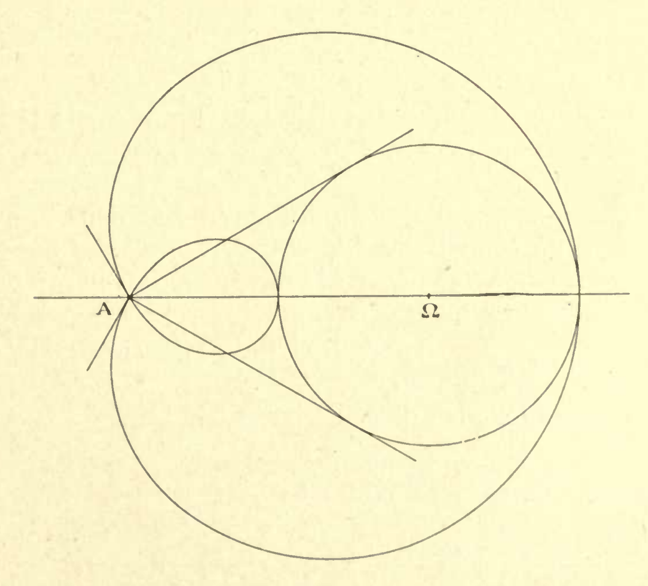


Fig. 119.

2°. — Exprimons le rayon vecteur p de la podaire en fonction du

rayon vecteur r du cercle. Dans les triangles rectangles IAD et BAΩ, on a :

$$r^2 - p^2 = \overline{\text{ID}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 = 4\text{R}^2 - (r_0 - p)^2,$$

$$r^2 - 2pr_0 = 4\text{R}^2 - r_0^2, \qquad rdr = r_0 dp, \qquad dp : rdr = 1 : r_0,$$

conformément au résultat du § 148. En effet, r_0 est le rayon de courbure (ici constant) de la courbe donnée.

150. Podaire d'une ellipse par rapport à son centre.

1°. — Prenons l'ellipse (fig. 120) sous les formes équivalentes (§ 107) :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1; \qquad \xi = a \cos u, \qquad \eta = b \sin u.$$

Les équations de la tangente AP en un point A, et de la nor-

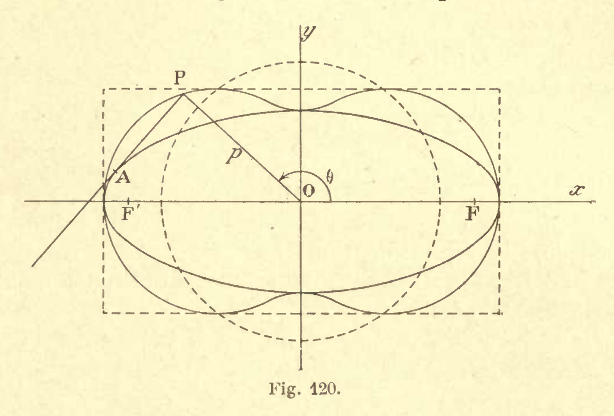


Fig. 120.

male OP abaissée de l'origine O sur la tangente, sont (§ 112) :

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1, \qquad \frac{x\eta}{b^2} - \frac{y\xi}{a^2} = 0. \qquad (1)$$

Le système x, y, qui satisfait à ces équations, représente les coordonnées du point P.

Élevons les équations (1) au carré; additionnons membre à membre; il vient :

$$p^2 = \overline{\text{OP}}^2 = x^2 + y^2 = 1 : \left[\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4}\right] = 1 : \left[\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}\right].$$

Exprimons u en fonction de θ. Écrivons que la pente de la droite OP est $\operatorname{tg}\theta$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{a^2}{b^2}\frac{\eta}{\xi} = \frac{a}{b}\operatorname{tg} u;$$

$$\frac{\sin^2 u}{b^2 \sin^2\theta} = \frac{\cos^2 u}{a^2\cos^2\theta} = \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

D'où enfin : $$p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta. \qquad (2)$$

Telle est l'équation de la podaire en coordonnées polaires p, θ.

2°. — Cette podaire est utilisée à chaque instant en Optique ondulatoire. En effet, quand une vibration transversale elliptique tombe sur un nicol, la vibration rectiligne qui passe, a pour amplitude la longueur du rayon vecteur de la podaire parallèlement à la section principale du nicol (fig. 121).

Partant de là, on retrouve l'équation (2) plus rapidement. Soit en effet :

$$\xi = a \cos u, \quad \eta = b \sin u, \quad (3)$$

les vibrations dirigées suivant les axes, vibrations qui constituent l'ellipse par leur résultante; la variable u est de la forme ωt. Considérons une droite $O\xi'$ faisant l'angle θ avec Ox. Projetons les vibrations (3) sur cette droite, et composons ces projections en une résultante unique. Faisons de même pour une droite $O\eta'$ à angle droit de la première. On trouve :

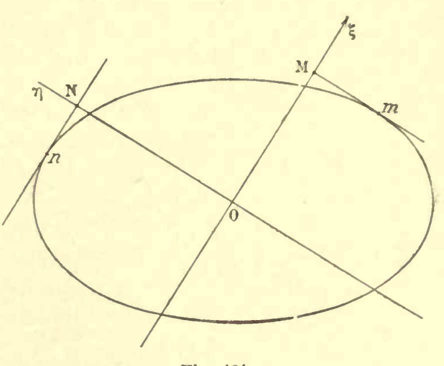


Fig. 121.

$$\xi' = a \cos \theta \cos u + b \sin \theta \sin u = p \cos (u - \alpha),$$

$$\eta' = - a \sin \theta \cos u + b \cos \theta \sin u = p' \sin (u - \beta).$$

Identifions ; il vient aisément :

$$p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta, \qquad p'^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

3°. — On a : $$p^2 + p'^2 = a^2 + b^2; \quad (4)$$

la somme des carrés des rayons vecteurs rectangulaires de la podaire est constante.

L'interprétation optique de cette proposition est fondamentale. L'énergie potentielle ou cinétique d'une vibration rectiligne est proportionnelle au carré de son amplitude. L'équation (4) nous apprend qu'on peut décomposer arbitrairement la vibration elliptique transversale en composantes rectilignes rectangulaires, sans que l'énergie totale soit modifiée.

4°. — L'équation de la podaire en coordonnées cartésiennes est :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2. \quad (5)$$

Nous savons déjà (§ 147) qu'elle est tangente à l'ellipse aux extrémités du grand axe et du petit axe. Cherchons quelles sont les ordonnées maxima. Différentions (5) :

$$(2x^2 + 2y^2 - a^2)xdx + (2x^2 + 2y^2 - b^2)ydy = 0.$$

Les maximums ou minimums de y correspondent à la condition

$$dy : dx = 0; \qquad x = 0, \qquad x^2 + y^2 = a^2 : 2.$$

Ils sont donc à l'intersection de la podaire et du cercle dont le centre est O et le rayon $a : \sqrt{2} = 0{,}71a$. Pour qu'ils existent, il faut que ce cercle coupe effectivement la podaire. Comme celle-ci est extérieure à l'ellipse, il faut qu'il coupe l'ellipse.

D'où la condition :

$$a^2 < 2b^2, \qquad \text{ou :} \qquad e < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La valeur de y pour les maximums et minimums est :

$$y_m = \pm \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

La condition $a^2 < 2b^2$ équivaut à écrire : $y_m > b$.

Elle exprime que la développée de l'ellipse est tout entière intérieure à l'ellipse (§ 116), comme on le verra en posant (fig. 88) :

$$-\overline{O\beta} < \overline{OB}.$$

Elle exprime encore que la podaire a des points d'inflexion.

CHAPITRE VIII

FONCTIONS DEFINIES PAR LEURS DÉRIVÉES

151. Définition du signe d'intégration $\int$.

1°. — Nous désignerons par le symbole :

$$S = \int_{x_0}^{x} y dx,$$

l'aire MNPQM, limitée par la portion MQ de l'axe Ox, par les

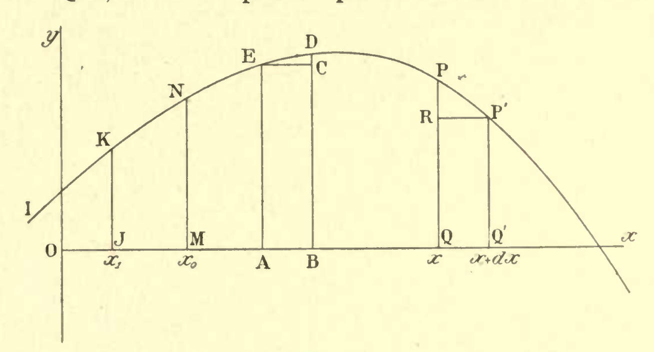


Fig. 122.

ordonnées MN, PQ, d'abscisses x_0 et x, enfin par la portion NP de la courbe INPP'... dont l'équation est $y = f(x)$.

x_0 et x s'appellent respectivement la *limite inférieure* et la *limite supérieure* de l'*intégrale* S.

L'intégrale s'énonce : *somme de x_0 à x de ydx.*

Supposons fixe l'ordonnée MN, et déplaçons l'ordonnée PQ, ce qui revient à modifier la limite supérieure x; l'aire est elle-même modifiée. Nous pouvons donc la considérer comme une fonction de x. *Par suite, en nous donnant la courbe $y = f(x)$, et l'ordonnée x_0 à partir de laquelle nous comptons les aires, nous définissons une certaine fonction de x :*

$$S = \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} y dx.$$

Il résulte immédiatement des définitions qu'on a :

$$\int_{x_0}^{x_0} y dx = 0.$$

Car l'intégrale étant prise entre deux ordonnées identiques, l'aire définie est évidemment nulle.

2°. — Changement de la limite inférieure.

Comparons les deux intégrales :

$$S_0 = \int_{x_0}^{x} y dx, \qquad S_1 = \int_{x_1}^{x} y dx,$$

où x_0 et x_1 sont deux constantes. Par définition, on a :

$$S_0 = \text{aire MNPQM}, \qquad S_1 = \text{aire JKPQJ};$$

d'où :

$$S_1 - S_0 = \text{aire JKNMJ};$$

$$\int_{x_1}^{x} y dx - \int_{x_0}^{x} y dx = \int_{x_1}^{x_0} y dx = \text{Constante}.$$

Changer la limite inférieure revient donc à faire varier d'une constante la valeur que prend l'intégrale pour *toutes* les valeurs de sa limite supérieure *variable* x.

152. Explication du symbolisme; dérivée d'une intégrale.

1°. — Montrons que le symbole *intégrale* ne fait que résumer et schématiser les opérations qu'il faut effectuer pour calculer l'aire, la courbe $y = f(x)$, étant donnée.

La méthode qui se présente le plus naturellement, consiste à tracer des ordonnées suffisamment voisines, à évaluer l'aire de chaque élément ainsi constitué, enfin à *sommer* ces aires élémentaires.

Soit un des éléments ABDE : posons $\overline{AB} = \Delta x$. Remplaçons l'arc de courbe ED par la corde ED; nous formons un trapèze. Appelons y l'ordonnée moyenne de ce trapèze, ordonnée évidemment équidistante des ordonnées AE, BD; l'aire élémentaire a pour expression :

$$y\Delta x.$$

Opérons de même pour tous les éléments. L'aire cherchée est approximativement :

$$\sum_{x_0}^{x} y\Delta x,$$

le symbole $\sum$ signifiant qu'on fait la somme de toutes les quantités analogues, comprises entre les ordonnées limites x_0 et x.

L'approximation est d'autant meilleure que les ordonnées sont plus voisines. L'évaluation serait rigoureuse si les *différences* Δx étaient remplacées par des *différentielles* dx; de sorte qu'on a :

$$\int_{x_0}^{x} y dx = \text{limite} \sum_{x_0}^{x} y\Delta x.$$

Reste à montrer comment l'évaluation de cette limite est possible, *non certes graphiquement*, mais grâce à la définition géométrique de la courbe $y = f(x)$.

2°. — Cherchons la dérivée de la fonction :

$$S = \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} y dx.$$

Par définition nous avons :

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} y dx = \text{aire MNPQM},$$

$$S(x + dx) = \int_{x_0}^{x+dx} y dx = \text{aire MNP'Q'M},$$

$$S(x + dx) - S(x) = \text{aire MNP'Q'M} - \text{aire MNPQM} = \text{aire QPP'Q'Q}, \quad (1)$$

à la condition que dx soit une quantité, non pas petite, mais infiniment petite, c'est-à-dire qui tend vers zéro. La relation (1) n'est rigoureusement vraie qu'à la limite, quand dx s'est annulé.

Or, avec une erreur qui s'annule avec dx, on peut poser :

$$\text{aire QPP'Q'Q} = y dx,$$

puisque l'aire du triangle curviligne RPP' est un infiniment petit du second ordre (§ 10), rigoureusement négligeable devant l'aire QRP'Q', quand dx s'annule.

Nous avons donc : $d \,.\, S(x) = y dx$, $\quad \frac{d}{dx} S(x) = y.$

D'où cette conséquence fondamentale : *Définir une fonction de* x *par l'aire* $S(x)$ *comprise entre la courbe* $y = f(x)$, *deux ordonnées* (*une ordonnée fixe et une ordonnée variable*) *et l'axe* Ox, *revient à définir cette fonction par sa dérivée.*

153. Fonction définie par sa dérivée.

Ainsi nous aboutissons à une conséquence formulée par les symboles :

$$S = \int_{x_0}^{x} y dx, \qquad \frac{dS}{dx} = y.$$

Les opérations d'intégration et de dérivation sont inverses. Intégrer la fonction $y = f(x)$, c'est chercher une fonction S dont y soit la dérivée ; S est appelée *fonction primitive* de y.

Montrons que la définition de l'intégrale est bien d'accord avec cette conséquence. Pour cela représentons par une courbe ABCD ... la fonction $y = f(x)$ donnée, et par une courbe A'B'C' ... la fonction S intégrale mesurant l'aire à partir de l'ordonnée d'abscisse x_0 (fig. 123).

1°. — Aux points C, E, l'ordonnée $y = f(x)$ change de signe. Comme nous comptons *positivement* les aires qui sont *au-dessus* de Ox $(y > 0)$, *négativement* celles qui sont *au-dessous* $(y < 0)$,

(cette convention résulte immédiatement de notre symbolisme) l'aire commence à décroître à partir de l'abscisse $\overline{OC}$. Donc il existe un maximum de la fonction $S = \varphi(x)$ sur l'ordonnée d'abscisse $\overline{OC}$.

A partir de l'abscisse $\overline{OE}$, l'ordonnée y redevient positive; la fonction $S = \varphi(x)$ recommence à croître; donc elle passe par un minimum pour $x = OE$.

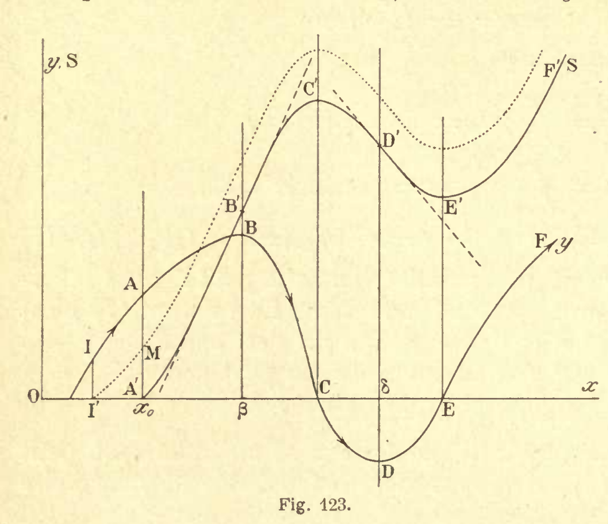


Fig. 123.

Nous concrétisons ainsi cette règle qu'*une fonction est maximum ou minimum quand sa dérivée s'annule* (§ 8).

2°. — La fonction S a une pente $dS : dx$ d'autant plus grande en valeur absolue que l'ordonnée y est plus grande en valeur absolue; autrement dit, que la courbe $y = f(x)$ est plus au-dessus ou au-dessous de Ox. Donc les maximums et les minimums de $y = f(x)$, tels que B, D, correspondent aux maximums et minimums de la pente pour S. Aux abscisses β et δ correspondent des points d'inflexion pour S.

Nous concrétisons ainsi cette règle que *les points d'inflexion d'une fonction* S *ont les abscisses qui annulent sa dérivée seconde* (§ 18) :

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = 0.$$

3°. — Nous savons qu'une fonction définie par sa dérivée, n'est connue qu'à une constante près (§ 7). Cette proposition est concrétisée par la considération des aires. Au lieu de l'ordonnée A'A, prenons I'I comme limite de l'aire à évaluer. La nouvelle courbe :

$$S_1 = \varphi_1(x) = \int_{x_1}^{x} y dx,$$

se déduit de la courbe $S = \varphi(x)$, en ajoutant à toutes les ordonnées une quantité invariable $\overline{A'M}$, représentative de l'aire I'IAA'I'. On obtient ainsi la courbe en pointillé, qui est la courbe en trait plein transportée de $\overline{A'M}$ parallèlement à Oy.

Pour la même abscisse, les pentes sont les mêmes sur les deux courbes. Leurs points d'inflexion, leurs maximums et minimums se correspondent.

4°. — Soit plusieurs courbes :

$$y_0=f_0(x), \qquad y_1=f_1(x), \qquad y_2=f_2(x) \ldots \qquad (1)$$

Posons : $$Y=y_0+y_1+y_2+\cdots$$

On a évidemment :

$$\int_{x_0}^{x} y_0dx+\int_{x_0}^{x} y_1dx+\ldots=\int_{x_0}^{x} Ydx.$$

Autrement dit, pour trouver la somme des aires limitées par les courbes (1), les mêmes ordonnées et l'axe Ox, on peut procéder de deux manières équivalentes : 1° évaluer séparément les aires et faire leur somme; 2° construire la courbe Y dont les ordonnées sont la somme *algébrique* des ordonnées des diverses courbes, puis évaluer l'aire limitée par cette courbe unique.

Inversement soit à calculer : $$\int_{x_0}^{x} Ydx;$$

on peut remplacer la courbe Y par un nombre quelconque de courbes telles que la somme de leurs ordonnées soit identiquement égale à l'ordonnée Y, évaluer les aires pour chacune des courbes et faire la somme de ces aires.

154. Interversion des limites. Signe des aires.

1°. — On a :

$$S=\int_{x_0}^{x} ydx=-\int_{x}^{x_0} ydx;$$

quand on intervertit les limites, on change le signe de l'intégrale.

En effet, pour toutes les valeurs de x, les ordonnées y sont les mêmes dans les deux intégrales.

Mais les accroissements dx ont changé de signe, puisque la somme des accroissements doit donner la différence $x-x_0$ dans le premier cas, la différence x_0-x dans le second.

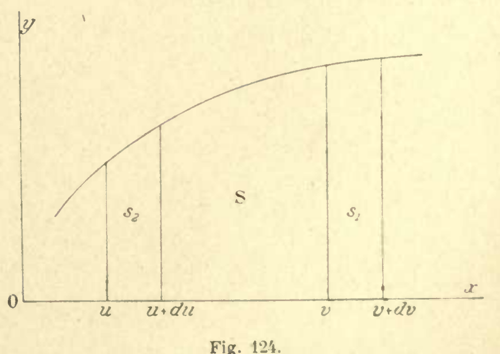


Fig. 124.

2°. — Jusqu'à présent nous avons regardé $S(x)$ comme fonction de la limite supérieure. Nous pouvons aussi bien la regarder comme fonction de la limite inférieure, ou mieux comme fonction des deux limites prises pour variables indépendantes (fig. 124).

Posons : $$S=\int_u f(x)dx=-\int_v^u f(x)dx.$$

$$dS=\frac{\partial S}{\partial v}dv+\frac{\partial S}{\partial u}du.$$

Reprenons le raisonnement du § 152; on trouve immédiatement :

$$\frac{\partial S}{\partial v} = f(v), \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = -f(u); \qquad dS = f(v)dv - f(u)du.$$

Ce résultat est, du reste, une conséquence du *1°*. La figure 124 en montre la signification. Quand v croît de dv, S *croît* de $s_1 = f(v)dv$; quand au contraire u croît de du, S *décroît* de $s_2 = f(u)du$.

D'où la variation totale :

$$dS = s_1 - s_2 = f(v)dv - f(u)du.$$

3°. — De ce qui précède il résulte qu'on doit poser :

$$S = \int_{x_0}^{x} y dx = F(x) - F(x_0) = \Big[F(x) \Big]_{x_0}^{x}. \qquad (2)$$

En effet, quelle que soit la limite inférieure x_0, il faut que S s'annule quand la limite supérieure lui devient égale. Quelles que soient les deux limites, il faut que l'intégrale change de signe quand on les intervertit. On a bien identiquement :

$$F(x_0) - F(x_0) = 0, \qquad F(x) - F(x_0) = -[F(x_0) - F(x)].$$

Pour simplifier, nous écrirons souvent *en omettant les limites :*

$$\int y dx = F(x).$$

Mais il est bien entendu qu'une intégrale dont les limites ne sont pas spécifiées, est encore absolument indéterminée. C'est une aire comprise entre une courbe, l'axe des abscisses, *et deux ordonnées qui ne sont pas encore choisies.*

4°. — D'après nos conventions, les aires peuvent avoir le signe —, soit quand les ordonnées sont négatives, soit quand les abscisses décroissent pendant l'intégration.

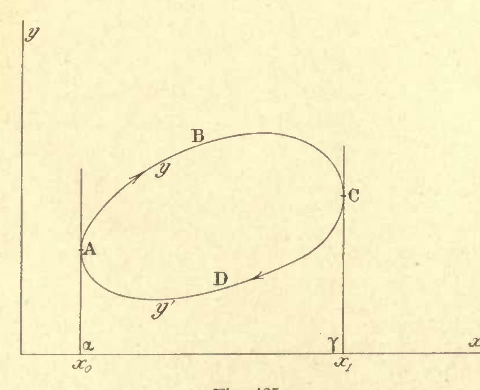


Fig. 125.

On peut comprendre les deux règles en une seule.

Reportons-nous à la figure 123. Parcourons la courbe $y = f(x)$ dans le sens ABCDE. Sur l'arc ABC, nous avons l'aire à mesurer à notre droite; nous la comptons positivement. Sur l'arc CDE, nous l'avons à notre gauche; nous la comptons négativement.

Prenons maintenant la figure 125. Sur l'arc ABC, nous avons l'aire à mesurer $\alpha ABC\gamma\alpha$ à notre droite; sur l'axe CDA, nous avons l'aire

γCDA$\alpha\gamma$ à notre gauche. Nous prendrons la première positivement, et la seconde négativement.

Nous poserons :

$$\int_{\text{ABCDA}} ydx = \overline{\alpha\text{ABC}\gamma\alpha} - \gamma\text{CDA}\alpha\gamma = \overline{\text{ABCDA}}.$$

En définitive, décrivons le contour qui limite une aire : si elle est à notre droite, nous la prendrons positivement; si elle est à notre gauche, nous la prendrons négativement. Nous pouvons évidemment remplacer cette convention par la convention inverse.

5°. — Considérons les deux courbes ABC, ADC, comme parcourues dans le même sens; appelons y et y' leurs ordonnées pour la même abscisse. Nous pouvons aussi bien écrire :

$$\overline{\text{ABCDA}} = \int_{x_0}^{x_1} ydx - \int_{x_0}^{x_1} y'dx = \int_{x_0}^{x_1} (y - y')dx.$$

Pratiquement c'est ainsi que se font les calculs.

6°. — Il arrive qu'une courbe délimite une aire *nulle* (fig. 126).

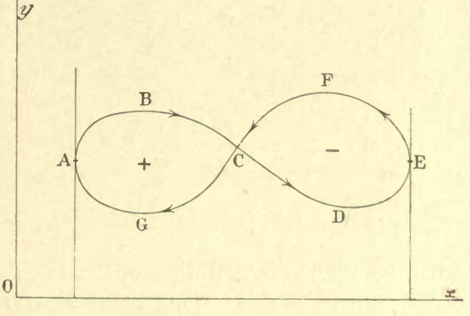


Fig. 126.

Par exemple, d'après nos conventions, l'aire ABCGA est positive, l'aire CDEF est négative.

La somme de ces aires peut être nulle. On rencontre souvent, en Physique, la condition qu'une courbe délimite une aire nulle au sens qui vient d'être précisé (courbe représentative des gaz,...)

155. Pente moyenne ; ordonnée moyenne. Valeur efficace.

1°. — Soit S(x) une fonction de la variable x. Supposons que celle-ci passe de x_0 à $x_1 = x_0 + h$. Nous pouvons appeler *pente moyenne* de la fonction S(x) dans l'intervalle de x_0 à x_1, le quotient :

$$p_m = [\text{S}(x_1) - \text{S}(x_0)] : h.$$

C'est la pente de la droite AB qui passe par les extrémités des ordonnées extrêmes (fig. 127 à gauche).

Soit $f(x)$ la dérivée de S par rapport à x ; $f(x) = d\text{S} : dx$.

C'est la *pente vraie p* de la courbe. Je dis qu'on a :

$$p_m = f(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1;$$

la pente moyenne dans un intervalle est égale à l'une des valeurs de la pente vraie dans le même intervalle. C'est évident; car, si pour

une certaine valeur de x, on a $p > p_m$, il faut par compensation que pour d'autres valeurs on ait $p < p_m$.

Puisque par hypothèse la dérivée est continue, on aura assurément $p = p_m$, pour au moins une valeur de x.

2°. — On peut énoncer la proposition d'une manière différente.

Représentons (fig. 127 à droite) une fonction $y = f(x)$.

L'aire A'ABCDD' a pour expression :

$$S(x_1) - S(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

Il est évident qu'elle est égale à un rectangle de base h et dont la

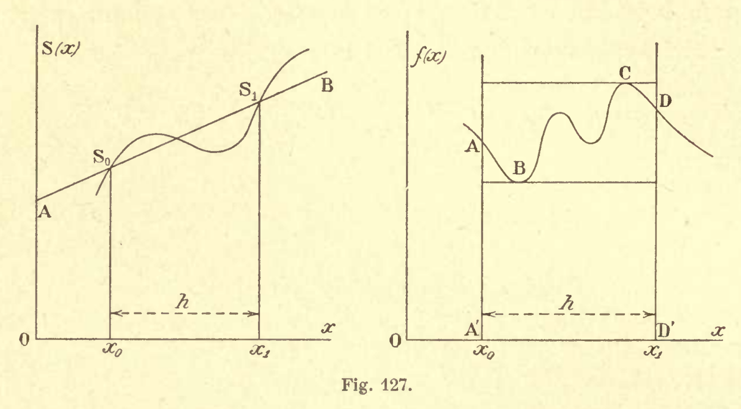


Fig. 127.

hauteur est intermédiaire entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend $f(x)$ dans l'intervalle de x_0 à x_1. Puisque $f(x)$ est continue par hypothèse, l'aire est donc égale au produit de h par l'une des valeurs de $f(x)$ dans cet intervalle. D'où la relation :

$$S(x_1) - S(x_0) = h \,.\, f(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Ainsi l'on a :

$$f_m = f[x_0 + \theta(x_1 - x_0)] = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_1}^{x_0} f(x)dx.$$

Cette formule définit d'abord ce qu'on appelle valeur moyenne de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle de x_0 à x_1 ; elle nous apprend de plus que la valeur moyenne est une des valeurs de la fonction dans cet intervalle.

3°. — On appelle *valeur efficace,* la racine carrée de la valeur moyenne du carré d'une fonction :

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_1}^{x_0} f^2(x)dx}\,, \qquad f^2_{\text{eff}} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f^2(x)dx.$$

Par exemple, soit : $y = \text{A} \sin \frac{2\pi t}{\text{T}}$, une fonction sinusoïdale.

Sa valeur moyenne pour une période est évidemment nulle ; l'aire positive est égale à l'aire négative. Cherchons sa valeur efficace (§ 48).

$$A^2 \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{A^2}{2} \int_0^T \left(1 - \cos \frac{4\pi t}{T}\right) dt = \frac{A^2 T}{2}.$$

$$y^2_{eff} = \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{A^2}{2}, \qquad y_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,71 \,.\, A.$$

Cette formule est fondamentale dans l'étude des courants alternatifs.

156. Ordonnée moyenne d'un arc parabolique du second ou du troisième degré.

1°. — ARC DU SECOND DEGRÉ.

Par hypothèse, la courbe (fig. 128) est représentée par l'équation :

$$y = a + bx + cx^2,$$

qui convient à une *parabole* dont l'axe et par conséquent les diamètres (§ 126) sont parallèles à Oy (§ 106).

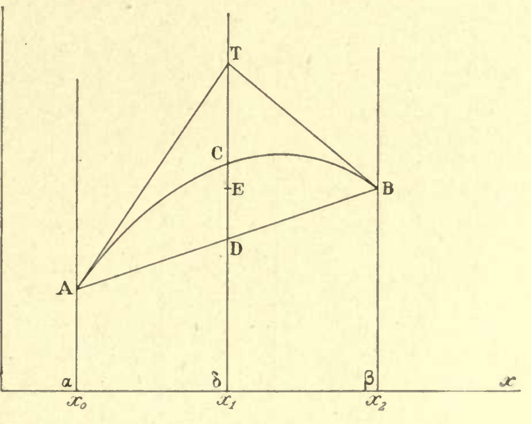


Fig. 128.

Soit y_0, y_1, y_2, les ordonnées équidistantes qui correspondent aux abscisses : x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$.

Transportons l'origine en α, ce qui ne change pas *la forme* de l'équation et modifie seulement la valeur des coefficients. On a :

$$S = 2hy_m = \int_0^{2h} (a + bx + cx^2)\, dx = 2ah + 2bh^2 + \frac{8}{3} ch^3.$$

Déterminons les constantes a, b, c, d'après les données du problème :

$$y_0 = a, \qquad y_1 = a + bh + ch^2, \qquad y_2 = a + 2bh + 4ch^2.$$

D'où : $\qquad 6y_m = y_0 + 4y_1 + y_2.$

On a : $\quad y_0 + y_2 = 2\overline{\delta D}, \quad 4y_1 = 4\overline{\delta D} + 4\overline{DC}; \quad y_m = \overline{\delta D} + \frac{2}{3}\overline{DC}.$

L'extrémité E *de l'ordonnée moyenne est donc aux deux tiers de la distance* $\overline{DC}$.

Supposons l'arc donné par ses ordonnées extrêmes y_0 et y_2, et par ses tangentes aux extrémités. Il résulte des propriétés de la

parabole du second degré (§ 126) que ces tangentes se coupent en T sur l'ordonnée δC diamètre conjugué de AB, et que $\overline{DC} = \overline{CT}$.

Le point C est donc connu, et l'on est ramené au cas précédent.

2°. — Arc du troisième degré.

Soit $y_0, y_1, y_2, y_3,$ les ordonnées équidistantes qui correspondent aux abscisses :

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h.$$

Transportons l'origine en α. On a :

$$S = 3hy_m = \int_0^{3h} (a + bx + cx^2 + gx^3)\,dx = 3ah + \frac{9}{2}bh^2 + 9ch^3 + \frac{81}{4}gh^4.$$

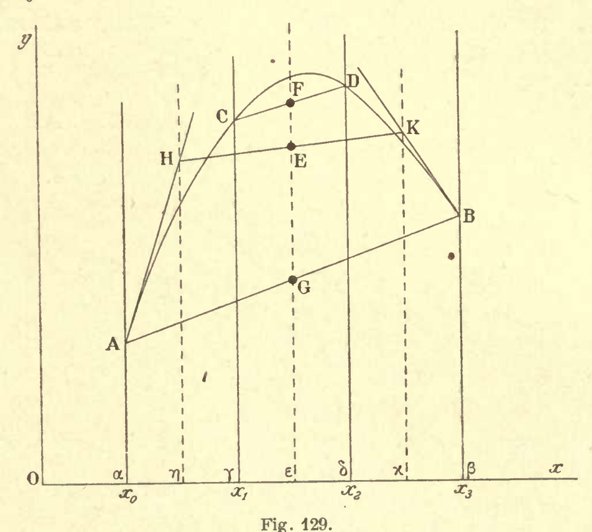


Fig. 129.

Déterminons les constantes a, b, c, g, d'après les données du problème :

$$y_0 = a, \qquad y_1 = a + bh + ch^2 + gh^3,$$
$$y_2 = a + 2bh + 4ch^2 + 8gh^3,$$
$$y_3 = a + 3bh + 9ch^2 + 27gh^3.$$

On vérifiera immédiatement la formule :

$$8y_m = y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3.$$

On a : $y_0 + y_3 = 2\overline{\varepsilon G}$, $3y_1 + 3y_2 = 6\overline{\varepsilon F}$; $y_m = \overline{\varepsilon G} + \frac{3}{4}\overline{GF}$.

L'extrémité E *de l'ordonnée moyenne est donc aux trois quarts de la distance* $\overline{GF}$.

Supposons la parabole donnée par ses ordonnées extrêmes y_0 et y_3 et par ses tangentes aux extrémités. On a :

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3gx^2; \qquad y'_0 = b, \quad y'_3 = b + 6ch + 27gh^2.$$

D'où immédiatement : $2y_m = \left(y_0 + \frac{1}{2} y'_0 h\right) + \left(y_3 - \frac{1}{2} y'_3 h\right).$

Or : $y_0 + \frac{1}{2} y'_0 h = \overline{\eta H}, \qquad y_3 - \frac{1}{2} y'_3 h = \overline{\varkappa K}.$

Donc, pour obtenir le point E, *on détermine les intersections* H *et* K *des tangentes aux extrémités de l'arc de parabole, avec les ordonnées qui sont au sixième de la distance* $\alpha\beta$. *On joint* H *et* K, *et on détermine le milieu du segment* $\overline{HK}$.

157. Obtention de fonctions nouvelles ; équations différentielles.

Effectuer l'intégration : $S = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} ydx,$

c'est donc trouver une fonction $S(x)$ qui admette $y = f(x)$, comme dérivée ; *c'est trouver la fonction primitive de* y. *Il est essentiel de remarquer que le plus souvent* S *n'est pas exprimable avec les fonctions particulièrement simples auxquelles le lecteur est habitué :* sinus, cosinus, ... Au contraire, nous verrons que les logarithmes, les exponentielles et une infinité d'autres fonctions employées pour représenter les phénomènes, se présentent tout naturellement comme mesurant les aires limitées par des courbes de construction simple. Toute fonction $y = f(x)$, peut servir à définir par intégration une nouvelle fonction $S(x)$, à laquelle nous sommes libres de donner un nom et une place dans notre catalogue de fonctions étudiées une fois pour toutes. Il suffit d'en dresser des tables numériques à l'approximation jugée nécessaire, pour que la fonction $S(x)$ devienne utilisable dans la représentation et l'étude des phénomènes, au même titre que le sinus et le cosinus.

La méthode ici employée pour définir de nouvelles fonctions, est un cas particulier d'une méthode plus générale que nous étudierons au Chapitre XIII.

L'équation : $\frac{dS}{dx} = y, \qquad \frac{dS}{dx} = f(x),$

est la plus simple des *équations différentielles*, c'est-à-dire des relations imposées entre les dérivées successives d'une fonction et la variable. Nous cherchons ici une fonction $S(x)$ dont la dérivée soit une fonction connue de la variable. Autrement dit, nous cherchons quel doit être le déplacement d'un mobile, pour que sa vitesse $ds : dt$ soit une fonction donnée à l'avance du temps t :

$$\frac{ds}{dt} = f(t).$$

158. Règles d'intégration.

Dans le cas où $S(x)$ est composée de fonctions usuelles, il n'est

pas toujours commode de les découvrir. Nous énoncerons d'abord quelques règles *dites d'intégration* qui facilitent les tâtonnements.

1°. — L'intégration va de soi quand la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte; c'est dire qu'on a :

$$S = \int_{x_0}^{x} d\left[f(x)\right].$$

Prenons en effet la dérivée des deux membres; il vient (§ 152) :

$$dS = d\left[f(x)\right].$$

Les fonctions S et f ont même différentielle; elles ne diffèrent que par une constante (§ 153). Mais $S(x)$ doit s'annuler pour $x = x_0$, en vertu de la définition de l'intégrale; donc :

$$S = f(x) - f(x_0).$$

2°. — Le procédé connu sous le nom d'*intégration par parties* repose sur l'identité (§ 9) :

$$d(uv) = udv + vdu, \qquad udv = d(uv) - vdu, \qquad (1)$$

où u et v sont des fonctions quelconques de la variable.

Intégrons les deux membres de l'équation (1) entre les mêmes limites, ce qui est permis en vertu du *4°* du § 153 :

$$\int_{x_0}^{x} udv = \int_{x_0}^{x} d(uv) - \int_{x_0} vdu = (uv - u_0v_0) - \int_{x_0}^{x} vdu;$$

u_0, v_0, sont les valeurs de u et de v pour $x = x_0$.

Ainsi nous avons remplacé la recherche de l'intégrale :

$$\int udv, \qquad \text{par celle de l'intégrale :} \qquad \int vdu,$$

qui peut être plus facile.

3°. — Changement de variable.

On ramène souvent à des formes connues, typiques, *canoniques*, par un changement de variable.

Par exemple :

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\frac{x}{a}\right) : \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = d \operatorname{arc} \sin z.$$

Revenant à la variable primitive (§ 56) :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + \text{Constante}.$$

De même : $x^2 + 2ax + b = (x + a)^2 + b - a^2 = z^2 + b - a^2$,

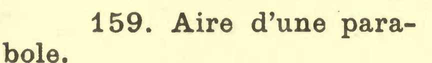
en posant : $z = x + a$.

On trouve ainsi pour $b > a^2$ (§ 60) :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2ax + b} = \frac{1}{\sqrt{b - a^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + a}{\sqrt{b - a^2}} + \text{Constante}.$$

4°. — Décomposition.

On sépare la fonction en une somme algébrique de plusieurs autres. Nous aurons l'occasion de donner maints exemples de cette méthode.



159. Aire d'une parabole.

Considérons la parabole générale :

$$y = ax^n;$$

nous supposons n positif et inférieur à l'unité ; n est d'ailleurs quelconque.

L'aire OAB a pour expression (fig. 130):

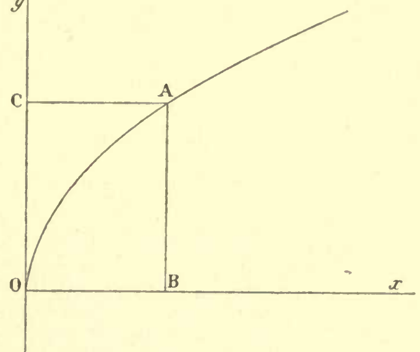


Fig. 130.

$$S = \int_0^x y dx = \int_0^x ax^n dx = \frac{a}{n+1}\Big[x^{n+1}\Big]_0^x = \frac{ax^{n+1}}{n+1}.$$

On peut encore écrire : $S = \dfrac{xy}{n+1}$.

Or : $xy = \text{aire OCAB};$

donc : $\text{aire OCAO} = xy\left[1 - \dfrac{1}{n+1}\right] = \dfrac{nxy}{n+1}$.

D'où enfin : $\dfrac{S}{\text{aire OCAO}} = \dfrac{1}{n}$.

Pour la parabole ordinaire, $n = 1 : 2$; l'aire OAB est deux fois l'aire OCA. Il importe peu que les échelles ne soient pas les mêmes pour les x et les y.

160. Aire limitée par la sinusoïde ou la cosinusoïde. Théorèmes sur les fonctions périodiques.

1°. — On a immédiatement :

$$\int_{x_0}^x \sin x\, dx = -(\cos x - \cos x_0), \qquad \int_{\overset{\circ}{x}}^x \cos x\, dx = \sin x - \sin x_0.$$

Le lecteur se reportera à la figure 40 pour mieux comprendre le sens de ces relations.

2°. — Généralisons. Soit une courbe périodique quelconque $y = f(x)$, mais telle que pour une période la somme des aires soit nulle. La nouvelle fonction :

$$S(x) = \int_0^x f(x) dx,$$

est périodique et admet la même période que $f(x)$. Soit ξ la période; on a :

$$\int_0^\xi f(x)dx = 0, \qquad \int_0^x f(x)dx = \int_0^{x-n\xi} f(x)dx,$$

en supposant que x contient n périodes complètes plus une fraction de période. En effet, nous pouvons écrire :

$$\int_0^x = \int_0^\xi + \int_\xi^{2\xi} + \int_{2\xi}^{3\xi} + \dots + \int_{n\xi}^x = \int_{n\xi}^x.$$

Mais retrancher un nombre quelconque $n\xi$ de périodes ne change pas la valeur des ordonnées de la courbe à intégrer.

D'où la conséquence : $\displaystyle\int_{n\xi}^x = \int_0^{x-n\xi}$.

3°. — Supposons que pour chaque période l'aire ne soit plus nulle. Soit S_0 sa valeur. On a :

$$\int_0^x f(x)dx = nS_0 + \int_0^{x-n\xi} f(x)dx.$$

4°. — Revenons au cas *2°*. Si la limite supérieure x croît indéfiniment, l'intégrale ne tend vers aucune valeur déterminée ; elle oscille entre un maximum et un minimum.

Par exemple : $$\int_0^\infty \sin x\, dx,$$

est un nombre quelconque compris entre 0 et 2.

Mais supposons la fonction périodique $f(x)$ multipliée par une fonction $\varphi(x)$ qui décroît constamment quand x varie de 0 à ∞, et s'annule pour x infini. L'intégrale :

$$\int_0^\infty f(x)\varphi(x)dx,$$

converge vers une valeur bien déterminée. Nous montrerons en effet qu'alors on peut la mettre sous la forme d'une série infinie à termes décroissants, alternativement positifs et négatifs (§ 249, *3°*).

Nous trouverons au x §§ 270 et 309 des applications de cette remarque.

161. Aires du cercle et de l'ellipse.

Il s'agit d'évaluer l'aire des trapèzes curvilignes OCDG dans le cercle, OBHG dans l'ellipse (fig. 131). Posons : $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$.

1°. — Le calcul direct est immédiat. On a dans le cercle :

$$\text{aire OCDG} = \text{aire OCD} + \text{aire ODG}.$$

$$\frac{ED}{a} = \sin \text{arc} \frac{\overline{CD}}{a}, \qquad \frac{\overline{CD}}{a} = \text{arc} \sin \frac{x}{a}.$$

Ne pas oublier que les arcs trigonométriques ne sont pas des lignes, mais des rapports de lignes au rayon.

On a : $$\text{aire OCD} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\overline{CD}}{a}\right).$$

En effet, l'aire du cercle entier est πa^2 pour un arc 2π ; l'aire du secteur par unité d'arc est $\pi a^2 : 2\pi = a^2 : 2$; l'aire du secteur dont l'arc est $\overline{\text{CD}} : a$, a la valeur ci-dessus écrite. D'où :

$$\text{aire OCD} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

L'aire du triangle ODG est :

$$\overline{\text{OG}} \times \overline{\text{DG}} : 2 = xy : 2 = (x\sqrt{a^2 - x^2}) : 2.$$

En définitive : $\text{aire OCDG} = \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a}.$

2°. — Voilà pour le cercle. On sait que pour passer à l'ellipse, il suffit de projeter orthogonalement sur un plan Π faisant avec le plan Π' du cercle un angle dont le cosinus est $b : a$. Autrement dit, il suffit de multiplier par $b : a$ (§ 107). On a donc :

$$\text{aire OBHG} = \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

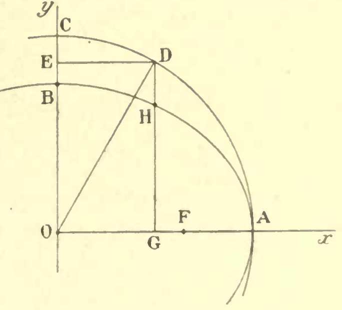


Fig. 131.

En particulier, l'aire du quadrant s'obtient en posant

$$x = a.$$

D'où : pour le cercle, $\pi a^2 : 4$; pour l'ellipse, $\pi ab : 4$.

3°. — Reprenons le calcul par intégration. On a :

pour le cercle, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; pour l'ellipse, $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Les ordonnées de l'ellipse sont les ordonnées du cercle multipliées par $b : a$; les limites d'intégration sont les mêmes : les aires des trapèzes curvilignes sont, par suite, dans le rapport $b : a$.

Nous pouvons donc nous borner au cas du cercle.

Il s'agit d'obtenir l'intégrale :

$$S = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Intégrons par parties (§ 158) :

$$d\left(\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}\, dx - \frac{x^2 dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - \frac{a^2 dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

D'où (§ 153) : $\displaystyle\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{a^2 dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$

Enfin (§ 56) : $\displaystyle\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$

Pour effectuer la dernière intégration indiquée, on écrira (§ 158) :

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x}} = d\left(\frac{x}{a}\right) : \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

162. Aire de la cycloïde.

Nous avons (§ 100) :

$$x = R(\theta - \sin\theta), \qquad y = R(1-\cos\theta);$$

$$dx = R(1-\cos\theta)\, d\theta, \qquad y\,dx = R^2(1-\cos\theta)^2\, d\theta.$$

$$S = \int_0^\theta y\,dx = R^2\left(\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right).$$

Pour obtenir l'aire d'un arceau, il faut prendre 2π comme limite supérieure. On trouve : $S = 3\pi R^2$.

L'aire de l'arceau est trois fois l'aire du cercle générateur.

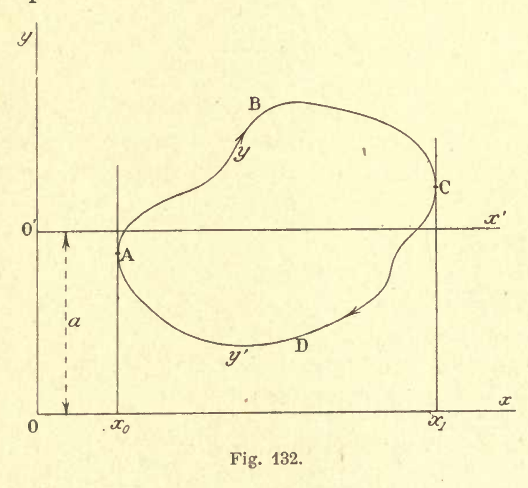


Fig. 132.

163. Moment statique d'une aire plane : axe neutre.

1°. — L'aire limitée par la courbe fermée ABCDA est (§ 154) :

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx - \int_{x_0}^{x} y'dx\,;$$

nous écrivons pour abréger : $S = \int_A^A y\,dx.$

Ceci posé, on appelle *moment statique* de l'aire par rapport à la droite Ox (fig. 132) l'intégrale :

$$M = \frac{1}{2}\int_A^A y^2dx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} y^2dx - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} y'^2dx.$$

2°. — Cherchons comment varie le moment statique quand on déplace parallèlement à lui-même l'axe Ox par rapport auquel il est pris. Transportons-le en O$'x'$ distant de a. Le nouveau moment statique M$'$ est :

$$M' = \frac{1}{2}\int_A^A (y-a)^2dx = M - a\int_A^A y\,dx + \frac{a^2}{2}\int_A^A dx.$$

La dernière intégrale est nulle, car elle vaut par définition :

$$\int_{x_0}^{x_1} dx - \int_{x_0}^{x_1} dx = 0.$$

Il reste : $$M' = M - aS.$$

Il est donc toujours possible de trouver une droite telle qu'on ait :

$$M' = 0, \qquad M = aS.$$

On l'appelle *axe neutre. Le moment statique par rapport à une droite quelconque est égal au produit de l'aire* S *par la distance de cette droite à l'axe neutre qui lui est parallèle.*

3°. — A chaque direction correspond un axe neutre. On démontre que *tous ces axes passent par un même point qui est le centre de gravité de l'aire.* Mais cette proposition nous étant inutile ici, je n'insiste pas (voir Mécanique).

4°. — On ramène le calcul des moments statiques au calcul d'une aire. Il suffit de tracer une courbe dont les ordonnées soient égales à la moitié du carré des ordonnées de la courbe proposée. Il y a, dans ces calculs d'aire, des questions de signes avec lesquelles il faut que le lecteur se familiarise.

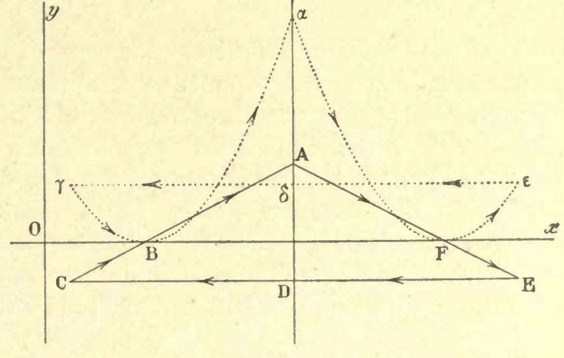


Fig. 133.

Prenons comme exemple simple le cas d'un triangle AEC ; il est placé de manière que Ox soit un axe neutre. Quand on parcourt le triangle dans le sens des flèches, toute l'aire est à la droite du promeneur : elle est donc entièrement positive (fig. 133).

Construisons la courbe dont les ordonnées sont égales aux carrés des ordonnées de la première. Nous obtenons des arcs de parabole et une droite. Parcourons la courbe dans le sens des flèches, sens imposé par le sens dans lequel on parcourait le triangle. Nous trouvons une aire positive $B\alpha FB$ et une aire négative $BF\varepsilon\gamma B$. Elles sont égales dans le cas de la figure 133.

164. Moment d'inertie d'une aire plane.

1°. — On appelle *moment d'inertie* d'une aire plane par rapport à Ox l'intégrale :

$$I = \frac{1}{3}\int_A^A y^3 dx = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_1} y^3 dx - \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_1} y'^3 dx.$$

Cherchons comment varie le moment d'inertie quand on déplace la

droite Ox parallèlement à elle-même. On a par rapport à $O'x'$:

$$I' = \frac{1}{3}\int_A^A (y-a)^3 dx = I - a\int y^2 dx + a^2\int y dx - \frac{a^3}{3}\int dx.$$

La dernière intégrale est nulle. Il reste :

$$I' = I - 2aM + a^2S = I - 2aM' - a^2S.$$

La relation se simplifie quand $O'x'$ est *axe neutre ;* $M' = 0$.

Il reste : $$I = I' + a^2S.$$

Le moment d'inertie I par rapport à une droite quelconque est égal au moment d'inertie I' par rapport à l'axe neutre parallèle à cette droite, plus le produit de l'aire par le carré de la distance des deux droites.

De tous les moments d'inertie par rapport à des droites parallèles, le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre est minimum.

On généralise tous ces théorèmes en Mécanique.

2°. — On ramène le calcul des moments d'inertie au calcul d'une aire. Il suffit de tracer une courbe dont les ordonnées soient égales au tiers du cube des ordonnées de la courbe proposée.

La considération des moments statiques et des moments d'inertie des aires planes est fondamentale dans la théorie de la Résistance des matériaux, dans les Constructions navales, etc. etc...

Planimètres.
Détermination des aires. Intégraphes.

Nous étudions dans les paragraphes suivants les méthodes qui permettent de calculer les aires, de les mesurer mécaniquement, de déterminer mécaniquement les moments statiques et les moments d'inertie, d'obtenir mécaniquement la courbe intégrale.

Signalons d'abord la méthode très précise qui consiste à tracer la courbe $y = f(x)$, à grande échelle sur du carton quadrillé épais, à découper le graphique suivant l'axe des abscisses, la courbe et un certain nombre d'ordonnées, et à peser les morceaux ainsi obtenus. L'industrie fournit du papier assez homogène pour que les poids soient sensiblement proportionnels aux aires.

165. Formule de Poncelet.

Divisons le segment OO' (aux extrémités duquel sont les ordonnées qui limitent l'aire à évaluer) en $2n$ parties égales, de grandeur h. Calculons ou mesurons sur notre graphique les $2n+1$ ordonnées orrespondantes : $y_0, y_1, \dots y_{2n}$.

1°. — Aux extrémités B, C, D, ..., des ordonnées impaires, menons des tangentes à la courbe. Les n trapèzes ainsi formés ont respectivement pour aires :

$$2hy_1, \quad 2hy_3, \quad 2hy_5, \ldots,$$

La somme de ces aires s'écrit :

$$S_1 = 2h\sum y_{2p-1}.$$

Remarquons qu'il est inutile de mener effectivement les tangentes. Tous les trapèzes passant par le point B (par exemple), et limités aux ordonnées y_0 et y_2, ont même aire.

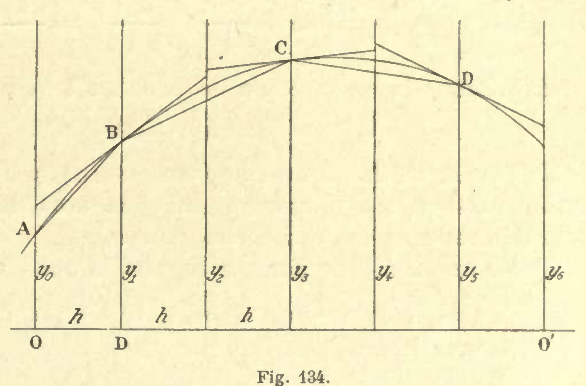


Fig. 134.

Si nous considérons en particulier celui qui est formé par la tangente, c'est en vue de déterminer plus loin une limite de l'erreur commise.

2°. — Traçons les cordes joignant les extrémités des ordonnées précédemment utilisées. Nous obtenons ainsi $n-1$ trapèzes; la somme de leurs aires vaut :

$$2h\left[\frac{y_1+y_3}{2}+\frac{y_3+y_5}{2}+\cdots\right] = 2h\sum y_{2p-1} - h(y_1+y_{2n-1})$$

Ajoutons la somme des aires des deux trapèzes terminaux dont l'un est représenté en OABD. Elle vaut :

$$[h(y_0+y_1)+h(y_{2n-1}+y_{2n})] : 2.$$

D'où : $$S_2 = S_1 + \frac{h}{2}\left[(y_0+y_{2n})-(y_1+y_{2n-1})\right].$$

Si nous avons pris soin d'opérer sur un arc de courbe dont la courbure conserve le même signe en tous ses points, l'aire à évaluer est comprise entre les deux aires S_2 et S_1. Nous pouvons aisément déterminer une limite de l'erreur; elle est :

$$\frac{h}{2}\left[(y_0-y_1)+(y_{2n}-y_{2n-1})\right].$$

Le lecteur trouvera aisément une représentation graphique de cette quantité.

On pourra prendre pour valeur de l'aire la moyenne $(S_2+S_1) : 2$.

166. Formule de Simpson.

1°. — Par trois points d'abscisses équidistantes $0, h, 2h$, et d'ordonnées z, z', z'', faisons passer un arc de parabole (§ 156) :

$$y = a + bx + cx^2. \qquad (1)$$

Les coefficients a, b, c, sont déterminés par les conditions :

$$z = a, \qquad z' = a + bh + ch^2, \qquad z'' = a + 2bh + 4ch^2.$$

L'aire limitée par la parabole (1) est :

$$\sigma = \int_0^{2h} y dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} \right]_0^{2h} = \frac{2h}{3} [3a + 3bh + 4ch^2].$$

Exprimons-la en fonction de z, z', z''. On trouve aisément :

$$3\sigma = h(z + 4z' + z'').$$

2°. — La méthode de Simpson revient à diviser le segment OO' en $2n$ parties et à remplacer par des arcs de paraboles les n arcs que déterminent les ordonnées paires.

Les aires limitées par ces paraboles ont pour expressions :

$$(h : 3)(y_0 + 4y_1 + y_2), \qquad (h : 3)(y_2 + 4y_3 + y_4), \ \ldots$$

On trouve immédiatement pour leur somme :

$$S_3 = \frac{2h}{3} \left[\sum y_{2p} + 2\sum y_{2p-1} - \frac{1}{2}(y_0 + y_{2n}) \right].$$

Remarque I.

Si la courbe présente un point d'inflexion, on ne peut évidemment pas l'assimiler à un arc de parabole passant par ce point. La méthode précédente n'est applicable que si le point d'inflexion se trouve justement sur une ordonnée paire, c'est-à-dire au point d'aboutissement de deux arcs appartenant à des paraboles différentes. On sera généralement conduit à diviser l'aire en deux parties séparées par l'ordonnée du point d'inflexion, et à les évaluer séparément.

On peut encore généraliser la méthode de Simpson, et utiliser un arc de parabole cubique (§ 156 ; voir aussi § 172).

Remarque II.

Si les ordonnées sont fournies par l'expérience, elles ne sont généralement pas équidistantes. On peut procéder alors de deux manières.

1°. — On détermine une courbe passant *au mieux* (§ 263) par les points expérimentaux ; elle permet de calculer des ordonnées équidistantes.

2°. — Avec un pistolet, on trace au jugé une courbe régulière entre les points déterminés par l'expérience ; on mesure sur le graphique les ordonnées équidistantes. Ordinairement la seconde méthode, plus grossière, est largement suffisante. Mais on n'empêchera pas les expérimentateurs de s'exagérer la précision de leurs expériences.

167. Planimètre d'Amsler.

Ce merveilleux appareil, de construction simple et de grande précision, a une théorie assez délicate, mais qui vaut la peine d'être approfondie (fig. 135).

Il est destiné à donner l'aire limitée par une courbe fermée S. Il se compose de deux tiges OA, AB, articulées en A; OA porte en O

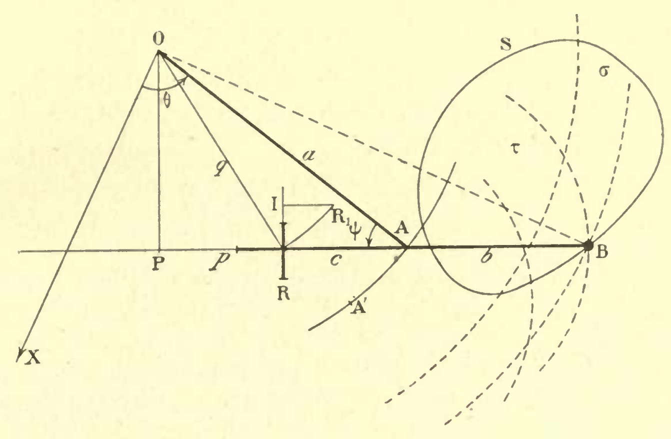


Fig. 135.

une pointe effilée qu'on plante dans le papier; AB porte en B une pointe mousse avec laquelle on suit le contour S.

Le prolongement de AB sert d'axe à une roulette R qui appuie sur le papier et tourne quand B se déplace. Il s'agit de montrer que *la rotation de la roulette est proportionnelle à l'aire* S *quand* B *fait un tour complet.* Elle est mesurée à l'aide d'une graduation tracée sur la jante de la roulette; un totalisateur donne le nombre de tours.

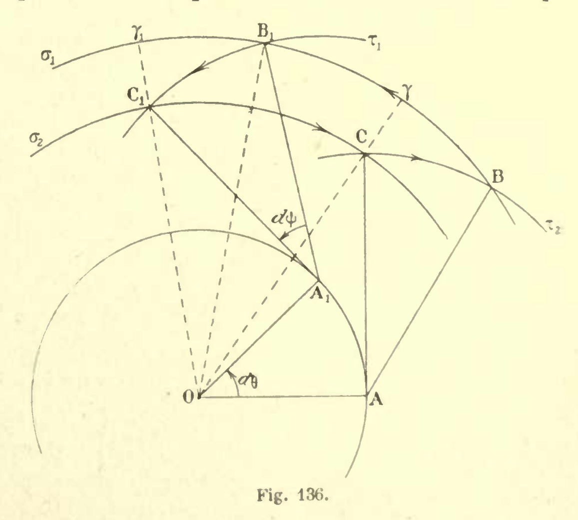


Fig. 136.

1°. — Tout point du plan accessible à la pointe B est repéré par les deux coordonnées θ et ψ. L'angle θ est mesuré à partir d'une droite fixe OX quelconque supposée tracée sur le papier; ψ est l'angle des tiges OA, AB.

Soit ψ invariable et θ variable. Pour chaque valeur de ψ, B décrit

une circonférence σ de centre O; l'ensemble de ces courbes constitue le premier faisceau de lignes de repère.

Soit ψ variable et θ constant. Pour chaque valeur de θ, B décrit une circonférence τ de rayon constant et de centre A, A′, ...; leur ensemble constitue le second faisceau de lignes de repère. La figure 136 montre deux lignes σ_1, σ_2, du premier faisceau, deux lignes τ_1, τ_2, du second.

2°. — Posons : $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AR} = c$, $\overline{PR} = p$;

P est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AB; le point R est celui où le plan de symétrie de la roulette coupe l'axe autour duquel elle tourne. On a :

$$\overline{OB}^2 = a^2 - (p+c)^2 + [b + (p+c)]^2.$$

Pour une autre valeur ψ_1 de l'angle ψ, on a :

$$\overline{OB}_1^2 = a^2 - (p_1 + c)^2 + [b + (p_1 + c)]^2.$$

Retranchons : $\overline{OB}_1^2 - \overline{OB}^2 = 2b(p_1 - p)$.

3°. — L'angle ψ restant invariable, augmentons θ de $d\theta$. Le point R décrit un arc de circonférence RR_1 de centre O, de rayon q, de longueur $\overline{RR_1} = qd\theta$.

La composante $\overline{RI}$ de ce déplacement normale à AB est :

$$\overline{RI} = qd\theta \cos \overline{ORP} = qd\theta(p : q) = pd\theta.$$

Elle est seule utile pour faire tourner la roulette; la composante parallèle à AB ne produit qu'un glissement latéral de la jante sur le papier. Telle est l'hypothèse fondamentale sur laquelle repose toute la théorie. Soit r le rayon de la roulette; l'angle dont elle tourne est :

$$\alpha = pd\theta : r.$$

4°. — Considérons (fig. 136) le parallélogramme curviligne infiniment petit formé par les quatre courbes σ_1, σ_2, τ_1, τ_2.

Évaluons son aire :

$$dS = \text{aire } BB_1C_1C = \text{secteur } O\gamma\gamma_1 - \text{secteur } OCC_1 = (\overline{O\gamma}_1^2 - \overline{OC}_1^2)d\theta : 2.$$

D'après le 2° : $dS = (p_1 - p)bd\theta$.

Évaluons la rotation de la roulette, quand la pointe mousse décrit le pourtour du parallélogramme.

Pendant les parcours égaux et de sens inverses $\overline{B_1C_1}$ et $\overline{CB}$, la roulette tourne de deux angles égaux et de sens contraires.

Restent les parcours $\overline{BB_1}$ et $\overline{C_1C}$ pour lesquels les relations sont :

$$\alpha_1 = p_1 \frac{d\theta}{r}, \qquad -\alpha = -p\frac{d\theta}{r}; \qquad \alpha_1 - \alpha = (p_1 - p)\frac{d\theta}{r}.$$

D'où : $dS = br(\alpha_1 - \alpha)$.

L'aire du parallélogramme est proportionnelle à la rotation totale de la roulette.

5°. — Pour parfaire la démonstration, il suffit de remarquer que l'aire à mesurer peut être décomposée, au moyen des faisceaux σ et τ, en une série de petits parallélogrammes à chacun desquels la théorie précédente est applicable. On ne laisse en dehors de cette décomposition que des triangles dont la somme est un infiniment petit. Il est inutile bien évidemment de parcourir les lignes de division, puisqu'elles le seraient chacune deux fois en sens contraires, ce qui amènerait pour la roulette deux rotations égales et de sens contraires : leur somme disparaîtrait dans la rotation totale. Il suffit donc de parcourir la courbe limite.

Remarque I. — Pour étalonner l'appareil, on mesure une aire de forme simple, un carré par exemple, dont on calcule directement la surface.

Remarque II. — Opérons sur des cercles de centre O (ψ invariable, *3°*). La rotation de la roulette pour un tour complet est $2\pi p : r$. Il existe donc un cercle Γ pour lequel la rotation est nulle. Son rayon est donné par la condition :

$$\overline{\mathrm{PR}} = p = 0, \qquad \mathrm{C} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2bc}\,.$$

Pour les cercles de rayons plus grands, la rotation de la roulette est dans un sens; elle est du sens contraire pour les cercles de rayons plus petits.

Remarque III. — Il résulte de là que si le point fixe O est à l'intérieur de la surface à mesurer (ce qui n'arrive que si la surface est très grande), on doit ajouter à l'aire obtenue l'aire du cercle Γ.

168. Planimètre linéaire.

1°. — Le planimètre *linéaire* se compose d'un chariot monté sur deux galets G qui sont guidés par une rainure rectiligne XX creusée dans une barre lourde et épaisse. Le point A décrit une droite Ox parallèle à la rainure; sa position est repérée par la distance $x = \overline{\mathrm{OA}}$.

Le bras AB qui porte la roulette tourne autour du point A. Sa direction est repérée par l'angle ψ qu'il fait avec Ox. En B est fixée la pointe mousse avec laquelle on suit le pourtour de la surface dont on veut déterminer l'aire. L'appareil est équilibré par rapport aux galets au moyen d'un contrepoids non représenté. On a :

$$y = b \sin \psi. \qquad (1)$$

Quand le point A se déplace, l'angle ψ restant invariable, le point B décrit une droite dont la position dépend de ψ d'après la relation (1). L'ensemble de ces droites constitue le faisceau σ.

Quand le point A reste fixe, B décrit un cercle de centre A. L'ensemble de ces cercles égaux constitue le faisceau τ.

2°. — L'aire du parallélogramme BCC_1B_1 est :

$$dS = \overline{BC} \cdot \overline{CC_1} \cdot \sin CC_1B_1 = b \cdot d\psi \cdot dx \cdot \cos\psi.$$

Forçons la pointe mousse à suivre son pourtour.

Pour les côtés BC, C_1B_1, les rotations de la roulette sont évidemment égales et de sens contraires. Dans le parcours BB_1 pour

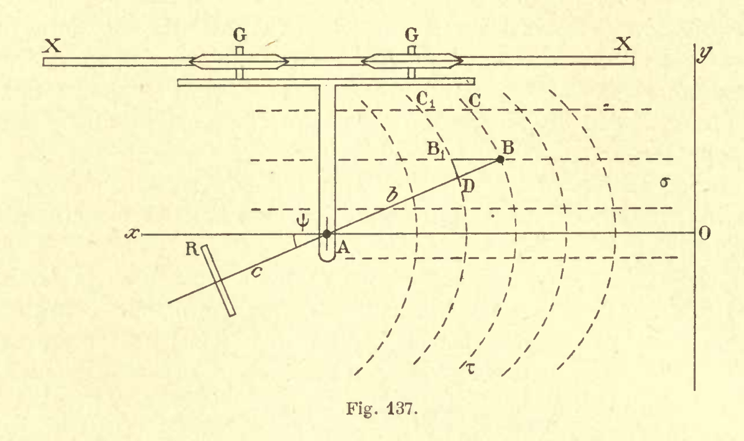


Fig. 137.

lequel ψ est constant, la rotation de la roulette est proportionnelle à la composante $\overline{B_1D}$ du déplacement normale à la tige AB. On a :

$$\overline{B_1D} = dx \cdot \sin\psi.$$

Soit α la rotation de la roulette :

$$\alpha = \frac{\sin\psi}{r} dx.$$

Pour le parcours CC_1, la rotation (de sens contraire) est donnée par la même formule dans laquelle on remplace ψ par $\psi + d\psi$. On a donc pour la différence des rotations, par suite pour la rotation totale dans le parcours complet BCC_1B_1B (au signe près) :

$$d\alpha = \frac{\cos\psi}{r} dx \cdot d\psi; \qquad \text{d'où :} \qquad dS = br \cdot d\alpha.$$

Reprenant le raisonnement 5° du paragraphe précédent, on conclut :

$$S = br\alpha.$$

α est la rotation totale de la roulette quand la pointe mousse décrit le pourtour de l'aire à mesurer.

3°. — Comme on le voit, la théorie du planimètre linéaire est plus simple que celle du planimètre polaire ; l'appareil, malheureusement plus cher, est plus précis. Mais son grand avantage est de permettre, grâce à une légère complication mécanique, de mesurer

les moments statiques, les moments d'inertie, d'une manière générale toutes les intégrales de la forme :

$$\frac{1}{n}\int y^n\,dx.$$

169. Mesure mécanique des moments statiques et des moments d'inertie.

Nous engageons le lecteur à passer ce paragraphe ; il y reviendra avec plus de profit lorsqu'il connaîtra la définition des intégrales doubles (§§ 306 et suivants).

1°. — En définitive, il résulte du paragraphe précédent que la rotation de la roulette, pendant que la pointe mousse décrit *dans le même sens* tous les petits parallélogrammes curvilignes, est :

$$\alpha=\iint\frac{\cos\psi}{r}dx\,d\psi=\frac{1}{br}\iint dx\,dy,$$

en vertu de la relation :

$$y=b\sin\psi,\qquad dy=b\cos\psi\,.\,d\psi.$$

On a le même résultat en ne décrivant que le pourtour extérieur, car les chemins intérieurs sont parcourus deux fois en sens inverses.

2°. — Supposons maintenant que la roulette R soit montée sur une tige qui tourne autour du point A et fait avec Ox un angle χ *lié mécaniquement à l'angle* ψ (fig. 138).

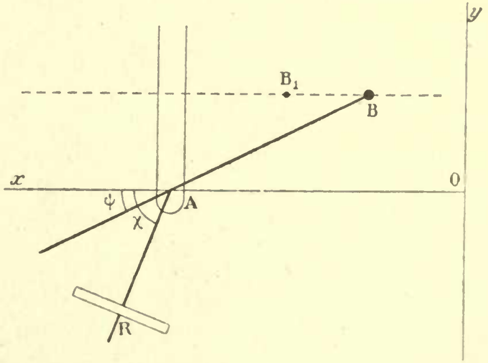


Fig. 138.

Le raisonnement 2° du paragraphe précédent nous apprend que la rotation de la roulette pour le parcours BCC_1B_1B est :

$$d\alpha=\frac{\cos\chi}{r}dx\,d\chi.$$

Il faut en effet projeter le déplacement élémentaire BB_1 non plus sur AB, mais sur le prolongement de AR.

Quand la pointe décrit le pourtour extérieur de l'aire, la rotation totale de la roulette est :

$$\alpha=\frac{1}{r}\iint dx\,.\cos\chi\,d\chi=\frac{1}{r}\iint dx\,d(\sin\chi)=\frac{1}{r}\int\sin\chi\,.\,dx.$$

3°. — Au moyen d'engrenages faciles à imaginer, établissons entre χ et ψ l'une des relations :

$$\chi = \psi, \qquad \chi = 2\psi + \frac{\pi}{2}, \qquad \chi = 3\psi.$$

La première relation nous ramène au paragraphe précédent : la rotation α_1 de la roulette mesure l'aire S.

La seconde donne :

$$\sin\chi = \sin\left(2\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\psi = 1 - 2\sin^2\psi\,;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{r}\int (1 - 2\sin^2\psi)\, dx = \frac{1}{r}\int dx - \frac{2}{b^2 r}\int y^2 dx.$$

La première intégrale est nulle pour un parcours fermé (§ 154); il reste donc (au signe près) :

$$4\mathrm{M} = b^2 r\alpha_2.$$

La troisième relation donne (§ 226) :

$$\sin\chi = \sin 3\psi = 3\sin\psi - 4\sin^3\psi\,;$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{br}\int y dx - \frac{4}{b^3 r}\int y^3 dx = \frac{3\mathrm{S}}{br} - \frac{12\mathrm{I}}{b^3 r}.$$

D'où : $\quad \mathrm{S} = br\alpha_1, \qquad \mathrm{M} = \frac{b^2 r}{4}\alpha_2, \qquad \mathrm{I} = \frac{b^3 r}{12}(3\alpha_1 - \alpha_3).$

4°. — On démontre aisément que les résultats sont les mêmes quand l'axe AR ne passe pas par le point A, mais coupe l'axe Ox à une distance de A *fonction seulement de ψ et ne dépendant pas de x*. Peu importent en effet les rotations quand x est constant et ψ variable, puisqu'elles sont toujours égales et de signes contraires pour chacun des parallélogrammes élémentaires, et se détruisent dans la somme. Quand x varie, seule l'inclinaison de l'axe de la roulette intervient sur sa rotation; sa position par rapport au point A est indifférente, *pourvu qu'elle ne soit pas modifiée par une variation de x*.

Nous n'insisterons pas sur les dispositifs mécaniques, parce que, très simples à comprendre l'appareil en main, ils le sont beaucoup moins sur des figures.

170. Intégraphe Boys.

Aucun exercice n'est plus capable de montrer en quoi consiste une intégration que l'étude des *intégraphes*, c'est-à-dire des appareils destinés à tracer mécaniquement la courbe :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{S}(x) = \int f(x)dx, \tag{1}$$

à partir de la courbe $y = f(x)$, donnée graphiquement.

Nous choisissons, pour le décrire, le plus simple et l'un des plus ingénieux, dû à Boys (fig. 139).

1°. — Soit XX une règle parallèle à l'axe Ox. Faisons glisser dessus une pièce D, dont le point A décrit l'axe Ox. Autour du point A tourne la tige AB. Sur AB glisse la pointe mousse P, *qu'on appuie toujours le long du bord* CE *parallèle à* Oy et avec laquelle on suit la courbe à intégrer. On a :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{y}{\overline{AC}} = \frac{f(x)}{\overline{AC}}.$$

Donc $\operatorname{tg}\alpha$ est proportionnelle à l'ordonnée y, puisque $\overline{AC}$ est constant.

2°. — De l'équation (1) nous tirons :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dS(x)}{dx} = f(x) = \overline{AC} \,.\, \operatorname{tg}\alpha.$$

Il faut donc tracer une courbe $Y = S(x)$, dont la pente soit proportionnelle à $\operatorname{tg}\alpha$, *égale à* $\operatorname{tg}\alpha$, si nous prenons $\overline{AC}$ pour unité.

Imaginons un mobile T automatiquement maintenu sur la même abscisse que le point P et *lié à la tige* AB *de manière que la direction de son mouvement soit toujours parallèle à cette tige.* Il décrira la courbe intégrale cherchée.

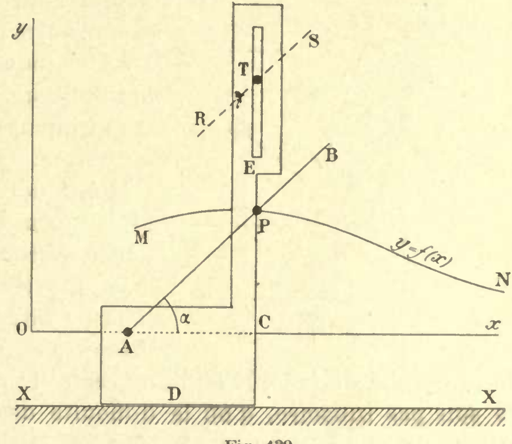


Fig. 139.

3°. — Pour assurer la condition géométrique ci-dessus imposée, on utilise une roulette dont le plan est normal au papier. Quand elle est suffisamment appuyée sur le papier, elle se déplace toujours dans la direction de son plan; le frottement empêche le déplacement transversal. Il ne reste donc plus qu'à obtenir mécaniquement que le plan de la roulette reste parallèle à AB, le point de contact avec le papier se projetant en T.

4°. — Voici le dispositif employé (fig. 140). Le système S_1S_2 est constitué par deux lames articulées qui laissent le point T se déplacer librement dans sa glissière. Les lames portent normalement les axes de trois poulies égales; la poulie P_1 est invariablement liée à la tige AB; P_3 est liée à la roulette (voir la petite figure 140); enfin P_2, autour de l'axe de laquelle tournent S_1 et S_2, sert de poulie de

renvoi pour les fils F. On ne peut donc modifier la direction de AB sans faire tourner simultanément du même angle les trois poulies. Si, pour une position de AB, le plan de la roulette R lui est parallèle, il lui reste indéfiniment parallèle.

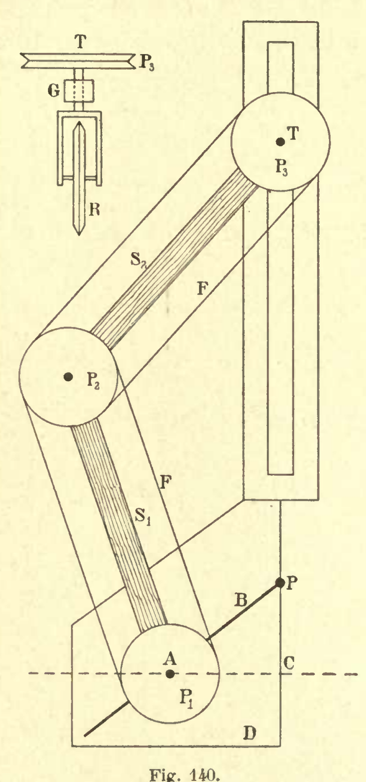


Fig. 140.

En définitive, l'expérience consiste à faire glisser D le long de XX, en maintenant la pointe mousse P à la fois contre CE et sur la courbe à intégrer. La roulette R, dont le plan est toujours parallèle à AB, décrit automatiquement la courbe intégrale.

Remarque.

Il est possible de construire des *intégraphes;* il est impossible de construire des *dérivateurs*. Pour intégrer, on part de la grandeur des ordonnées d'une courbe pour conclure la pente d'une autre courbe ; l'expérience montre que les inévitables zigzags que l'on produit autour de la courbe à intégrer, ne suppriment pas la régularité de la courbe intégrale.

Pour dériver, au contraire, on part de la pente d'une courbe pour conclure l'ordonnée d'une autre courbe. Les inévitables zigzags autour de la courbe intégrale se traduiraient par des variations formidables des ordonnées de la courbe dérivée. D'où l'impossibilité d'un appareil mécanique qui ne soit pas illusoire, d'où la difficulté de déterminer graphiquement la pente d'une courbe (§ 19).

CHAPITRE IX

FONCTIONS DEFINIES PAR LEURS DERIVEES (*suite*)

Intégrales de Fresnel.

171. Définition des fonctions G et F.

Nous allons étudier un premier exemple de fonctions définies par

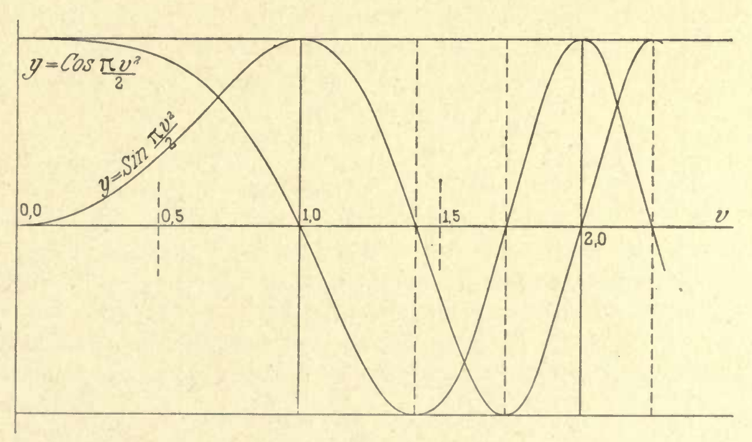


Fig. 141.

les aires limitées au moyen de courbes relativement simples; leur importance est capitale en Physique.

Les fonctions *dites de Fresnel* sont définies par les intégrales :

$$G = \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \qquad F = \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

Construisons d'abord les courbes (fig. 141) :

$$y = \cos \frac{\pi v^2}{2}, \qquad y = \sin \frac{\pi v^2}{2}.$$

Le tracé point par point ne présente aucune difficulté, puisque nous possédons des tables des sinus et des cosinus. Nous pouvons immédiatement déterminer les points remarquables, maximums, minimums et zéros. Ils correspondent aux valeurs de v pour lesquelles v^2 est égal à 1, 2, 3, 4, ...; d'où :

$$v = 1{,}000, \quad 1{,}414, \quad 1{,}732, \quad 2{,}000, \quad 2{,}236, \quad 2{,}449, \ldots$$

Les deux courbes se coupent quand on a :

$$\cos\frac{\pi v^2}{2} = \sin\frac{\pi v^2}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi v^2}{2} = 1.$$

La valeur de v^2 est donc égale à $2k + 0{,}5$:

$$v = 0{,}707, \quad 1{,}581, \quad 2{,}121, \quad 2{,}549, \ldots$$

2°. — Ce premier travail effectué, nous avons une idée nette de l'allure des fonctions G et F (fig. 142).

Les courbes y (fig. 141) forment des boucles dont les aires,

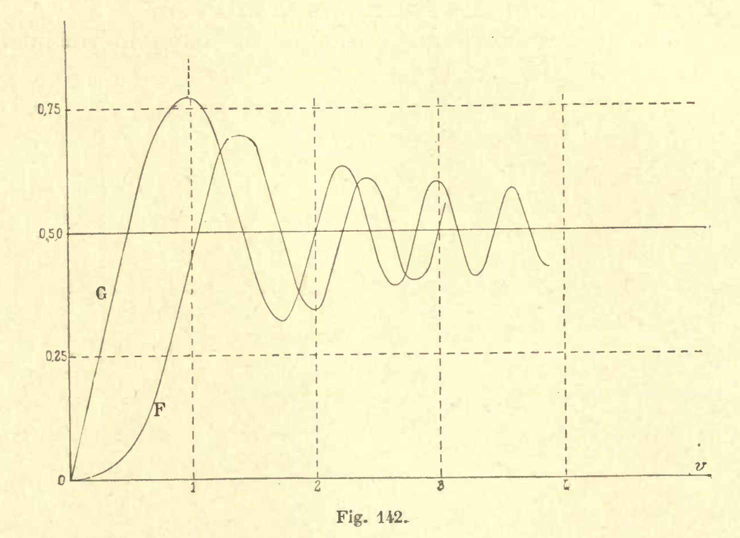


Fig. 142.

alternativement positives et négatives, *vont en décroissant.* Donc, quand la limite supérieure d'intégration varie de 0 à ∞, les intégrales F_0^v, G_0^v (fig. 142) sont toujours positives, alternativement croissantes et décroissantes.

Leurs maximums et minimums correspondent aux points d'intersection des courbes y avec Ox (§ 153).

Les maximums et minimums de G_0^v sont donnés par la condition :

$$\frac{dG}{dv} = 0, \qquad \cos\frac{\pi v^2}{2} = 0, \qquad v = \sqrt{2k+1}.$$

Les maximums et minimums de F_0^v sont donnés par la condition :

$$\frac{dF}{dv}=0, \qquad \sin\frac{\pi v^2}{2}=0, \qquad v=\sqrt{2k}.$$

Pour $v=0$, les deux courbes F et G partent de l'origine, mais non de la même manière. L'ordonnée $y=\cos(\pi v^2 : 2)$ conserve une valeur voisine de 1 pour des valeurs notables de v. Son aire, mesurée entre l'ordonnée à l'origine et une ordonnée variable, est donc très sensiblement proportionnelle à v. Donc la courbe G est presque rectiligne au départ de l'origine.

La courbe F est au contraire tangente à l'axe des abscisses.

A mesure que v croît, les aires alternativement positives et négatives des courbes y deviennent de plus en plus petites. Les intégrales G et F oscillent toutes deux autour d'une droite D dont elles se rapprochent indéfiniment. L'ordonnée de cette droite est 0,5 (§ 309).

3°. — Présentons ici une remarque capitale.

Bien que les courbes G et F se rapprochent indéfiniment de la droite D, celle-ci n'est pas une asymptote; les courbes G et F ne lui deviennent jamais *identiquement* parallèles. Pour des valeurs très grandes de v, elles font de part et d'autre de D des oscillations dont les amplitudes sont très petites, mais dont les zéros sont eux-mêmes extrêmement rapprochés; les pentes des tangentes aux deux courbes, pentes mesurées par les quotients :

$$\frac{dG}{dv}=\cos\frac{\pi v^2}{2}, \qquad \frac{dF}{dv}=\sin\frac{\pi v^2}{2},$$

n'en continuent pas moins à osciller entre les limites ± 1.

De sorte que nous avons deux courbes qui se confondent aussi exactement que nous le voulons avec une droite, et qui cependant n'admettent pas cette droite pour tangente. A quelqu'un qui ne serait pas prévenu et observerait les courbes pour des abscisses grandes, *elles donneraient l'image de fonctions continues n'admettant pas de dérivée.*

A la vérité elles en admettent, mais dont les variations sont extrêmement rapides.

172. Calcul des fonctions G et F.

La méthode de Simpson (§ 166) revient à substituer à la courbe des arcs de parabole. Elle rentre dans la méthode plus générale qui consiste à remplacer un arc de la courbe à intégrer par un arc d'une autre courbe pour laquelle l'intégration s'effectue au moyen de fonctions dont on possède des tables. *Dans le cas présent, il est tout indiqué d'essayer des arcs de sinusoïdes,* que nous superposerons le mieux et le plus simplement possible aux arcs des courbes de la fig. 141.

Soit à calculer : $$\int_a^{a+2\alpha} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv,$$

où a est une quantité constante quelconque, 2α une quantité *suffisamment petite.*

1°. — Posons : $v = a + u.$

Quand v varie de a à $a + 2\alpha$, u varie de 0 à 2α. Donc :

$$\int_a^{a+2\alpha} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \int_0^{2\alpha} \cos\frac{\pi}{2}(a+u)^2\,du$$

$$= \int_0^{2\alpha} \cos\frac{\pi}{2}(a^2 + 2au)\,du,$$

puisque *par hypothèse* α^2, par suite u^2 qui lui est toujours inférieur, sont des quantités assez petites pour être négligeables devant a^2.

L'intégration est maintenant possible avec des sinus :

$$\int_0^{2\alpha} \cos\frac{\pi}{2}(a^2+2au)\,du = \left[\frac{1}{\pi a}\sin\frac{\pi}{2}(a^2+2au)\right]_0^{2\alpha},$$

$$G_a^{a+2\alpha} = \int_a^{a+2\alpha} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \frac{1}{\pi a}\left[\sin\frac{\pi}{2}(a^2+4a\alpha) - \sin\frac{\pi a^2}{2}\right].$$

On trouverait de même :

$$F_a^{a+2\alpha} = \int_a^{a+2\alpha} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv = -\frac{1}{\pi a}\left[\cos\frac{\pi}{2}(a^2+4a\alpha) - \cos\frac{\pi a^2}{2}\right].$$

Si donc on connaît les valeurs G_0^a et F_0^a, on peut calculer les valeurs voisines :

$$G_0^{a+2\alpha} = G_0^a + G_a^{a+\alpha}, \qquad F_0^{a+2\alpha} = F_0^a + F_a^{a+2\alpha}.$$

2°. — La méthode précédente de calcul a l'inconvénient que la valeur de l'élément d'intégrale n'est exacte qu'à l'une des extrémités de l'intervalle, pour $v = a$, ou, ce qui revient au même, pour $u = 0$.

On obtient une meilleure approximation en posant :

$$v = a + \alpha + u.$$

La variable u varie maintenant entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Un calcul identique au précédent donne :

$$G_a^{a+2\alpha} = \frac{1}{\pi(a+\alpha)}\left[\sin\frac{\pi}{2}\left[(a+\alpha)^2 + 2(a+\alpha)u\right]\right]_{-\alpha}^{+\alpha}.$$

$$= \frac{1}{\pi(a+\alpha)}\left[\sin\frac{\pi}{2}(a+\alpha)(a+3\alpha) - \sin\frac{\pi}{2}(a+\alpha)(a-\alpha)\right].$$

On trouve de même :

$$F_a^{a+2\alpha} = \frac{-1}{\pi(\alpha+\alpha)}\left[\cos\frac{\pi}{2}(a+\alpha)(a+3\alpha) - \cos\frac{\pi}{2}(a+\alpha)(\alpha-\alpha)\right].$$

Nous insistons sur ce calcul parce qu'on procède toujours d'une manière analogue pour calculer approximativement une intégrale au moyen de fonctions dont on possède des tables.

173. Table des intégrales de Fresnel.

$$G = \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \qquad F = \int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

F et G sont multipliés par 10^4.

v	G	F	v	G	F
0,0	0	0	2,5	4574	6192
0,1	1100	5	2,6	3889	5500
0,2	1999	42	2,7	3926	4529
0,3	2994	141	2,8	4675	3915
0,4	3975	334	2,9	5624	4102
0,5	4923	647	3,0	6057	4963
0,6	5811	1105	3,1	5616	5818
0,7	6597	1721	3,2	4663	5933
0,8	7230	2493	3,3	4057	5193
0,9	7648	3398	3,4	4385	4297
1,0	7799	4383	3,5	5326	4153
1,1	7638	5365	3,6	5880	4923
1,2	7154	6234	3,7	5419	5750
1,3	6386	6863	3,8	4481	5656
1,4	5431	7135	3,9	4223	4752
1,5	4453	6975	4,0	4984	4205
1,6	3655	6386	4,1	5737	4758
1,7	3238	5492	4,2	5417	5632
1,8	3363	4509	4,3	4494	5540
1,9	3945	3734	4,4	4383	4623
2,0	4883	3434	4,5	5257	4342
2,1	5814	3743	4,6	5672	5162
2,2	6362	4556	4,7	4914	5669
2,3	6268	5525	4,8	4338	4968
2,4	5550	6197	4,9	5002	4351

Aires en coordonnées polaires; loi des aires.

174. Différentielle d'un secteur.

Reprenons la figure 60. Les aires des surfaces $\overline{OAD}$ et $\overline{ADB}$ ne s'annulent pas de la même manière quand $d\theta$ tend vers 0. Le secteur $OAD = r^2 d\theta : 2$, ne contient qu'une quantité infiniment petite en facteur. L'aire du triangle ADB est *à la limite* le produit $r d\theta dr : 2$, qui contient en facteurs deux quantités infiniment petites. Elle est négligeable devant la première. On a donc :

$$dS = r^2 d\theta : 2.$$

Cherchons l'expression de dS en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Prenons la droite Ox de référence pour axe des abscisses. On a :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr, \qquad dy = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr;$$

$$2dS = r^2 d\theta = x dy - y dx.$$

175. Loi des aires.

L'expression de l'aire en coordonnées polaires tire son importance du fait suivant : lorsqu'un point A est attiré par un centre fixe O suivant une loi quelconque, il décrit une courbe plane dont le plan contient le point O, ce qui est évident par raison de symétrie. Le rayon vecteur OA, qui joint le point au centre d'attraction, balaye des aires proportionnelles aux temps mis à les balayer, ce qui résulte des principes de la Dynamique.

Cette loi *des aires* se traduit par l'équation :

$$r^2 d\theta = 2C dt, \tag{1}$$

où dt est la différentielle du temps, C une constante.

Le problème *mécanique* consiste à déterminer la trajectoire, non pas sous la forme $f(r, \theta) = 0$, d'une fonction des coordonnées (ce qui spécifierait *uniquement* sa nature géométrique), mais sous la forme :

$$r = f_1(t), \qquad \theta = f_2(t),$$

ou sous la forme équivalente :

$$x = F_1(t), \qquad y = F_2(t),$$

où t est le temps. L'équation (1) n'est pas suffisante pour résoudre le problème; on doit lui adjoindre une autre condition qui exprime la loi *particulière* d'attraction. En d'autres termes, il s'agit de déterminer à la fois la trajectoire et la loi suivant laquelle elle est parcourue.

Notre but actuel est *tout géométrique. Nous nous donnerons* donc le centre d'attraction et la trajectoire; nous chercherons comment cette trajectoire doit être parcourue pour que la loi des aires soit satisfaite.

176. La trajectoire est une ellipse; l'origine des coordonnées (centre d'attraction) est au centre de symétrie de l'ellipse.

Prenons l'ellipse sous la forme :

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u;$$

u est une certaine fonction du temps qu'il s'agit de déterminer.

On a : $\qquad dx = -a\sin u\, du, \qquad dy = b\cos u\, du;$

$$xdy - ydx = ab\,(\cos^2 u + \sin^2 u)\, du = ab\,.\,du.$$

Si les aires balayées sont proportionnelles aux temps employés, on doit écrire :

$$abdu = Cdt, \qquad abu = Ct,$$

en posant $u = 0$, pour $t = 0$. La période T est donnée par la condition que pendant le temps T le mobile accomplisse un tour entier; autrement dit, que la variation 2π pour u corresponde à la variation T pour t. D'où la condition :

$$2\pi ab = CT, \qquad C = 2\pi ab : T, \qquad u = 2\pi t : T.$$

L'angle auxiliaire u doit donc varier proportionnellement au temps; le facteur de proportionnalité est $2\pi : T$, où T est la période.

C'est précisément ce que nous avons admis aux §§ 114 et suivants; en effet, l'hypothèse fondamentale en Optique et en Électricité est que tout se passe comme si les points mobiles étaient attirés par des centres fixes proportionnellement à l'écart avec la position d'équilibre (élongation).

177. La trajectoire est une conique; l'origine des coordonnées (centre d'attraction) est l'un des foyers.

1° — Prenons la conique sous la forme (§ 109) :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}.$$

Pour l'ellipse, on a $e < 1$; pour l'hyperbole, $e > 1$. Enfin pour la parabole, $e = 1$; comme $a(1 - e^2)$ doit rester fini, nous le poserons égal à p.

La loi des aires s'exprime donc dans tous les cas par la condition :

$$\frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = A dt, \tag{1}$$

où A est une constante. Cette équation définit la loi suivant laquelle tourne le rayon vecteur. Nous pousserons les calculs à bout pour l'ellipse et la parabole.

2°. — Parabole.

On vérifiera que la relation (2) redonne (1) par différentiation :

$$(e=1), \qquad t=\frac{1}{2A}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right], \tag{2}$$

en se rappelant que : $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Pour $t=0$, on a $\theta=0$; on suppose donc que le mobile passe au sommet de la parabole à l'origine des temps. Dans l'hypothèse contraire, il faut remplacer t par $t-t_0$; t_0 représente l'époque du passage au sommet de la parabole.

3°. — Ellipse.

Les calculs sont un peu plus longs. On ne trouve de résultat simple qu'en utilisant l'angle u comme auxiliaire. Il faut donc commencer par relier u et θ.

On a dans la figure 82 :

$$\overline{Oq}=\overline{OF}+\overline{Fq}, \qquad a\cos u=r\cos\theta+c.$$

On a (§ 109) : $r=a(1-e\cos u)$.

D'où : $\cos\theta=\dfrac{\cos u-e}{1-e\cos u}, \qquad \theta=\arccos\dfrac{\cos u-e}{1-e\cos u}$.

Ceci posé, des calculs sans difficulté permettent d'exprimer (1) en fonction de u.

On calculera d'abord $1+e\cos\theta$, ce qui est immédiat. On calculera $d\theta$ en différentiant l'arc cosinus (§ 56). On trouvera aisément :

$$u-e\sin u=\omega t. \tag{3}$$

Ainsi u n'est plus proportionnel au temps; il varie d'une manière plus compliquée.

La formule (3) est fondamentale en Astronomie. Les planètes se déplacent sur leur trajectoire de manière que le rayon vecteur qui les joint au foyer, balaye des aires proportionnelles aux temps.

Comme les ellipses décrites sont très voisines du cercle, l'excentricité :

$$e=c:a=\sqrt{a^2-b^2}:a,$$

est très petite; peu s'en faut que u ne varie proportionnellement aux temps.

La formule (2) sert à calculer le déplacement des comètes sur leurs trajectoires.

Équations naturelles et intrinsèques des courbes planes.

178. Équations naturelles des courbes planes.

1°. — Les courbes sont données par leurs *équations naturelles* quand les coordonnées des points sont exprimées, en fonction d'une variable auxiliaire u, par les intégrales :

$$x - x_0 = \int_{u_0}^{u} \rho \cos u \, du, \qquad y - y_0 = \int_{u_0}^{u} \rho \sin u \, du. \qquad (1)$$

ρ est une fonction de u. Pour $u = u_0$, on a le point A (fig. 143) de coordonnées $x = x_0$, $y = y_0$.

Voici la raison du nom de ces équations.

Différentions-les ; on a (§ 153) :

$$dx = \rho \cos u \, du, \qquad dy = \rho \sin u \, du ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} u, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \rho \, du.$$

Il résulte de là que u est l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe Ox ; ρ est son rayon de courbure ; ds son élément d'arc. Par suite, les coordonnées x, y, d'un point sont exprimées en fonction des propriétés fondamentales de la courbe au voisinage de ce point.

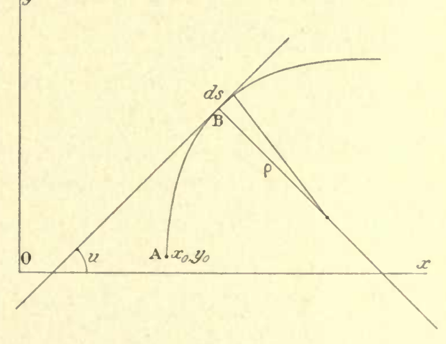


Fig. 143.

2°. — En effet, prenons l'arc s comme variable indépendante et donnons-nous la fonction :

$$\rho = f(s). \qquad (2).$$

La courbe peut être construite de proche en proche. Parvenus en un point B, connaissant par conséquent la valeur de s et la direction actuelle de la courbe, nous calculerons le rayon de courbure et déterminerons le centre de courbure. Nous traçerons un élément d'arc ds avec ce point comme centre. Nous commencerons les opérations pour la valeur $s + ds$ de la variable,... et ainsi de suite.

La courbe est donc construite indépendamment de tout système particulier d'axes de coordonnées, grâce à la connaissance seule de ses propriétés *intrinsèques*. Mais une fois construite, nous sommes évidemment libres de la rapporter à deux axes rectangulaires, dont la position et l'orientation sont arbitraires dans le plan.

C'est alors qu'intervient la variable auxiliaire u, définie par l'équation :

$$ds = \rho\, du, \qquad u - u_0 = \int_0^s \frac{ds}{\rho} = \int_0 \frac{ds}{f(s)} \qquad (3)$$

La fonction $u = F(s)$, une fois connue, les relations (1) donnent les valeurs des coordonnées x et y en fonction de u et par conséquent de s.

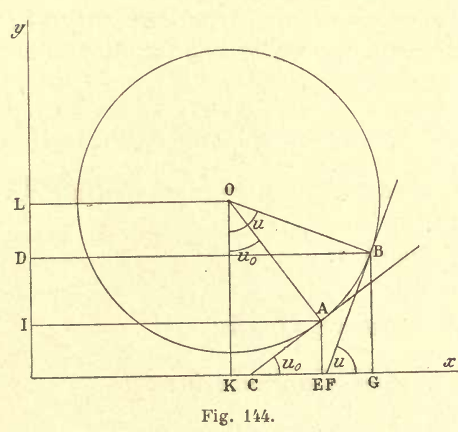


Fig. 144.

La constante arbitraire u_0 correspond à l'orientation arbitraire des axes ; les constantes x_0 et y_0 correspondent à la position arbitraire de l'origine des coordonnées.

3°. — Le cas le plus simple est celui où ρ est constant.

L'intégration est immédiate :

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \rho(\sin u - \sin u_0), \\ y - y_0 &= -\rho(\cos u - \cos u_0). \end{aligned} \qquad (1)$$

Nous pouvons écrire :

$$(x - x_0 + \rho \sin u_0)^2 + (y - y_0 - \rho \cos u_0)^2 = \rho^2,$$

qui est bien l'équation d'un cercle.

On vérifie aisément les équations (1) sur la figure 144.

Soit A le point de coordonnées x_0, y_0, u_0 ; soit B le point de coordonnées x, y, u. On a :

$$x - x_0 = \overline{EG} = \overline{KG} - \overline{KE} = \rho \sin u - \rho \sin u_0,$$

$$y - y_0 = \overline{ID} = \overline{IL} - \overline{DL} = \rho \cos u_0 - \rho \cos u.$$

179. Développante de cercle.

Nous pouvons mettre ses équations sous la forme (§ 99) :

$$x = R \cos u + Ru \sin u = R + \int_0^u Ru \cos u\, du,$$

$$y = R \sin u - Ru \cos u = \int_0^u Ru \sin u\, du.$$

R est le rayon du cercle. Il résulte de là que le rayon de courbure de la développée est $\rho = Ru$. Il est proportionnel à l'arc $\overline{AD}$ (fig. 77) comme il résulte de la définition même de la développante. L'angle que nous appelons ici u est l'angle θ de la figure 77.

L'élément d'arc a pour expression : $ds = Ru\, du$.

Intégrant, il vient : $2s = Ru^2$.

Nous n'ajoutons pas de constante arbitraire, puisqu'on doit avoir $s=0$ pour $u=0$. Ainsi l'arc de développante est proportionnel au carré de l'angle que fait la tangente avec la droite de référence.

180. Radioïde aux arcs ; spirale de Cornu.

Le système de coordonnées que nous étudions, s'impose quand on définit la courbe par une relation entre le rayon de courbure ρ et l'arc s.

1°. — Par exemple, nous voulons une courbe dont la courbure $1 : \rho$ en un point soit proportionnelle à la distance s de ce point à un point O pris pour origine des arcs, distance comptée sur la courbe. Je dis qu'on a :

$$x = a\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2 \,.\, dv, \qquad y = a\int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2 \,.\, dv. \qquad (1)$$

En effet, mettons sous la forme normale. Il faut poser :

$$\pi v^2 = 2u \; ; \qquad x = \int_0^v \frac{a}{\pi v}\cos u\, du\,, \qquad y = \int_0^v \frac{a}{\pi v}\sin u\, du.$$

Donc le rayon de courbure et l'arc ont pour expressions :

$$\rho = \frac{a}{\pi v}\,; \qquad ds = \rho\, du = a dv, \qquad s = av.$$

D'où enfin : $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\pi}{a^2}\, s,$ ce qui est la condition exigée.

La courbe cherchée est donc définie par les intégrales de Fresnel (§ 171) :

$$x = aG_0^v, \quad y = aF_0^v.$$

2°. — Nous la construirons aisément point par point au moyen de la table du § 173. C'est une spirale représentée dans la figure 145 ; elle est employée dans l'étude de la diffraction et dans celle des raccordements. Son rayon de courbure est infini à l'origine ; il diminue progressivement et tend vers 0 en s'approchant des points asymptotiques J et J', dont les coordonnées sont (§ 309) :

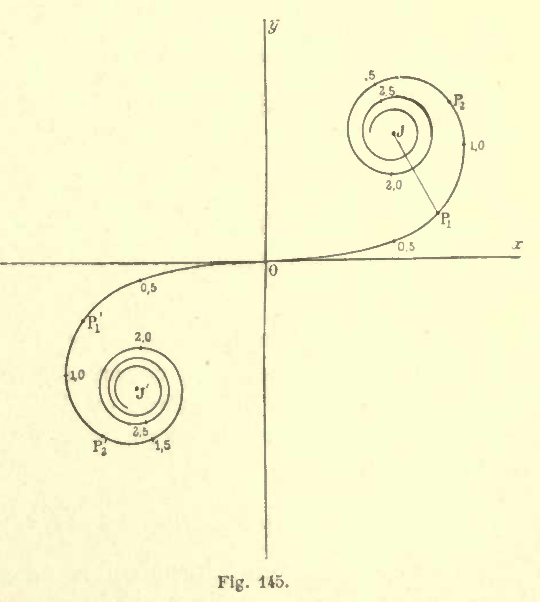


Fig. 145.

$$x = y = \pm\, 0{,}5a.$$

Il est facile de montrer qu'une spire se confond d'autant plus approximativement avec un cercle que s ou v sont plus grands.

On a en effet :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{ds}{s}.$$

Or, à mesure que s croît, une spire correspond à une valeur de Δs de plus en plus petite ; le rayon de courbure le long d'une spire reste constant de plus en plus rigoureusement. Par suite, la spire se confond de mieux en mieux avec un cercle.

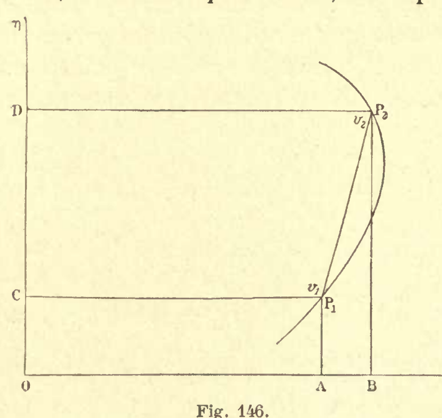


Fig. 146.

La figure suppose $a = 1$. On a inscrit sur la courbe la valeur de s, ou de v qui lui est égale.

Considérons un arc $P_1 P_2$ de la spirale dont les points extrêmes correspondent à des valeurs v_1 et v_2 de la variable v (fig. 146).

On a par définition :

$$\overline{OA} = G_0^{v_1}, \qquad \overline{OB} = G_0^{v_2}, \qquad \overline{AB} = G_{v_1}^{v_2}.$$

De même : $\overline{OC} = F_0^{v_1}, \qquad \overline{OD} = F_0^{v_2}, \qquad \overline{CD} = F_{v_1}^{v_2},$

D'où : $\overline{\text{corde } P_1P_2}^2 = (F_{v_1}^{v_2})^2 + (G_{v_1}^{v_2})^2.$

Rectification des courbes planes. Intégrales elliptiques.

181. Rectification des courbes.

Rectifier une courbe, c'est chercher la longueur d'un arc de cette courbe. Nous avons démontré, au § 76, que l'élément d'arc ds s'exprime en fonction des accroissements infiniment petits dx, dy, par la relation :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = f(x)dx.$$

Le radical est une certaine fonction de x, $f(x)$, connue par hypothèse puisque la pente est connue. Il représente l'inverse du cosinus de l'angle α que fait la tangente à la courbe (fig. 58).

On a évidemment : $dx = ds \cos\alpha.$

Pour trouver l'arc de courbe compris entre deux abscisses x_0 et x, nous sommes donc ramenés à effectuer l'intégration :

$$s = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

182. Curvimètre.

Avant d'aller plus loin, disons comment on mesure expérimentalement la longueur d'une courbe, opération nécessaire non seulement dans la pratique, mais encore pour l'étudiant comme vérification de ses calculs.

Le *curvimètre* est constitué par une roulette finement dentée R (*mollette*), dont le rayon est choisi de manière que la circonférence vaille 50 millimètres. Le pourtour est divisé en 50 parties (fig. 147).

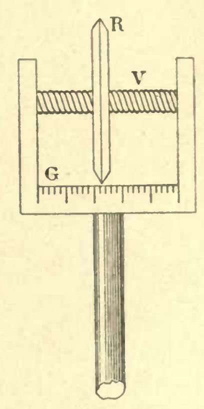


Fig. 147.

La mesure de la longueur d'un arc de courbe consiste à faire rouler dessus la roulette et à déterminer le nombre de tours et la fraction de tour qui résultent de l'opération. L'axe de la roulette est une vis le long de laquelle elle s'avance, pour chaque tour, de la longueur du pas. Le nombre entier de tours est donné par une graduation G dont l'équidistance est égale au pas de la vis. La fraction est fournie par la différence des numéros des divisions de la roulette qui se trouvent en regard de la graduation à la fin et au commencement de l'opération. Avec un peu d'habitude, on obtient le résultat à une fraction de millimètre près.

183. Arc d'ellipse ; intégrale elliptique de seconde espèce $E_k(\varphi)$.

1°. — Soit à évaluer l'arc d'ellipse BD, compté à partir du point B dans le sens de la flèche (fig. 148). Prenons pour variable auxiliaire l'angle φ complément de l'anomalie excentrique définie au § 107.

On a : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\quad x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi.$

$$ds = d\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = ad\varphi\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\ .$$

Posons $(a^2 - b^2) : a^2 = k^2$; k est l'excentricité que nous désignons par la lettre c au § 107. On a donc :

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\ d\varphi.$$

2°. — La fonction que nous rencontrons ici, s'appelle *intégrale elliptique de seconde espèce*. On pose :

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\ d\varphi = E_k(\varphi).$$

φ s'appelle l'*amplitude;* k est le *module* toujours supposé < 1. La fonction E qui, pour une valeur donnée du module, est une fonction de l'amplitude, ne s'exprime pas au moyen des fonctions usuelles les plus simples. C'est une nouvelle fonction, d'importance capitale dans toutes les parties de la Physique et de la Mécanique.

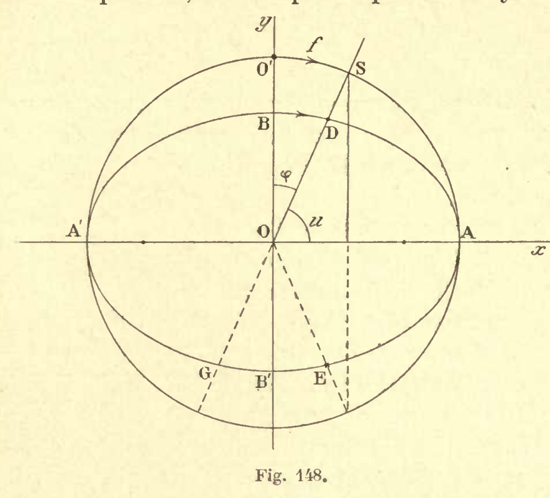


Fig. 148.

Quand l'amplitude vaut $\pi : 2$, l'intégrale est *complète;* on la désigne par E_k, ou E quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le module; aE_k représente donc le quart de la circonférence elliptique pour une excentricité k.

Pour $k = 0$, l'ellipse devient un cercle ; on a évidemment : $E = 1{,}5708$, le quart de la circonférence du cercle de rayon a valant $\pi a : 2$.

Pour $k = 1$, l'ellipse évanouissante se réduit à son grand axe; le quart de la circonférence de l'ellipse est donc égal à a ; on a :

$$E_1 = 1.$$

On écrit souvent :

$$k^2 = \sin^2 \alpha, \qquad E_{\overline{\alpha}}(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

On trouvera plus loin les tables de la fonction E.

3°. — La représentation géométrique de E conduit immédiatement aux relations suivantes, dans lesquelles nous omettons d'écrire le module qui reste le même (comparer au § 160, *3°*) :

$$E\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 2E - E\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \qquad E(\pi + \varphi) = 2E + E(\varphi),$$

$$E\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) = 4E - E\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \qquad E(2\pi + \varphi) = 4E + E(\varphi).$$

Par exemple, les deux premières de ces relations expriment les égalités évidentes :

$$\overline{BDAE} = \overline{BDAEB'} - \overline{EB'} = 2\,\overline{BDA} - \overline{BD},$$

$$\overline{BDAB'G} = \overline{BDAEB'} + \overline{B'G} = 2\,\overline{BDA} + \overline{BD};$$

et ainsi des autres.

184. Arc d'hyperbole ; intégrale elliptique de première espèce $F_k(\varphi)$.

Pour calculer un arc de l'hyperbole, repérons ses points à l'aide d'une variable auxiliaire φ.

Décrivons le cercle de rayon $\overline{OA} = a$; d'un point C défini par l'angle φ, menons une tangente à ce cercle ; elle coupe Ox en un point B qui définit l'abscisse du point P.

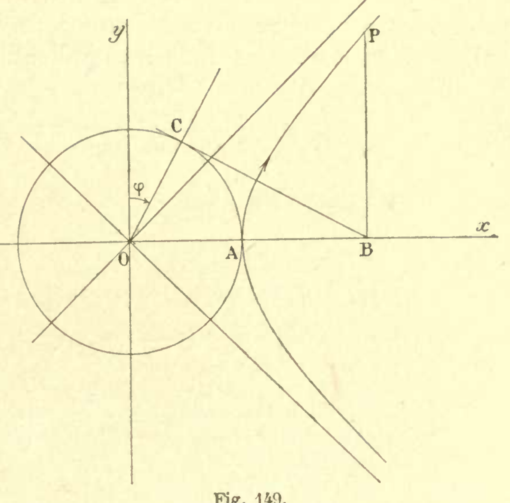


Fig. 149.

On a : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

$$x = \frac{a}{\sin\varphi}, \qquad y = \frac{b}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Posons :

$$a^2 : (a^2 + b^2) = k^2.$$

Pour éviter des difficultés qui apparaîtront tout à l'heure, comptons l'arc de courbe à partir du point A dans le sens de la flèche ; s est nul pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et croît quand φ décroît.

Ceci posé, on trouve aisément :

$$s = -\frac{a}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Intégrons par parties (§ 158) :

$$\int \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - k^2\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}};$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - \frac{1 - k^2}{k^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Sans qu'il soit nécessaire de pousser le calcul plus à bout, nous constatons que l'arc de courbe s'exprime d'abord au moyen d'un terme qui ne contient que des fonctions circulaires, ensuite au moyen de l'intégrale elliptique de seconde espèce, enfin au moyen d'une nouvelle fonction que nous appellerons *intégrale elliptique de première espèce* :

$$F_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Comme précédemment, φ est l'*amplitude*, k est le *module*.

185. Intégrales qui se ramènent aux intégrales elliptiques de première et de seconde espèces.

Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage de rechercher systématiquement quelles sont les intégrales dont le calcul se ramène aux intégrales elliptiques. Nous donnerons seulement les plus simples, celles qu'on rencontre dans les applications.

1° $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

on posera : $x = \sin\varphi$.

2° $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+p^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

on posera : $x = \operatorname{tg}\varphi, \quad k^2 = 1 - p^2$.

3° $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \int_0^\varphi \frac{2d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

on posera : $x = \sin^2\varphi$.

4° $$\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

on posera : $k = 1 : 2, \qquad x = \cos\varphi$.

Nous avons vu plus haut comment on ramène cette dernière intégrale aux formes canoniques.

5°. — Pour simplifier les intégrales :

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-2k\cos\psi+k^2}}, \qquad \int \frac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1-2k\cos\psi+k^2}},$$

on posera : $\sin(\varphi+\psi) = k\sin\varphi$.

186. Intégrales elliptiques considérées comme des aires.

1°. — Construisons les courbes (fig. 150) :

$$y = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \qquad z = 1 : \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

pour des valeurs diverses de k^2. A toute courbe y, correspond une courbe z obtenue en prenant pour ordonnées les inverses des ordonnées de la première. En effet, pour le même module et la même valeur de φ, on a : $yz = 1$.

Pour $k = 0$, les deux courbes se réduisent à l'horizontale d'ordonnée 1.

Pour l'autre limite $k=1$, la courbe y est une cosinusoïde ; comme le radical doit toujours être pris positivement, l'arc de cosinusoïde entre $\pi : 2$ et π est remplacé par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. La courbe z possède une asymptote verticale pour $\varphi=\pi : 2$, puisqu'on a alors $y=0$.

Outre les précédentes, la figure 150 représente les courbes y et z pour $k^2=0,75$ et $k^2=0,36$.

2°. — Les intégrales elliptiques de première et de seconde espèces

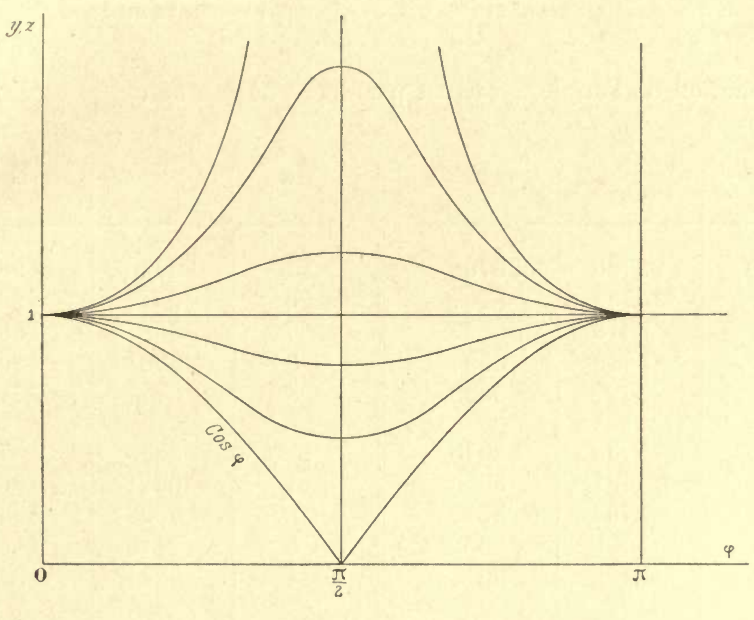


Fig. 150.

sont les aires limitées au moyen des courbes que nous venons de construire, au moyen des axes de coordonnées, enfin d'une ordonnée déterminée par la limite supérieure (amplitude).

Pour les intégrales complètes, cette seconde ordonnée correspond à $\pi : 2$. Si $k=0$, les intégrales complètes valent l'une et l'autre le rectangle qui a l'unité pour hauteur, $\pi : 2$ pour base. D'où :

$$E_0 = F_0 = \pi : 2.$$

L'intégration est possible avec les fonctions usuelles pour $k=1$; on a :

$$E_1 = \int_0^\varphi \cos\varphi \, . \, d\varphi = \sin\varphi, \qquad F_1 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur la fonction F_1 (§ 213).

187. Tables des intégrales elliptiques complètes.

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}};$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

en fonction de l'angle α variant par degré de 0 à 90°.

α	F	E	α	F	E
0°	1 5708	1 5708	**25°**	1 6490	1 4981
1	5709	5707	6	6557	4924
2	5713	5703	7	6627	4864
3	5719	5697	8	6701	4803
4	5727	5689	9	6777	4740
5°	1 5738	1 5678	**30°**	1 6858	1 4675
6	5751	5665	1	6941	4608
7	5767	5649	2	7028	4539
8	5785	5632	3	7119	4469
9	5805	5611	4	7214	4397
10°	1 5828	1 5589	**35°**	1 7312	1 4323
1	5854	5564	6	7415	4248
2	5882	5537	7	7522	4171
3	5913	5507	8	7633	4092
4	5946	5476	9	7748	4013
15°	1 5981	1 5442	**40°**	1 7868	1 3931
6	6020	5405	1	7992	3849
7	6061	5367	2	8122	3765
8	6105	5326	3	8256	3680
9	6151	5283	4	8396	3594
20°	1 6200	1 5238	**45°**	1 8541	1 3506
1	6252	5191	6	8691	3418
2	6307	5141	7	8848	3329
3	6365	5090	8	9011	3238
4	6426	5037	9	9180	3147

Tables des intégrales elliptiques complètes (*suite*).

α	F	E	α	F	E
50°	1 9356	1 3055	**70°**	2 5046	1 1184
1	9539	2963	1	5507	1096
2	9729	2870	2	5998	1011
3	9927	2776	3	6521	0927
4	2 0133	2681	4	7081	0844
55°	2 0347	1 2587	**75°**	2 7681	1 0764
6	0571	2492	6	8327	0686
7	0804	2397	7	9026	0611
8	1047	2301	8	9786	0538
9	1300	2206	9	3 0617	0468
60°	2 1565	1 2111	**80°**	3 1534	1 0401
1	1842	2015	1	2553	0338
2	2132	1920	2	3699	0278
3	2435	1826	3	5004	0223
4	2754	1732	4	6519	0172
65°	2 3088	1 1638	**85°**	3 8317	1 0127
6	3439	1545	6	4 0528	0086
7	3809	1453	7	3387	0053
8	4198	1362	8	7427	0026
9	4610	1272	9	5 4349	0008
			90°	∞	1 0000

188. Intégrales de première espèce F.

Modules α =	0°	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°
φ = 9°	1571	1571	1571	1572	1573	1574	1575	1576	1577	1577	1577
18°	3142	3143	3146	3152	3159	3167	3176	3183	3189	3193	3195
27°	4712	4716	4728	4747	4772	4800	4829	4856	4878	4892	4897
36°	6283	6293	6320	6365	6423	6491	6563	6633	6690	6729	6743
45°	7854	7872	7924	8009	8123	8260	8411	8561	8692	8781	8814
54°	9425	9454	9540	9682	9879	10124	10405	10700	10971	11169	11242
63°	10996	11039	11168	11386	11694	12093	12575	13118	13664	14097	14268
72°	12566	12626	12807	13116	13564	14167	14939	11886	16964	17972	18427
81°	14137	14215	14454	14866	15478	16328	17481	19028	21094	23685	25421
90°	15708	15805	16105	16627	17415	18541	20133	22435	25998	32553	∞

189. Intégrales de seconde espèce E.

Modules $\alpha = 0^\circ$		9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°
$\varphi = 9^\circ$	1571	1571	1570	1569	1569	1568	1567	1566	1565	1565	1564
18°	3142	3140	3137	3131	3124	3116	3108	3101	3095	3091	3090
27°	4712	4708	4696	4678	4654	4628	4601	4576	4557	4544	4540
36°	6283	6274	6247	6204	6149	6087	6024	5966	5919	5888	5878
45°	7854	7836	7785	7704	7600	7482	7360	7246	7153	7092	7071
54°	9425	9396	9312	9179	9006	8806	8598	8401	8237	8129	8090
63°	10996	10953	10828	10627	10365	10060	9736	9423	9156	8975	8910
72°	12566	12507	12333	12053	11685	11250	10780	10315	9907	9617	9511
81°	14137	14060	13831	13463	12974	12391	11751	11102	10507	10057	9877
90°	15708	15611	15326	14864	14248	13506	12681	11826	11011	10338	10000

CHAPITRE X

FONCTION LOGARITHMIQUE ET FONCTION EXPONENTIELLE

190. Définition du logarithme naturel.

1°. — Rapportons l'hyperbole équilatère (§ 117) :

$$x^2 - \eta^2 = 2,$$

à de nouveaux axes rectangulaires faisant avec les premiers un angle $\theta = -45°$. Pour obtenir la nouvelle équation, il faut remplacer (§ 78) :

x par $(x' + \eta')\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

η par $(-x' + \eta')\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où, en supprimant les accents :

$$x\eta = 1.$$

C'est l'équation de l'hyperbole équilatère FCDD′ rapportée à ses asymptotes qui sont rectangulaires (§ 117). Le point C a pour coordonnées :

$$x = 1, \quad y = 1.$$

Fig. 151.

2°. — On appelle *logarithme naturel* d'un nombre x représenté par la longueur $\overline{OB}$, l'aire ACDBA (fig. 151) :

$$\log x = \int_1^x \eta dx = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

L'aire est limitée par l'axe Ox, l'hyperbole et les ordonnées d'abscisses 1 et x.

Nous définissons ainsi une certaine fonction de x, $y = \log x$, dite *fonction logarithmique*. A chaque ordonnée BDM d'abscisse $x = \overline{OB}$ supérieure à l'unité, correspondent une aire positive ACDBA et, par suite, un point M de la logarithmique situé au-dessus de Ox.

On a : $\int_1^1 \eta dx = 0, \qquad \log 1 = 0.$

3°. — Nous conservons la même définition pour les logarithmes des nombres inférieurs à l'unité :

$$\log x = \int_1^x \eta dx = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Les ordonnées η sont encore positives; mais dans le passage de 1 à x (qui est maintenant inférieur à 1), les variations dx deviennent négatives. Donc le logarithme du nombre représenté par $x = \overline{OE} < 1$, est mesuré par l'aire EFCA, *mais comptée négativement*.

De la symétrie de l'hyperbole par rapport à OC bissectrice des axes, on peut immédiatement tirer que, si le logarithme d'un nombre très grand est lui-même très grand (ce qui est le cas)), le logarithme d'un nombre très petit est négatif et très grand. Nous verrons en effet qu'on a :

$$\log \infty = +\infty, \qquad \log 0 = -\infty.$$

Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

Nous admettrons qu'on a dressé une table de logarithmes naturels par l'un des procédés ci-dessus exposés; par exemple, en traçant l'hyperbole, et en déterminant au planimètre d'Amsler les surfaces comprises entre des ordonnées successives (§ 167), ou en décrivant mécaniquement la courbe intégrale (§ 170).

191. Logarithmes d'un produit, d'une puissance. Généralisation de la notion de puissance.

1°. — Soient les abscisses (fig. 151) :

$$\overline{OA} = 1, \qquad \overline{OA'} = k; \qquad \overline{OB} = x, \qquad \overline{OB'} = kx.$$

Elles déterminent des aires ACDB et A'C'D'B' que je dis égales. En effet, supposons-les divisées chacune en n parties par des ordonnées équidistantes. L'équidistance sera k fois plus grande pour la seconde aire que pour la première, puisqu'on a :

$$\overline{AB} = x - 1, \qquad \overline{A'B'} = kx - k = k(x - 1).$$

Mais les ordonnées ou hauteurs moyennes des trapèzes curvilignes ainsi obtenus sont *respectivement* k fois plus petites pour la seconde

aire que pour la première, en vertu de l'équation de la courbe :

$$x\eta = 1,$$

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}, \qquad \overline{BD} = k \cdot \overline{B'D'}, \ldots,$$

et ainsi des ordonnées intermédiaires. *Donc les aires sont égales.*

On a : $\overline{ACDB} + \overline{BDD'B'} = \overline{ACC'A'} + \overline{A'C'D'B'}$;

donc : $\text{aire } \overline{ACC'A'} = \text{aire } \overline{BDD'B'}$.

Ceci posé, on a par définition :

$$\text{aire } \overline{ACBD} = \log x, \qquad \text{aire } \overline{ACD'B'} = \log kx, \qquad \text{aire } \overline{ACC'A'} = \log k.$$

Or : $\overline{ACD'B'} = \overline{ACDB} + \overline{BDD'B'} = \overline{ACDB} + \overline{ACC'A'}$.

D'où la relation fondamentale où le nombre k est quelconque :

$$\log kx = \log x + \log k.$$

Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

2°. — La propriété se généralise immédiatement pour un nombre quelconque de facteurs; on a, en effet :

$$\log (uv)w = \log (uv) + \log w = \log u + \log v + \log w,$$

puisque la multiplication est une opération *associative* et *permutative*.

Corollaire I. — Soit à calculer le logarithme de x^n, où n est positif et entier. On a :

$$\log x^n = \log (x \cdot x \cdot x \ldots) = \log x + \log x + \ldots = n \log x.$$

Corollaire II. — Soit à calculer le logarithme de :

$$z = \sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}},$$

où p est positif et entier. On a par définition et en vertu du corollaire I :

$$z^p = x, \qquad \log z^p = \log x = p \log z, \qquad \log z = \frac{1}{p} \log x.$$

Corollaire III. — Soit à calculer le logarithme de $z = x^{\frac{q}{p}}$.

$$z^p = x^q, \qquad p \log z = q \log x, \qquad \log z = \frac{q}{p} \log x.$$

Généralisation. — Ainsi la même règle s'applique, que l'exposant positif soit entier ou fractionnaire. Nous la généralisons pour un nombre incommensurable. Les logarithmes fournissent donc le moyen de calculer une puissance n positive quelconque d'un nombre. Nous prenons dans la table le logarithme de ce nombre, nous le multiplions par n; nous cherchons enfin le nombre correspondant à ce nouveau logarithme.

Cette règle s'applique à l'élévation aux puissances comme à l'extraction des racines.

192. Logarithme d'un quotient : généralisation.

1°. — Comparons les logarithmes des nombres *inverses* $\overline{Ac} = x$, $\overline{OE} = 1 : x$ (fig. 151). Par définition, on a :

$$\log x = \text{aire AC}fe, \qquad \log (1 : x) = - \text{aire EFCA}.$$

Un raisonnement calqué sur celui du paragraphe précédent prouve que les aires en question sont égales; d'où :

$$\log x = - \log (1 : x).$$

2°. — Mais on peut écrire : $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

d'où :
$$\log x^{-1} = - \log x.$$

De même : $\log \frac{1}{x^n} = \log (x^n)^{-1} = - \log x^n = - n \log x.$

La règle du paragraphe précédent s'applique donc aux exposants négatifs quelconques.

3°. — On a : $\log \frac{u}{v} = \log u + \log \frac{1}{v} = \log u - \log v.$

La table de logarithmes permet donc d'effectuer les divisions. On cherche les logarithmes des nombres u et v, on en fait la différence; on cherche enfin le nombre qui a cette différence comme logarithme : c'est le quotient demandé.

193. Fonction inverse du logarithme : exponentielle.

1°. — Nous venons de définir une fonction : $y = \log x$. Nous concevons qu'on en puisse calculer des tables pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et ∞ (voir plus loin). Il suffit même d'effectuer les calculs pour les nombres compris entre 1 et ∞, puisqu'un nombre et son inverse ont des logarithmes égaux et de signes contraires.

Au lieu de considérer y comme fonction de x, regardons x comme fonction de y :

$$x = (\text{nombre dont le logarithme est } y), \qquad x = \varphi(y).$$

La table des logarithmes permet de calculer immédiatement la nouvelle fonction. Naturellement nous lui chercherons un titre plus court. Il est fort remarquable que nous la connaissions déjà dans des cas particuliers, et que nous n'ayons qu'à généraliser un symbolisme déjà existant.

2°. — Soit e un nombre qui est encore à déterminer. J'ai toujours le droit de poser *pour chaque nombre x et chaque logarithme y :*

$$x = e^y,$$

e ne restant pas nécessairement le même quand x varie.

Quel que soit le nombre x *positif*, il est bien évident que je peux trouver un nombre e qui, élevé à une puissance égale au logarithme connu y de x, redonne le nombre x. Il n'est pas nécessaire de compliquer par la considération de nombres incommensurables. Je n'ai qu'à remplacer y par une fraction voisine de sa valeur exacte; je pourrai toujours après tâtonnements déterminer *un* nombre e.

Mais ce qui n'est pas évident, c'est que la valeur trouvée pour e sera la même pour tous les nombres x et les logarithmes y correspondants. De sorte que la fonction inverse du logarithme sera définie par la relation :

$$x = e^y,$$

où e est un certain nombre à déterminer une fois pour toutes.

Nous appellerons *exponentielle* la fonction e^y.

3°. — Soit x_1, x_2, x_3, ... des nombres dont les logarithmes sont y_1, y_2, ...

On a : $$y_1 = \log x_1, \qquad y_2 = \log x_2, \ \ldots;$$

$$y_1 + y_2 + \ldots = \log x_1 + \log x_2 + \ldots = \log (x_1 x_2 x_3 \ldots).$$

Passons aux fonctions inverses; supposons que le nombre e soit unique; montrons que les résultats obtenus dans cette hypothèse sont conformes : d'abord aux propriétés des logarithmes, ensuite aux règles de calcul des exposants.

On a : $$x_1 = e^{y_1}, \qquad x_2 = e^{y_2}, \ \ldots;$$

$$x_1 x_2 x_3 \ldots = e^{y_1} e^{y_2} e^{y_3} \ldots = e^{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots}.$$

Repassons aux logarithmes. Nous retrouvons la formule :

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = \log (x_1 x_2 x_3 \ldots).$$

Naturellement le nombre e, apparaissant comme unique pour les produits, l'est aussi pour les puissances.

4°. — Appliquons aux quotients. Soit :

$$y_1 = \log x_1, \qquad y_2 = \log x_2; \qquad y_1 - y_2 = \log x_1 - \log x_2 = \log \frac{x_1}{x_2}.$$

Admettons le nombre e unique; on a :

$$x_1 = e^{y_1}, \qquad x_2 = e^{y_2}; \qquad \frac{x_1}{x_2} = e^{y_1} : e^{y_2} = e^{y_1 - y_2}.$$

Repassons aux logarithmes :

$$y_1 - y_2 = \log (x_1 : x_2).$$

On démontrerait inversement et par l'absurde que si le nombre e

n'est pas toujours le même, on ne vérifie pas les propriétés des logarithmes en appliquant les règles de calcul des exposants.

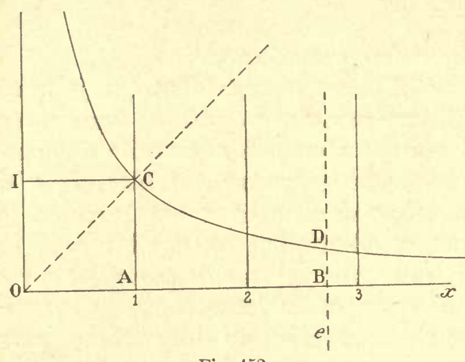


Fig. 152.

5°. — Reste à trouver ce nombre e.

Il représente l'abscisse $x = \overline{OB}$ (fig. 152), telle que le logarithme soit égal à 1 :

$$x = e^1 = e.$$

Il faut donc chercher un point B tel qu'on ait :

$$\text{aire } \overline{ACDB} = \text{aire } \overline{OICA} = 1.$$

Peu importent les procédés qui ont effectivement servi au calcul. On trouve : $e = 2{,}7183$;

par suite : $\log 2{,}7183 = 1$.

194. Logarithmes naturels des nombres de 1 à 300 multipliés par $10000 = 10^4$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0000	6931	10986	13863	16094	17918	19459	20794	21972
1	23026	23979	24839	25649	26390	27080	27725	28332	28903	29444
2	29957	30445	30910	31355	31780	32188	32581	32958	33322	33673
3	34012	34339	34657	34965	35263	35553	35835	36109	36375	36635
4	36888	37135	37376	37612	37841	38066	38286	38501	38712	38918
5	39120	39318	39512	39703	39889	40073	40253	40430	40604	40775
6	40943	41108	41271	41431	41588	41743	41896	42047	42195	42341
7	42485	42626	42766	42904	43040	43174	43307	43438	43567	43694
8	43820	43943	44067	44188	44308	44426	44543	44659	44773	44886
9	44998	45108	45217	45326	45433	45538	45643	45747	45849	45951
10	46051	46151	46249	46347	46444	46539	46634	46728	46821	46913
11	47004	47095	47185	47273	47362	47449	47536	47621	47706	47791
12	47875	47958	48040	48121	48202	48283	48362	48441	48520	48598
13	48675	48752	48828	48903	48978	49052	49126	49199	49272	49344
14	49416	49487	49558	49628	49698	49767	49836	49904	49972	50039
15	50106	50172	50238	50304	50369	50434	50498	50562	50626	50689
16	50751	50814	50876	50937	50998	51059	51119	51180	51239	51299
17	51358	51416	51475	51533	51590	51647	51704	51761	51817	51873
18	51929	51985	52040	52094	52149	52203	52257	52311	52364	52417
19	52470	52522	52575	52627	52678	52730	52781	52832	52882	52933
20	52983	53033	53082	53132	53181	53230	53278	53327	53375	53423
21	53471	53518	53565	53613	53659	53706	53752	53799	53845	53890
22	53936	53981	54026	54071	54116	54161	54205	54249	54293	54337
23	54380	54424	54467	54510	54553	54595	54638	54680	54722	54764
24	54806	54848	54889	54930	54971	55012	55053	55093	55134	55174
25	55214	55254	55294	55333	55373	55412	55451	55490	55529	55568
26	55606	55645	55683	55721	55759	55797	55835	55872	55909	55947
27	55984	56021	56058	56094	56131	56167	56204	56240	56276	56312
28	56347	56383	56419	56454	56489	56524	56560	56594	56629	56664
29	56698	56733	56767	56801	56835	56869	56903	56937	56971	57004
30	57037	57071	57104	57137	57170	57203	57235	57268	57301	57333

195. Table de valeurs de la fonction e^x.

x	e^x	x	e^x	x	e^x	x	e^x	x	e^x
0,1	1,1052	**2,1**	8,1662	**4,1**	60,340	**6,1**	445,86	**8,1**	3984,5
2	1,2214	2	9,0250	2	66,686	2	492,75	2	3641,0
3	1,3499	3	9,9742	3	73,700	3	545,57	3	4023,9
4	1,4918	4	11,0232	4	81,451	4	601,85	4	4447,1
5	1,6487	5	12,1825	5	90,017	5	665,14	5	4914,8
6	1,8221	6	13,463	6	99,48	6	735,10	6	5431,7
7	2,0138	7	14,880	7	109,95	7	812,41	7	6002,9
8	2,2255	8	16,445	8	121,51	8	897,85	8	6634,2
9	2,4596	9	18,174	9	134,29	9	992,27	9	7332,0
1,0	2,7183	3,0	20,086	5,0	148,41	7,0	1096,63	9,0	8103,1
1,1	3,0042	**3,1**	22,198	**5,1**	164,03	**7,1**	1212,0	**9,1**	8955
2	3,3201	2	24,533	2	181,27	2	1339,4	2	9897
3	3,6693	3	27,113	3	200,34	3	1480,3	3	10938
4	4,0552	4	29,964	4	221,41	4	1636,0	4	12088
5	4,4817	5	33,115	5	244,69	5	1808,0	5	13360
6	4,9530	6	36,598	6	270,43	6	1998,2	6	14765
7	5,4739	7	40,447	7	298,87	7	2208,3	7	16318
8	6,0496	8	44,701	8	330,30	8	2440,6	8	18034
9	6,6859	9	49,402	9	365,04	9	2697,3	9	19930
2,0	7,3891	4,0	54,598	6,0	403,43	8,0	2981,0	10,0	22026

196. Table de la fonction e^{-x}.

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,1	0,90484	**1,1**	0,33287	**2,1**	0,12246	**3,1**	0,045049	**4,1**	0,016573
2	81873	2	30119	2	11080	2	040762	2	014996
3	74082	3	27253	3	10026	3	036883	3	013569
4	67032	4	24660	4	09073	4	033373	4	012277
5	60653	5	22313	5	08208	5	030197	5	011109
6	0,54881	6	0,20190	6	0,074274	6	0,027324	6	0,010052
7	49659	7	18268	7	067205	7	024724	7	009095
8	44933	8	16530	8	060810	8	022371	8	008230
9	40657	9	14957	9	055023	9	020242	9	007447
1,0	36788	2,0	13534	3,0	049787	4,0	018316	5,0	006738

197. Dérivée du logarithme et de la fonction exponentielle.

1°. — Nous avons insisté sur cette proposition que *définir une fonction par l'aire d'une courbe, c'est la définir par sa dérivée* (§ 152).

Nous n'avons donc pas à chercher la dérivée du logarithme, simplement parce que nous la connaissons :

$$y = \log x = \int_1^x \frac{dx}{x}, \qquad dy = d\log x = \frac{dx}{x}.$$

L'accroissement de la fonction est en raison inverse de la valeur actuelle de la variable. Nous connaissons, par suite, la dérivée de la fonction inverse :

$$x = e^y, \qquad dx = xdy = e^y dy, \qquad \frac{de^y}{dy} = e^y.$$

Les dérivées de tous les ordres de la fonction exponentielle sont identiques avec celle-ci, proposition fondamentale et connue depuis plusieurs siècles. Il ne faut pas oublier que la méthode suivie dans cet ouvrage pour introduire les logarithmes, est celle même de l'inventeur, Neper (vers 1600).

2°. — Grâce aux expressions précédentes, on établit aisément une formule souvent employée dans la théorie des erreurs.

Soit : $$Y = u^m v^n w^p \ldots,$$

une fonction composée. Prenons les logarithmes et dérivons :

$$\log Y = m \log u + n \log v + p \log w + \ldots$$

$$\frac{dY}{Y} = m\frac{du}{u} + n\frac{dv}{v} + p\frac{dw}{w} + \ldots$$

Appliquons cette formule à des variations petites. Elle prend pour énoncée : *l'erreur relative sur* Y *est égale à la somme des erreurs relatives sur* u, v, w, ..., *multipliées par les puissances correspondantes.* Ces puissances sont positives ou négatives; corrélativement les erreurs sur Y qui proviennent d'erreurs sur u, v, ... sont additives ou soustractives.

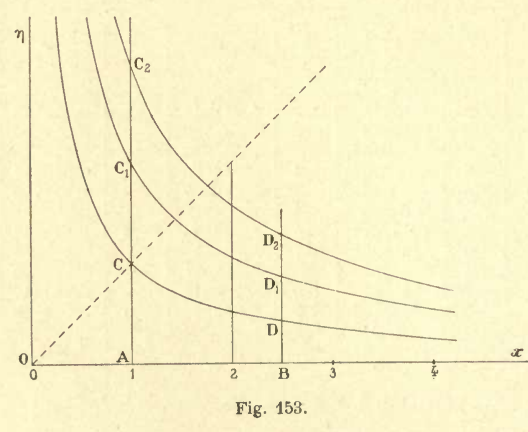


Fig. 153.

198. Différents systèmes de logarithmes.

Au lieu de l'hyperbole équilatère $x\eta = 1$, prenons l'hyperbole également équilatère :

$$x\eta = M;$$

M est un nombre positif quelconque que nous appellerons *module :* la figure 153 représente deux de ces hyperboles. Nous définissons ainsi un nouveau système de logarithmes, $\operatorname{Log} x$:

$$Y = \operatorname{Log} x = \int_1^x \eta dx = M\int_1^x \frac{dx}{x} = M \log x :$$

le Log d'un nombre x est donc égal au logarithme naturel de ce nombre multiplié par le module.

Tous les théorèmes précédemment démontrés pour les logarithmes naturels subsistent, puisqu'ils reposent sur la seule hypothèse que les abscisses et les ordonnées sont *en raison inverse*, quelle que soit la valeur constante de leur produit.

La fonction inverse du Logarithme de module M est de la forme exponentielle :

$$x = E^Y, \quad \text{analogue à la précédente :} \quad x = e^y.$$

E est la *base* du nouveau système de logarithmes.

Nous avons identiquement, en prenant les logarithmes naturels ou non des deux expressions précédentes :

$$\log x = Y \,.\, \log E = \text{Log}\, x \,.\, \log E,$$

$$\text{Log}\, x = y \,\text{Log}\, e = \log x \,.\, \text{Log}\, e;$$

d'où la relation : $\log E \,.\, \text{Log}\, e = 1.$ (1)

Mais nous avons trouvé ci-dessus :

$$\text{Log}\, x = M \log x; \quad \text{d'où :} \quad M = \text{Log}\, e = 1 : \log E. \qquad (2)$$

199. Logarithmes vulgaires.

1°. — Parmi tous les systèmes possibles de logarithmes (en nombre infini), il en est un qui tire son importance capitale de ce fait que notre système de numération est *décimal;* c'est celui dont la base est 10 : $E = 10.$

Reportons-nous à la table des Logarithmes naturels; nous trouvons : $\log 10 = 2{,}3026 = 1 : 0{,}4343.$

On a donc : $M = 0{,}4343.$

Pour obtenir les logarithmes vulgaires, il faut multiplier les logarithmes naturels par 0,4343. *Réciproquement, pour obtenir les logarithmes naturels, il faut multiplier les logarithmes vulgaires par le logarithme naturel de* 10, *c'est-à-dire par l'inverse du module*

$$1 : M = 2{,}3026.$$

2°. — Nous avons dit que l'importance des logarithmes *vulgaires* vient de ce que notre numération est décimale. De l'équation :

$$x = 10^Y,$$

on conclut que les logarithmes de 10, 100, 1000, ... sont 1, 2, 3, ...

Les logarithmes des nombres compris entre 10^n et 10^{n+1}, ont n pour partie entière (*caractéristique*).

Les logarithmes vulgaires de $1 : 10$, $1 : 100$, $1 : 1000$, ... sont -1, -2, -3, ... Soit un nombre compris entre $1 : 10^n$ et $1 : 10^{n+1}$; son logarithme est compris entre $-n$ et $-(n+1)$.

Au lieu de l'écrire $-(n+\alpha)$, on l'écrit $-(n+1)+\beta$.

On a évidemment : $\beta+\alpha=1$.

Remarque.

Si les logarithmes vulgaires sont seuls employés dans les calculs, ce sont les logarithmes naturels qui se présentent toujours dans l'étude des fonctions et la représentation des phénomènes. Cela tient à la simplicité des coefficients de l'équation différentielle qui les définit.

200. Logarithmes d'addition et de soustraction.

On calcule rapidement $\log(a+b)$ et $\log(a-b)$ à partir de $\log a$ et de $\log b$, au moyen des *logarithmes d'addition et de soustraction* de Gauss. Les tables donnent $\log(1+x)$ et $\log(1-x)$ en fonction de $\log x$.

1°. — Soit à calculer $\log(a+b)$ connaissant $\log a$ et $\log b$. Il suffit évidemment de chercher a et b dans la table ordinaire de logarithmes, de faire la somme $a+b$, enfin de chercher le logarithme de cette somme. On abrège les opérations grâce à la table de Gauss.

On a : $$\log(a+b)=\log a\left(1+\frac{b}{a}\right)=\log a+\log\left(1+\frac{b}{a}\right). \quad (1)$$

Posons : $$\frac{b}{a}=x; \qquad \log x=\log b-\log a; \quad (2)$$

$$\log(a+b)=\log a+\log(1+x). \quad (3)$$

On calcule $\log x$ au moyen de l'équation (2); la table donne $\log(1+x)$ en fonction de $\log x$; on tire $\log(a+b)$ de l'équation (3).

2°. — Soit à calculer $\log(a-b)$:

$$\log(a-b)=\log a\left(1-\frac{b}{a}\right)=\log a+\log\left(1-\frac{b}{a}\right);$$

$$\log b-\log a=\log x; \qquad \log(a-b)=\log a+\log(1-x).$$

Pour éviter les *caractéristiques* négatives, les tables donnent habituellement :

$$\log\frac{1}{1-x}=-\log(1-x);$$

d'où : $$\log(a-b)=\log a-\log\frac{1}{1-x}.$$

201. Spirales logarithmiques.

Nous pouvons représenter les fonctions logarithmique ou exponentielle par des courbes en coordonnées polaires : nous décrivons ainsi deux spirales intéressantes.

1°. — Spirale logarithmique ordinaire.

Soit d'abord (fig. 154) :

$$r = ae^{m\theta}, \qquad m\theta = \log\frac{r}{a} = \log r - \log a.$$

L'angle α de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur est fourni par la relation (§ 80) :

$$\operatorname{tg}\alpha = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{m};$$

il est constant et indépendant de a.

Rendons compte de ce dernier fait.

Changeons la droite de référence. Prenons OX′ qui fait avec OX l'angle θ'. On a :

$$\Theta = \theta + \theta',$$
$$\theta = \Theta - \theta'.$$

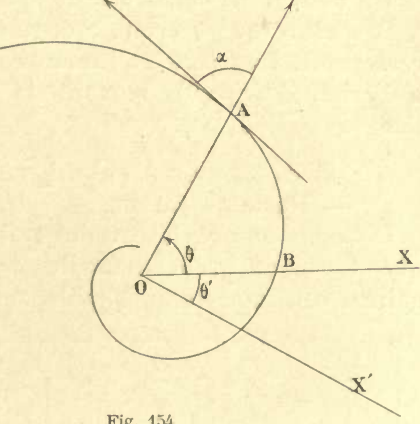


Fig. 154.

L'équation de la spirale devient :

$$r = ae^{m(\Theta - \theta')} = \left(ae^{-m\theta'}\right)e^{m\Theta};$$

elle a même forme que précédemment *avec un autre coefficient*. L'angle α est constant; puisqu'en changeant la droite de référence, on modifie à son gré le coefficient, l'angle α n'en doit pas dépendre.

2°. — L'aire S du secteur limité par la courbe et par deux rayons vecteurs faisant avec OX les angles θ_0 et θ_1, est (§ 174) :

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{2m\theta}\,d\theta = \frac{a^2}{4m}\left(e^{2m\theta_1} - e^{2m\theta_0}\right).$$

On peut aussi écrire :

$$S = \frac{1}{4m}\left(r_1^2 - r_0^2\right).$$

3°. — Pour

$$\theta = 0, \quad r = a = \overline{OB}.$$

Pour $\theta < 0$, l'exponentielle :

$$e^{m\theta} = 1 : \left(e^{-m\theta}\right),$$

devient plus petite que l'unité; le rayon vecteur est inférieur à $\overline{OB}$. Pour de grandes valeurs négatives de θ, r tend vers 0. Donc la spirale admet l'origine pour point asymptotique.

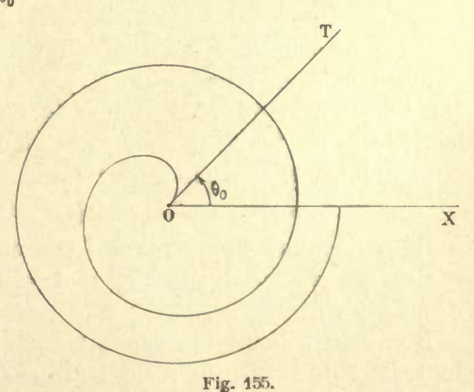


Fig. 155.

Cependant la somme des aires de toutes ces spirales en nombre *infini* tend vers une limite *finie*. Faisons dans les formules du *2*° :

$$\theta_0 = -\infty, \quad r_0 = 0,$$

il vient :

$$S = r_1^2 : 4m.$$

4°. — Spirale logarithmique inverse.

On peut aussi construire la spirale : $\theta = \theta_0 e^{mr}$.

A mesure que θ croît, r augmente, *mais lentement*. Les spires se resserrent. La figure 155 montre l'allure de la courbe. Elle aboutit à l'origine $(r = 0)$ suivant la direction OT qui fait avec OX l'angle θ_0 (§ 80, *3*°).

202. Règles à calcul, cercles à calcul.

1°. — Règles a calcul.

Divisons une règle par des traits dont les distances au trait marqué 1 soient proportionnelles aux logarithmes (naturels ou vulgaires, peu importe, puisqu'ils sont proportionnels) des nombres ins-

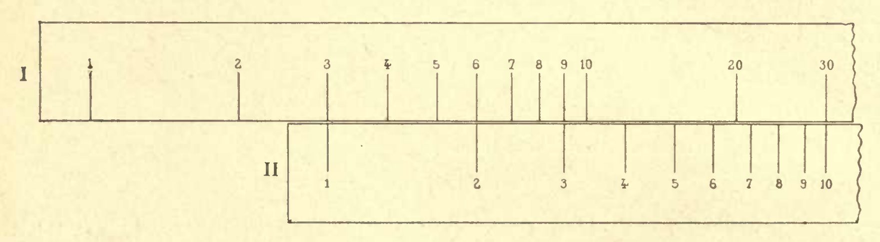


Fig. 156.

crits. Ainsi les traits marqués 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, sont à des distances du trait 1 proportionnelles à : 301, 477, 602, 699, 778, 845, 903, 954, 1 000.

Nous pouvons prolonger indéfiniment la règle. Les traits 10, 20, 30, ..., 100, se placeront les uns par rapport aux autres comme précédemment les traits 1, 2, 3, ..., 10.

Chaque série de 10^n à 10^{n+1}, recommencera la série 1 à 10.

Prenons deux règles *symétriques* et appliquons leurs bords divisés. Dans la figure 156, le trait 1 de la règle II coïncide avec le trait 3 de la règle I. Le trait x de la règle II coïncide, par suite, avec le trait d'un nombre y marqué sur la règle I tel qu'on ait :

$$\log y = \log 3 + \log x = \log 3x, \qquad y = 3x.$$

Effectivement nous voyons coïncider les traits 2, 3, 10, de la règle II avec les traits $(2 \times 3 =)6$, $(3 \times 3 =)9$, $(10 \times 3 =)30$ de la règle I.

Plus généralement, faisons coïncider le trait 1 de la règle II avec le trait z de la règle I. Le trait x de la règle II coïncide avec le trait y de la règle I.

On a : $\log y = \log z + \log x = \log xz, \qquad y = xz.$

Inversement, pour diviser y par x, nous faisons coïncider les traits y et x des deux règles, et nous lisons le trait de l'une des règles qui est en regard du trait 1 de l'autre.

Les intervalles 1 2, 2 3, ... sont subdivisés en un nombre de parties (non équidistantes) en rapport avec leur écartement. Par exemple, si la règle est assez longue, les intervalles de 1 à 2 et de 10 à 20 sont subdivisés par des traits dont les distances au trait 1 sont proportionnelles aux logarithmes des nombres 11, 12, 13, ..., 19, 20.

2°. — Cercles a calcul.

Puisque les séries 10^n à 10^{n+1} sont identiques, il est naturel de diminuer l'encombrement de l'appareil en traçant les divisions sur deux cercles concentriques, mobiles l'un par rapport à l'autre. Chacun d'eux porte une seule division de 1 à 10. L'appareil est représenté figure 157. La théorie est exactement la même que celle de la règle. L'avantage de la disposition circulaire est que l'on ne sort jamais des limites de la règle, *qui est devenue indéfinie*.

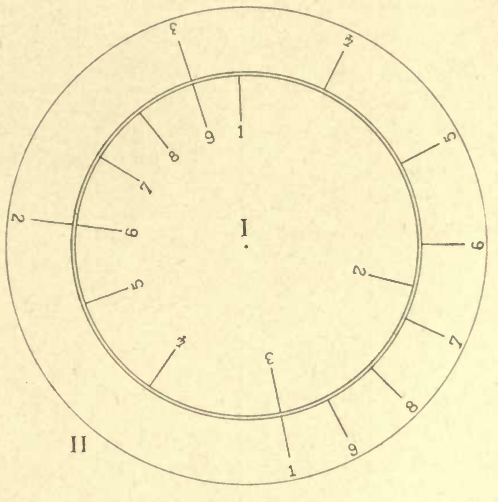


Fig. 157.

3°. — La précision des calculs au moyen de la règle ou du cercle est naturellement très limitée. Vouloir la rendre supérieure au millième est une aberration; ces instruments très utiles et très remarquables n'ont pas été inventés pour cela. Remplacer une opération arithmétique (soit directe, soit à l'aide d'une table) par une expérience *minutieuse*, c'est remplacer un travail machinal et nullement fatigant par un pointé qui exige un effort d'attention et une certaine habileté visuelle : le gain est plutôt négatif. D'autre part, acheter un cercle à calcul de précision (250 francs) est une prodigalité sans nom, alors qu'on trouve des machines à calcul pour 400 francs.

Les règles et cercles usuels coûtent de 15 à 20 francs.

Au bureau, les carrés, cubes, racines carrées, racines cubiques, inverses, ne se calculent ni à l'aide de machines à calcul, ni à l'aide de cercles ou de règles, pour la raison qu'il en existe des tables très portatives de 1 à 10000 qu'on peut se procurer pour quelques francs.

203. Remarque sur les aires comprises entre une courbe et son asymptote.

1°. — Le lecteur se reportera au § 35 où sont construites les courbes :

$$\eta = 1 : x^n; \tag{1}$$

n est quelconque, mais positif; on suppose $x > 0$.

Toutes admettent les axes comme asymptotes. Elles forment deux faisceaux $(n > 1, n < 1)$ séparés par la courbe *symétrique* $\eta x = 1$, qui est une hyperbole équilatère. Elles passent toutes par le point de

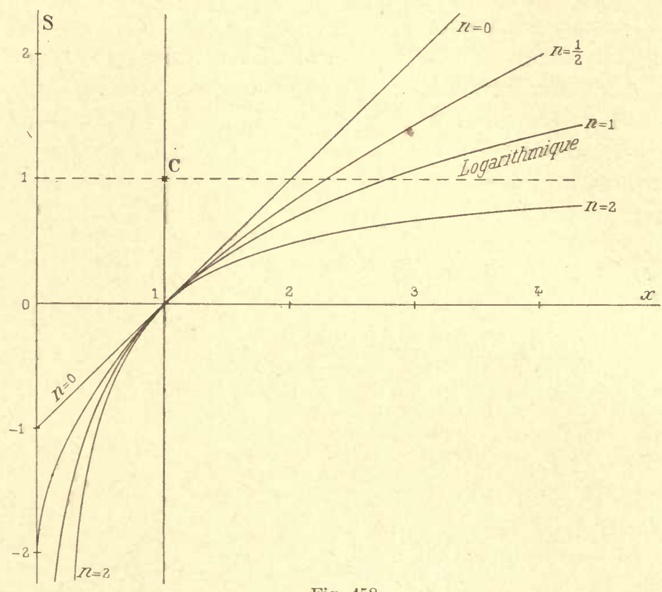


Fig. 158.

coordonnées $x = \eta = 1$; elles ne se coupent pas ailleurs.

Les courbes pour lesquelles $n > 1$, sont plus rapprochées de l'asymptote Ox que de l'asymptote Oη, à égalité de distance de l'origine; c'est l'inverse pour $n < 1$.

2°. — Ceci rappelé, nous nous proposons de construire les courbes intégrales (où x varie entre 0 et ∞) :

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x^n} = \int_1^x \eta dx, \qquad \frac{dS}{dx} = \frac{1}{x^n}. \tag{2}$$

On a immédiatement (fig. 158) :

$$S = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{x^{n-1}}\right). \tag{3}$$

Pour $n = 0$, S se réduit à la droite de pente 1.

Pour $n = 1$, nous retrouvons la logarithmique.

Toutes les courbes S sont tangentes entre elles pour $x = 1$; elles admettent toutes une tangente verticale ($n = 0$ excepté) pour $x = 0$.

3°. — Voici maintenant le problème fondamental que nous avons à résoudre. Toutes les courbes dérivées (1) ont Ox et $O\eta$ comme asymptotes. *Dans quel cas l'aire totale comprise entre une courbe et son asymptote est-elle finie?*

La formule (3) répond à la question posée.

Les courbes S pour lesquelles $n > 1$, tendent vers une asymptote horizontale pour $x = \infty$; les aires totales comprises entre les courbes η correspondantes et Ox, restent finies et égales à $1 : (n - 1)$. Mais pour ces mêmes courbes, S devient infini pour $x = 0$; les aires comprises entre les courbes η correspondantes et Oy sont infinies.

Inversement pour $n < 1$, les aires comprises entre les courbes η et Ox sont infinies; les courbes S s'élèvent indéfiniment quand x croît. Mais les aires comprises entre les courbes η et Oy sont finies; les courbes S aboutissent *verticalement* pour $x = 0$, en un point d'ordonnée $1 : (n - 1)$.

4°. — Ce qui se passe pour $n = 1$, c'est-à-dire pour la logarithmique, découle immédiatement du cas général.

A mesure que n supposé > 1 diminue, l'asymptote horizontale de la courbe S s'élève. A mesure que n supposé < 1 augmente, le point où la courbe S rencontre l'axe des ordonnées s'abaisse.

On en conclut pour $n = 1$:

$$\log \infty = \infty, \qquad \log 0 = -\infty.$$

REMARQUE I.

Les considérations précédentes suffisent à indiquer dans tous les cas si l'aire totale comprise entre une courbe et son asymptote est finie. On la comparera à l'une des hyperboles ci-dessus étudiées. Si elle est toujours plus éloignée de son asymptote qu'une des hyperboles pour lesquelles l'aire est infinie, l'aire à évaluer sera infinie. Si elle est toujours plus près de son asymptote qu'une des hyperboles pour lesquelles l'aire est finie, l'aire à évaluer est finie.

Pour faciliter la comparaison, on choisit l'asymptote pour un des axes de coordonnées.

Par exemple, soit à déterminer si l'intégrale :

$$S = \int_1^0 \frac{dx}{\sin x}, \quad \text{est finie.}$$

Nous comparons la courbe $\eta = 1 : \sin x$, à l'une des précédentes. Or, pour x très petit, $\sin x$ se confond avec x; la courbe $\eta = 1 : \sin x$, se confond avec $\eta = 1 : x$. L'intégrale S se comporte donc comme un logarithme pour x très petit : elle est infinie. Cela n'a rien d'étonnant : ici l'intégration est possible, et l'on a :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

REMARQUE II.

Soit à intégrer une expression de la forme :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varphi(x)dx}{(x-a)\chi(x)}.$$

On suppose $\chi(a) \gtreqless 0$, et généralement que $\chi(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle de x_0 à x_1. *L'intégrale n'a de sens que si l'intervalle de x_0 à x_1 ne contient pas a.* Car au voisinage de $x=a$, l'intégrale est comparable au logarithme pour $x=0$. Il suffit de transporter l'origine des coordonnées au point $x=a$, de poser par conséquent : $z=x-a$, pour que la quantité sous le signe $\int$ devienne :

$$\frac{dz}{z}\left[\frac{\varphi(a+z)}{\chi(a+z)}\right].$$

Or, par hypothèse, le crochet a pour $z=0$, une valeur finie quelconque, *que nous pouvons considérer comme constante pour de très petites variations de z.* Tout se passe donc comme si nous opérions sur $dz : z$.

204. Manières suivant lesquelles les fonctions deviennent infinies ou s'annulent.

Considérons les fonctions x^n, où n est positif. Quand x s'annule, x^n s'annule. Quand x croît indéfiniment (*devient infini*), x^n croît lui-même indéfiniment (*devient infini*).

1°. — Pour la même grande valeur de x, calculons les valeurs de x^n, en donnant à n une série de valeurs.

Nous obtenons des résultats qui *croissent* à mesure que n augmente. Si n est très inférieur à 1, l'*accroissement* est lent (voir les courbes du § 31). A la limite pour $n=0$, on a $x^0=1$, si grand que soit x; la fonction x^0 ne devient jamais infinie.

Nous classerons les manières suivant lesquelles les fonctions deviennent infinies, en les comparant à une puissance de la variable. Nous définirons ainsi le *degré* de la fonction pour de grandes valeurs de la variable. C'est ce que nous faisons au § 36 pour les fonctions entières.

2°. — Pour la même petite valeur de x, calculons les valeurs de x^n, en donnant à n une série de valeurs.

Nous obtenons des résultats qui *décroissent* à mesure que n augmente. Si n est très inférieur à 1, *la diminution* est très lente (voir les courbes du § 31). A la limite pour $n=0$, on a $x^0=1$, si petit que soit x; la fonction x^0 ne s'annule jamais, sauf pour $x=0$, où elle perd toute signification.

Nous classerons les manières suivant lesquelles les fonctions s'annulent, en les comparant à une puissance de la variable. Nous définirons ainsi le *degré* de la fonction pour de petites valeurs de la variable. C'est ce que nous faisons au § 36 pour les fonctions entières.

3°. — Ceci posé, cherchons comment $\log x$ devient infini quand x croît indéfiniment.

Nous avons montré au paragraphe précédent que $\log x$, tout en devenant infini pour x très grand, sert de transition entre les fonctions qui restent finies et celles qui deviennent infinies. Il en résulte que le quotient : $$\log x : x^n,$$ tend vers 0, *si petit que soit n* (pourvu qu'il soit positif, c'est-à-dire pourvu que x^n tende vers l'infini).

La fonction $\log x$ se conduit donc comme une puissance, sinon nulle, du moins aussi petite qu'on veut de la variable.

4°. — Ainsi la fonction $y = \log x$, tend vers l'infini avec une lenteur extrême ; il faut donner à x des valeurs extraordinairement grandes pour que y prenne des valeurs simplement grandes : ce qu'on vérifiera à l'aide d'une table de logarithmes.

Inversement considérons la fonction : e^y.

Il résulte de ce que nous venons de dire qu'elle croît prodigieusement vite quand y croît, plus vite que toute puissance y^n de la variable. D'où résulte que le quotient : $$e^y : y^n, \qquad (1)$$ tend vers l'infini quand y croît indéfiniment, *si grand que soit n.*

La fonction exponentielle se conduit donc comme une puissance aussi grande qu'on veut de la variable.

5°. — Considérons enfin la fonction : $y^n e^{-y} = 1 : (e^y : y^n)$. (2)

Puisque la fonction (1) tend vers l'infini quand y croît indéfiniment, si grand que soit n, la fonction (2) tend vers 0. L'exponentielle négative diminue si vite quand y croît, qu'on peut la multiplier par telle puissance qu'on voudra de la variable, sans pour cela l'empêcher de s'annuler.

205. Courbe en cloche et courbe intégrale.

1°. — Dans la Théorie des probabilités, on fait grand usage de la courbe *dite en cloche :* $$\eta = e^{-x^2}.$$

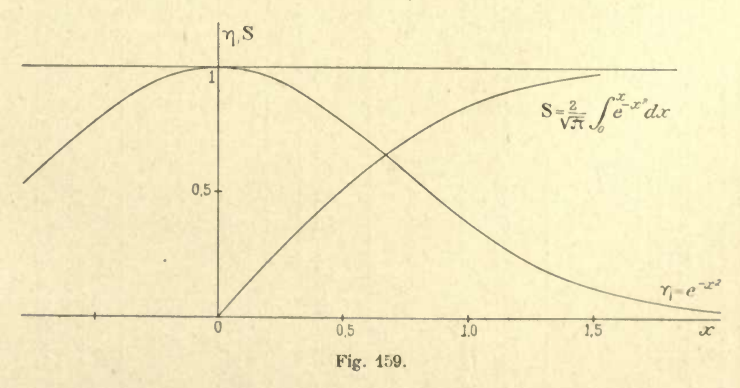


Fig. 159.

Elle est représentée dans la figure 159. Elle est symétrique par

rapport à l'axe des ordonnées, ce qui signifie que l'ordonnée est la même pour deux valeurs égales et de signes contraires de la variable. Pour de grandes valeurs de x, elle se confond avec l'axe des abscisses. On a :

$$d\eta : dx = -2xe^{-x^2}.$$

Pour $x=0$, $d\eta : dx = 0$; la courbe est tangente à l'horizontale d'ordonnée 1.

2°. — On utilise aussi la courbe intégrale. Nous multiplierons toutes les aires par le facteur $2 : \sqrt{\pi}$. On a :

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \qquad \frac{dS}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77, \qquad 2 : \sqrt{\pi} = 1{,}13.$$

La courbe, presque rectiligne au départ de l'origine, est un peu au-dessus de la bissectrice des axes. Elle tend très vite vers l'asymptote horizontale d'ordonnée 1 (§ 309).

Pour $x=2$, on a déjà : $S = 0{,}9953$.

206. Tables des valeurs des fonctions e^{x^2} et e^{-x^2}.

x	e^{x^2}	e^{-x^2}	x	e^{x^2}	e^{-x^2}
0,1	1,0101	0,99005	**2,6**	8,6264	0,11592
2	1,0408	96076	7	1,4656 $\times 10^3$	68233 $\times 10^{-3}$
3	1,0904	91393	8	2,5402	39367
4	1,1735	85214	9	4,4918	22263
5	1,2840	77880	3,0	8,1031	12341
0,6	1,4333	0,69768	**3,1**	1,4913 $\times 10^4$	0,68055 $\times 10^{-4}$
7	1,6323	61263	2	2,8001	35713
8	1,8965	52729	3	5,2960	18644
9	2,2479	44486	4	1,0482 $\times 10^5$	95402 $\times 10^{-5}$
1,0	2,7183	36788	5	2,0898	47851
1,1	3,3535	0,29820	**3,6**	4,2507	0,23526
2	4,2207	23693	7	8,8205	11337
3	5,4195	18452	8	1,8673 $\times 10^6$	53554 $\times 10^{-6}$
4	7,0993	14086	9	4,0329	24796
5	9,4877	10540	4,0	8,8861	11254
1,6	1,2936 $\times 10$	0,77306 $\times 10^{-1}$	**4,1**	1,9976 $\times 10^7$	0,50062 $\times 10^{-7}$
7	1,7993	55576	2	4,5809	21829
8	2,5534	39164	3	1,0718 $\times 10^8$	93303 $\times 10^{-8}$
9	3,6996	27052	4	2,5583	39088
2,0	5,4598	18316	5	6,2297	16052
2,1	8,2269	0,12155	**4,6**	1,5476 $\times 10^9$	0,64614 $\times 10^{-9}$
2	1,2647 $\times 10^2$	79070 $\times 10^{-2}$	7	3,9228	25494
3	1,9834	50418	8	1,0143 $\times 10^{10}$	98595 $\times 10^{-10}$
4	3,1735	31511	9	2,6755	37376
5	5,1802	19304	5,0	7,2005	13888

207. Table des valeurs de la fonction

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad \text{multipliées par } 10^4.$$

x	0	1	2	3	5	5	6	7	8	9
0,0	0000	0113	0226	0338	0451	0564	0676	0789	0901	1013
1	1125	1236	1348	1459	1569	1680	1790	1900	2009	2118
2	2227	2335	2443	2550	2657	2763	2869	2974	3079	3183
3	3286	3389	3491	3593	3694	3794	3893	3992	4090	4187
4	4284	4380	4475	4569	4662	4755	4847	4937	5028	5117
5	5205	5292	5379	5465	5549	5633	5716	5798	5879	5959
6	6039	6117	6194	6270	6346	6420	6494	6566	6638	6708
7	6778	6847	6914	6981	7047	7112	7175	7238	7300	7361
8	7421	7480	7538	7595	7651	7707	7761	7814	7867	7918
9	7969	8019	8068	8116	8163	8209	8254	8299	8342	8385
1,0	8427	8468	8508	8548	8586	8624	8661	8698	8733	8768
1,1	8802	8835	8868	8900	8931	8961	8991	9020	9048	9076
2	9193	9130	9155	9181	9205	9229	9252	9275	9297	9319
3	9340	9361	9381	9400	9419	9438	9456	9473	9490	9507
4	9523	9539	9554	9569	9583	9597	9611	9624	9637	9649
5	9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755
6	9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832
7	9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886
8	9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925
9	9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951
2,0	9953									

Intégration des fonctions rationnelles et irrationnelles du second degré.

Il ne rentre pas dans le cadre de cet ouvrage de faire la théorie complète de l'intégration des fonctions rationnelles ou irrationnelles. Nous n'en dirons que ce qui sert, c'est-à-dire pas grand'chose. Nous supposerons que le dénominateur est un polynôme du second degré.

208. Fonctions rationnelles : le dénominateur est un polynôme du second degré dont les racines sont réelles et inégales.

On appelle *fonction rationnelle* le quotient $F(x) : f(x)$, de deux fonctions algébriques entières de x (§ 36). On peut toujours supposer $F(x)$ de degré moindre que $f(x)$; sinon on effectuera la division. On a :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \psi(x).$$

On est ramené à une fonction entière $\psi(x)$, et à un quotient $\varphi(x) : f(x)$ où φ est de degré moindre que f.

Dans le cas particulier qui nous occupe, nous avons donc à intégrer l'expression :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{Ax + B}{(x - a)(x - b)} dx ;$$

par hypothèse, les nombres a et b sont réels et inégaux. Posons :

$$\frac{Ax + B}{(x - a)(x - b)} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{\beta}{x - b}; \quad \alpha + \beta = A, \quad B = -(\alpha b + \beta a).$$

α et β sont donc déterminés par deux équations du premier degré.

On a : $$\int \frac{\alpha dx}{x - a} = \alpha \log (x - a), \qquad \int \frac{\beta dx}{x - b} = \beta \log (x - b).$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{Ax + B}{(x - a)(x - b)} dx = \Big[\alpha \log (x - a)\Big]_{x_0}^{x_1} + \Big[\beta \log (x - b)\Big]_{x_0}^{x_1}. \quad (1)$$

Remarque.

D'après le § 203, le champ d'intégration de x_0 à x_1, ne doit contenir ni l'une ni l'autre des racines a et b. De plus, pour que le logarithme ait un sens, il faut qu'il porte sur une quantité positive. Donc on écrira dans (1) $x - a$ ou $a - x$, $x - b$ ou $b - x$, suivant les cas, de manière à avoir une quantité positive. On en a le droit, car :

$$\int \frac{dx}{x - a} = \int \frac{-dx}{a - x} = \log (x - a) = \log (a - x).$$

Mais un seul de ces logarithmes est défini. Puisque par hypothèse le champ d'intégration ne contient ni l'une ni l'autre des racines, on est sûr que les différences $a - x$, $b - x$, ne changent pas de signe dans l'intervalle des limites (§ 39).

209. Les racines sont réelles et égales.

La décomposition précédente n'est plus possible. L'identification donne en effet :

$$\alpha + \beta = A, \qquad -a(\alpha + \beta) = B, \qquad B + aA = 0 ;$$

cette dernière condition n'est généralement pas satisfaite, puisque A, B, a, sont des quantités arbitrairement imposées. Écrivons :

$$\frac{Ax + B}{(x - a)^2} = \frac{B + aA}{(x - a)^2} + \frac{A}{x - a}.$$

D'où : $$\int \frac{Ax + B}{(x - a)^2} dx = -\frac{B + aA}{x - a} + A \log (x - a) + \text{Constante}.$$

Le champ d'intégration ne doit pas contenir a. Sous le signe log, on écrira $(x - a)$ ou $(a - x)$, de manière à avoir une quantité positive.

210. Les racines sont imaginaires.

On peut alors toujours ramener le polynôme à la forme :

$$(x-p)^2+q^2.$$

On a : $$\frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}=\frac{A(x-p)}{(x-p)^2+q^2}+\frac{B+Ap}{(x-p)^2+q^2}.$$

On vérifiera immédiatement la relation :

$$\int \frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}\,dx=\frac{A}{2}\log\left[(x-p)^2+q^2\right]+\frac{B+Ap}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}.$$

Les limites d'intégration peuvent être quelconques, puisque le dénominateur de la quantité sous le signe $\int$ ne s'annule jamais.

211. Intégration des irrationnelles du second degré.

1°. — Soit à intégrer : $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}.$$

Posons : $$\sqrt{a+2bx+x^2}=z-x, \qquad x=\frac{z^2-a}{2b+2z}.$$

On trouve aisément :

$$\sqrt{a+2bx+x^2}=\frac{a+2bz+z^2}{2b+2z}, \qquad dx=\frac{(a+2bz+z^2)2dz}{(2b+2z)^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}=\int \frac{dz}{b+z}=\log(b+z).$$

Il suffit maintenant de remplacer z par sa valeur en x.
En particulier pour $b=0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+\text{Constante}.$$

2°. — Soit à intégrer : $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}}.$$

On pose : $$\sqrt{a+2bx-x^2}=\sqrt{a+b^2-(x-b)^2}\,;$$

$$z=\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}}\,; \qquad \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}}=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Enfin : $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}}=\operatorname{arc\,cos}\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}}.$$

3°. — On vérifiera par dérivation l'identité suivante :

$$\pm \int \frac{x dx}{\sqrt{a + 2bx \pm x^2}} = -b \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx \pm x^2}} + \sqrt{a + 2bx \pm x^2},$$

qui, jointe aux identités trouvées ci-dessus, permet d'intégrer les expressions de la forme :

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{a + 2bx \pm x^2}} dx.$$

4°. — On vérifiera par dérivation l'identité suivante :

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Fonctions hyperboliques.

212. Définition des fonctions hyperboliques.

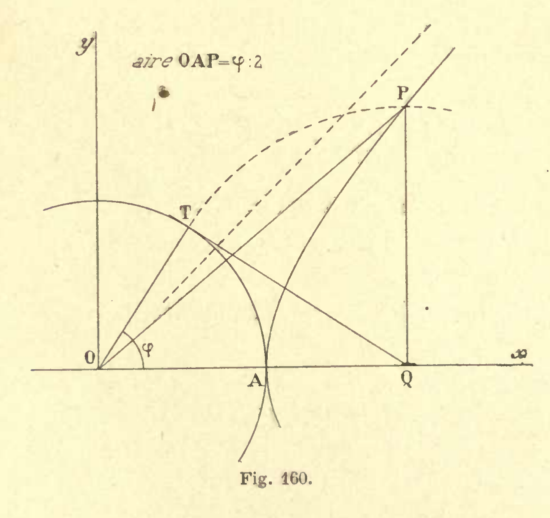


Fig. 160.

1°. — Soit l'hyperbole équilatère :

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (1)$$

Traçons le cercle de rayon OA tangent au sommet A. D'un point Q, menons la tangente QT ; elle définit un angle φ (voir § 184, où l'on utilise sous le même nom l'angle complémentaire). De Q comme centre, traçons la circonférence TP ; le point P où elle coupe l'ordonnée QP appartient à l'hyperbole. On a :

$$x = \frac{1}{\cos \varphi}, \qquad y = \operatorname{tg} \varphi, \qquad \overline{OT} = 1.$$

$$\overline{TQ}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OT}^2 = x^2 - 1 = y^2, \qquad \overline{OQ} \cos \varphi = x \cos \varphi = \overline{OT} = 1.$$

2°. — Exprimons maintenant x et y en fonction du double de

l'aire du secteur OAP jouant le rôle de variable.

Posons : $$u = 2 \text{ aire } \overline{\text{OAP}}.$$

$$u = 2 \text{ aire OAP} = 2 \text{ aire OQP} - 2 \text{ aire AQP} = xy - 2\int_1^x y\,dx.$$

$$du = x\,dy - y\,dx.$$

Utilisons (1) ; on trouve aisément :

$$x\,dx = y\,dy, \qquad du = \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{d(x+y)}{x+y} = -\frac{d(x-y)}{x-y}.$$

Intégrons : $u = \log(x+y)$, $\quad -u = \log(x-y)$.

Il ne faut pas ajouter de constantes d'intégration, car on doit avoir : $u = 0$ pour $x = 1$, $y = 0$.

D'où enfin : $x + y = e^u$, $\quad x - y = e^{-u}$;

$$x = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad y = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

3°. — Nous trouvons là deux fonctions de la variable u qui se présentent très fréquemment dans les applications. On leur donne les noms de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique* de u. Nous écrirons donc :

$$x = \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$y = \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tgh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \sin\varphi.$$

On vérifiera facilement la relation (§ 197) :

$$du = \frac{dy}{x} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \qquad u = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

213. Amplitude hyperbolique.

1°. — La fonction : $u = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, $\quad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$,

a une importance extrême. Elle se présente dans toute une série d'applications, en particulier dans la construction des cartes marines ou de Mercator. Nous devons donc en dire quelques mots. Aussi bien, nous l'avons déjà rencontrée ; c'est à elle que se réduit l'intégrale elliptique de première espèce pour $k = 1$, $\alpha = 90°$ (§ 186).

Nous appellerons φ l'*amplitude hyperbolique* de l'*argument* u, et nous écrirons : $$\varphi = \text{Amh}\, u.$$

2°. — Le calcul en est immédiat, si l'on possède une table des tangentes naturelles (§ 58) et une table suffisamment étendue des logarithmes naturels (§ 194). On peut utiliser une table ordinaire des tangentes donnant les logarithmes vulgaires et multiplier par 2,3026 (inverse du module). La table du § 46 permet de passer des valeurs de φ en degrés aux valeurs en arcs et inversement.

Par exemple, soit $\varphi = 20°$; il faut donc calculer :

$$u = \log \operatorname{tg} 55°.$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} 55° = 0{,}1548, \qquad 0{,}1548 \times 2{,}302 \doteq 0{,}3563.$$

Autrement on a : $\operatorname{tg} 55° = 1{,}4281,$

$$\log 1{,}42 = 0{,}3507, \qquad \log 1{,}43 = 0{,}3577.$$

Par interpolation : $\log 1{,}4281 = 0{,}3563.$

3°. — En vertu de la relation $du = d\varphi : \cos \varphi,$

la courbe $u = f(\varphi)$, est d'abord tangente à la bissectrice des axes pour $u = \varphi = 0$. Elle reste longtemps presque confondue avec cette bissectrice, puis s'élève rapidement au-dessus d'elle (fig. 161).

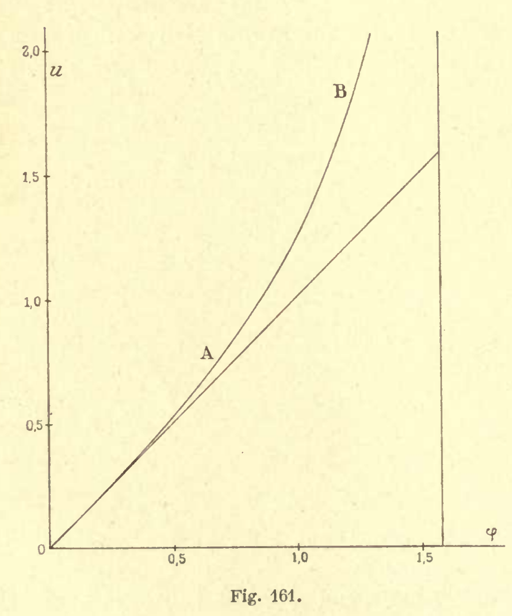


Fig. 161.

Pour $\varphi = \pi : 2$,

on a : $u = \infty$,

conformément à ce que nous avons démontré au § 203 que l'aire comprise entre une hyperbole équilatère et son asymptote est infinie.

La fonction u n'est définie que pour les valeurs de φ comprises entre

$$\pm \pi : 2;$$

en dehors de ces limites, la tangente devient négative, le logarithme est imaginaire.

Pour deux valeurs égales et de signes contraires de φ, la tangente prend des valeurs inverses; son logarithme prend des valeurs égales et de signes contraires. Cela résulte, du reste, de la définition de la fonction par l'intégrale définie. Nous donnerons donc seulement les valeurs de u, quand φ varie de 0 à 90°.

214. Fonction $u = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$; **(les nombres** u **sont multipliés par** 10^4**).**

$\varphi =$ Amplitude hyperbolique $u = \text{Amh}\, u$, $u =$ latitude croissante.

$\varphi = \text{Amh}\, u$	u	$\varphi = \text{Amh}\, u$	u	$\varphi = \text{Amh}\, u$	u
1°	175	31	5695	61	13525
2	349	32	5901	62	13891
3	523	33	6108	63	14268
4	698	34	6317	64	14659
5	873	35	6529	65	15063
6	1049	36	6743	66	15485
7	1225	37	6960	67	15921
8	1401	38	7179	68	16381
9	1577	39	7402	69	16857
10	1754	40	7628	70	17355
11	1930	41	7860	71	17877
12	2110	42	8093	72	18427
13	2288	43	8329	73	19007
14	2469	44	8569	74	19621
15	2649	45	8814	75	20274
16	2828	46	9063	76	20970
17	3011	47	9316	77	21724
18	3195	48	9574	78	22531
19	3379	49	9838	79	23406
20	3563	50	10108	80	24364
21	3750	51	10383	81	25421
22	3937	52	10662	82	26602
23	4127	53	10948	83	27940
24	4318	54	11242	84	29482
25	4509	55	11542	85	31305
26	4702	56	11849	86	33558
27	4897	57	12166	87	36440
28	5094	58	12490	88	40492
29	5293	59	12827	89	47423
30	5493	60	13171	90	$+\infty$

Dans la table précédente, les angles φ sont exprimés en degrés, les quantités u en arcs. Dans les Traités de navigation, on exprime généralement u et φ en minutes de soixante au degré. La minute

est en effet l'unité usuelle ; à la surface de la Terre, elle correspond au *mille marin* de $1851^{m},85$ (approximativement 1852^{m}). Pour passer de la table précédente aux tables des Traités de navigation, on divisera les nombres u par la longueur de l'arc d'une minute, soit

$$0,017454 : 60 = 0,000.2909.$$

Par exemple, pour $\varphi = 10° = 600$ minutes, la table donne $u = 0,1754$. En minutes on a :

$$u = 0,1754 : 0,000.290.9 = 0,1754 \times 3458 = 603,1.$$

215. Propriétés des fonctions hyperboliques.

1°. — On vérifiera les relations suivantes soit directement, soit en utilisant l'amplitude φ.

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1\,;$$

$$\cosh u + \sinh u = e^{u}, \qquad \cosh u - \sinh u = e^{-u}\,;$$

$$\cosh(-u) = \cosh u\,, \qquad \sinh(-u) = -\sinh u\,;$$

$$\sinh 0 = 0, \qquad \cosh 0 = 1, \qquad \text{tgh}\, 0 = 0\,;$$

$$\sinh \infty = \infty, \qquad \cosh \infty = \infty, \qquad \text{tgh}\, \infty = 1.$$

2°. — Formules d'addition.

$$\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v,$$

$$\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v.$$

Faisons : $u = v, \quad 2v, \quad 3v, \ \ldots$; il vient :

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u = 2\cosh^2 u - 1 = 2\sinh^2 u + 1$$

$$\sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u\,,$$

. . . .

3°. — Formules de dérivation.

$$d \sinh u = \cosh u \,.\, du\,, \qquad d \cosh u = \sinh u \,.\, du\,;$$

$$d\, \text{tgh}\, u = \frac{du}{\cosh^2 u}, \qquad d\, \text{cotgh}\, u = -\frac{du}{\sinh^2 u}.$$

4° Fonctions inverses.

$$x = \cosh u\,, \qquad u = \text{arg} \cosh x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$x = \text{tgh}\, u, \qquad u = \text{arg tgh}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad (x^2 < 1),$$

$$x = \text{cotgh}\, u, \qquad u = \text{arg cotgh}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{x + 1}{x - 1}, \qquad (x^2 > 1),$$

$$x = \sinh u, \qquad u = \text{arg} \sinh x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

On vérifiera les relations :

$$\arg\sinh x = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \arg\cosh x = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\arg\operatorname{tgh} x = \int \frac{dx}{1-x^2}, \qquad \arg\operatorname{cotgh} x = -\int \frac{dx}{x^2-1}.$$

Les analogies entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires sont remarquables; rien n'est plus propre que leur étude pour comprendre comment s'introduisent et se définissent des fonctions nouvelles.

216. Chaînette.

1°. — La chaînette (fig. 162) a pour équations :

$$y = h \cosh \frac{x}{h}, \qquad dy = \sinh \frac{x}{h} . dx;$$

$$ds^2 = \left(1 + \sinh^2 \frac{x}{h}\right) dx^2 = \cosh^2 \frac{x}{h} . dx^2, \qquad s = h \sinh \frac{x}{h}.$$

Ces relations peuvent se mettre sous la forme :

$$y = h \frac{ds}{dx}, \qquad s = h \frac{dy}{dx}, \qquad y^2 - s^2 = h^2.$$

Menons la normale BN au point B, et la tangente BT. Projetons

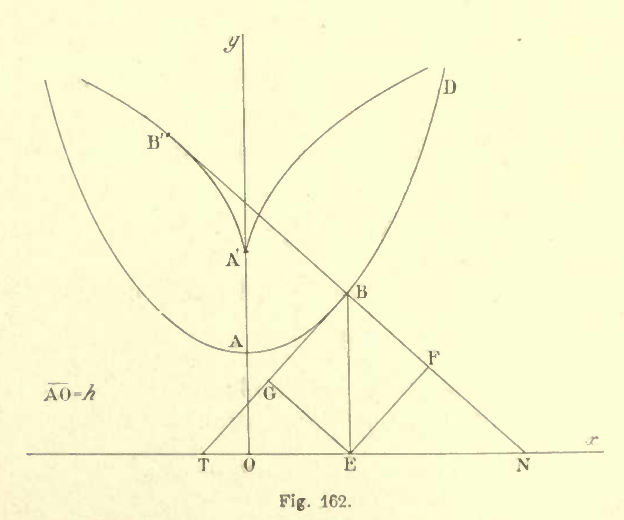


Fig. 162.

le point E, pied de l'ordonnée, sur ces droites. Les relations précédentes signifient que :

$$\overline{BF} = \overline{OA} = h, \qquad \overline{BG} = \text{arc } AB = s.$$

2°. — Calculons le rayon de courbure (§ 91). On trouve aisément :

$$\rho = y^2 : h.$$

Or, dans les triangles semblables BFE, BEN, on a :

$$\overline{BE}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{BN}; \quad \text{d'où}: \quad \rho = \overline{BN}.$$

Le centre de courbure B′ et le point N sont à la même distance du point B de part et d'autre de la courbe. En particulier, le point de rebroussement A′ de la développée est à une distance du sommet A :

$$\overline{AA'} = \overline{AO} = h.$$

3°. — Le problème pratique ordinaire (Voir Mécanique, § 178) consiste à faire passer une chaînette, d'axe Oy vertical et de longueur l, par deux points dont la distance verticale est b et la distance horizontale a.

Appelons x' et x'' les abscisses inconnues de ces deux points; y' et y'' leurs ordonnées, s' et s'' les arcs comptés à partir du point le plus bas. On a :

$$b = y' - y'' = h\left(\cosh\frac{x'}{h} - \cosh\frac{x''}{h}\right),$$

$$l = s' - s'' = h\left(\sinh\frac{x'}{h} - \sinh\frac{x''}{h}\right),$$

$$l^2 - b^2 = h^2\left(-2 + 2\cosh\frac{x'}{h}\cosh\frac{x''}{h} - 2\sinh\frac{x'}{h}\sinh\frac{x''}{h}\right),$$

$$l^2 - b^2 = h^2\left(-2 + 2\cosh\frac{x' - x''}{h}\right) = 2h^2\left(-1 + \cosh\frac{a}{h}\right).$$

D'où enfin : $l^2 - b^2 = 4h^2 \sinh^2\frac{a}{2h}$, $\sqrt{l^2 - b^2} = 2h\sinh\frac{a}{2h}$.

Pour déterminer h, on est ramené à l'équation transcendante :

$$\sinh x = kx.$$

Sa résolution ne présente aucune difficulté, grâce à la table numérique du § 218. On détermine l'intersection des deux courbes :

$$y_1 = \sinh x, \qquad y_2 = kx.$$

Il suffit de construire la première au voisinage du point d'intersection dont on connaît immédiatement la position approchée.

217. Cosinus hyperboliques : $\frac{e^u + e^{-u}}{2}$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0001	1,0002	1,0005	1,0008	1,0013	1,0018	1,0025	1,0032	1,0041
0,1	0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181
0,2	0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423
0,3	0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770
0,4	0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225
0,5	1,1276	1,1329	1,1383	1,1438	1,1494	1,1551	1,1609	1,1669	1,1730	1,1792
0,6	1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476
0,7	2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286
0,8	3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229
0,9	4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314
1,0	1,5431	1,5549	1,5669	1,5790	1,5913	1,6038	1,6164	1,6292	1,6421	1,6552
1,1	6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956
1,2	8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540
1,3	9709	9880	2,0053	2,0228	2,0404	2,0583	2,0764	2,0947	2,1132	2,1320
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312
1,5	2,3524	2,3738	2,3955	2,4174	2,4395	2,4619	2,4845	2,5073	2,5305	2,5538
1,6	5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020
1,7	8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	3,0206	3,0492	3,0782
1,8	3,1075	3,1371	3,1669	3,1972	3,2277	3,2585	3,2897	3212	3530	3852
1,9	4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261
2,0	3,7622	3,7987	3,8355	3,8727	3,9103	3,9483	3,9867	4,0255	4,0647	4,1043
2,1	4,1443	4,1847	4,2256	4,2668	4,3085	4,3507	4,3932	4,4362	4,4797	4,5236
2,2	4,5679	4,6127	4,6580	4,7037	4,7499	4,7966	4,8437	4,8914	4,9395	4,9881
2,3	5,0372	5,0868	5,1370	5,1876	5,2388	5,2905	5,3427	5,3954	5,4487	5,5026
2,4	5,5569	5,6119	5,6674	5,7235	5,7801	5,8373	5,8951	5,9535	6,0125	6,0721
2,5	6,1323	6,1931	6,2545	6,3166	6,3793	6,4426	6,5066	6,5712	6,6365	6,7024
2,6	6,7690	6,8363	6,9043	6,9729	7,0423	7,1123	7,1831	7,2546	7,3268	7,3998
2,7	7,4735	7,5479	7,6231	7,6990	7,7758	7,8533	7,9136	7,0106	8,0905	8,1712
2,8	8,2527	8,3351	8,4182	8,5022	8,5871	8,6728	8,7594	8,8469	8,9352	9,0244
2,9	9,1146	9,2056	9,2976	9,3905	9,4844	9,5791	9,6749	9,7716	9,8693	9,9680
3,0	10,068	10,168	10,270	10,373	10,476	10,581	10,687	10,794	10,902	11,011
3,1	11,121	12,233	11,345	11,459	11,574	11,689	11,806	11,925	12,044	12,165
3,2	12,287	13,410	12,534	12,660	12,786	12,915	13,044	13,175	13,307	13,440
3,3	13,575	14,711	13,848	13,987	14,127	14,269	14,412	14,556	14,702	14,850
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,277	21,486	21,702	21,919	22,139
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,508	23,743	23,982	24,222	24,466
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472

218. Sinus hyperboliques : $\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0600	0,0701	0,0801	0,0901
0,1	1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911
0,2	2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941
0,3	3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000
0,4	4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098
0,5	0,5211	0,5324	0,5438	0,5552	0,5666	0,5782	0,5897	0,6014	0,6131	0,6248
0,6	6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461
0,7	7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748
0,8	8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122
0,9	1,0265	1,0409	1,0554	1,0700	1,0847	1,0995	1,1144	1,1294	1,1446	1,1598
1,0	1,1752	1,1907	1,2063	1,2220	1,2379	1,2539	1,2700	1,2862	1,3025	1,3190
1,1	3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914
1,2	5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788
1,3	6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829
1,4	9043	9259	9477	9697	9919	2,0143	2,0369	2,0597	2,0827	2,1059
1,5	2,1293	2,1529	2,1768	2,2008	2,2251	2,2496	2,2743	2,2993	2,3245	2,3499
1,6	3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175
1,7	6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112
1,8	9422	9734	3,0049	3,0367	3,0689	3,1013	3,1340	3,1671	3,2005	3,2341
1,9	3,2682	3,3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894
2,0	3,6269	3,6647	3,7028	3,7414	3,7803	3,8196	3,8593	3,8993	3,9398	3,9806
2,1	4,0219	4,0635	4,1056	4,1480	4,1909	4,2342	4,2779	4,3221	4,3666	4,4117
2,2	4,4571	4,5030	4,5494	4,5962	4,6434	4,6912	4,7394	4,7880	4,8372	4,8868
2,3	4,9370	4,9876	5,0387	5,0903	5,1425	5,1951	5,2483	5,3020	5,3562	5,4109
2,4	5,4662	5,5221	5,5785	5,6354	5,6929	5,7510	5,8097	5,8689	5,9288	5,9892
2,5	6,0502	6,1118	6,1741	6,2369	6,3004	6,3645	6,4293	6,4946	6,5607	6,6274
2,6	6,6947	6,7628	6,8315	6,9009	6,9709	7,0417	7,1132	7,1854	7,2583	7,3319
2,7	7,4063	7,4814	7,5572	7,6338	7,7112	7,7894	7,8683	7,9480	8,0285	8,1098
2,8	8,1919	8,2749	8,3586	8,4432	8,5287	8,6150	8,7021	8,7902	8,8791	8,9689
2,9	9,0596	9,1512	9,2437	9,3371	9,4315	9,5268	9,6231	9,7203	9,8185	9,9177
3,0	10,018	10,119	10,221	10,324	11,429	11,534	11,640	11,748	11,856	11,966
3,1	11,076	11,188	11,301	11,415	11,530	12,647	12,764	12,883	12,003	12,124
3,2	12,246	12,369	12,494	12,620	12,747	12,876	13,006	13,137	13,269	13,403
3,3	13,538	13,674	13,812	13,951	14,092	14,234	14,377	14,522	14,668	14,816
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465

219. Intégrales usuelles.

$$\int \cos x\,dx = \sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x.$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \log \sin x,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{cotg} x} = \log \frac{1}{\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \sqrt{1+\cos x}\;dx = 2\sqrt{1-\cos x}, \qquad \int \sqrt{1-\cos x}\;dx = -2\sqrt{1+\cos x}.$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}.$$

$$\frac{a-b}{a+b} = k^2, \qquad \int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(k \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

$$\frac{a-b}{a+b} = -k^2,$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left[\left(1 + k \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) : \left(1 - k \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)\right].$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log \operatorname{tg} x.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,cotg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,cos} x.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \;(\text{pour } x^2 < 1) = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \;(\text{pour } x^2 > 1).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

$$\int x \log x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right), \qquad \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + \log \cos x.$$

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x,$$

$$\int x^2 \cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x.$$

CHAPITRE XI

THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES

220. Notion d'opération et d'opérateur.

Jusqu'à présent le lecteur n'a rencontré que les opérations algébriques auxquelles il est habitué (addition, soustraction,...) *plus ou moins généralisées.* Outre son utilité pratique considérable, la *Théorie des quantités complexes* offre l'intérêt *de généraliser* LA NOTION *d'opération et d'opérateur,* de montrer comment on construit une théorie mathématique.

Nous pouvons définir arbitrairement des opérations et les opérateurs qui les produisent, *à la seule condition qu'il y ait compatibilité.* Dans l'espèce, tout repose sur un opérateur que nous désignons par la lettre i et qui, mis en facteur, jouit de la propriété de faire tourner de 90° les droites du plan. Les opérations usuelles de l'Algèbre, appliquées sans autre modification que de remplacer partout i^2 par -1, produisent des résultats tout différents de ceux que nous connaissons. L'addition devient une composition suivant la règle du parallélogramme, la multiplication se traduit par une rotation,... L'ensemble de ces résultats très simples constitue le *Calcul des Imaginaires.*

Nous savons *par hypothèse* que les opérations admises sont légitimes (ce qui signifie qu'elles ne peuvent pas conduire à des résultats contradictoires). Nous ferons donc fonctionner la machine que nous allons construire : elle nous fournira indéfiniment des identités qui, convenablement interprétées, seront autant de théorèmes. Du reste, nous pourrions établir directement la plupart d'entre eux, d'une manière moins élégante, il est vrai.

Le débutant trouvera dans cette circonstance à la fois une raison de confiance et une preuve de l'importance du *Calcul des Imaginaires.*

Ce calcul se rapporte au plan ; ses opérations peuvent être généralisées pour l'espace : on obtient alors le *Calcul des Quaternions.* Mais elles deviennent plus complexes, et leur difficulté n'est pas compensée par l'importance des résultats. Nous n'en dirons rien.

En résumé, nous conseillons au lecteur de chercher, en étudiant ce Chapitre, à comprendre en quoi consiste une opération mathématique, la part d'arbitraire qu'elle renferme, enfin la nature de la certitude qu'elle présente, certitude absolue en un sens, puisqu'elle est de définition.

221. Définition des quantités complexes.

1°. — Dans le plan soient tracés deux axes rectangulaires Ox, Oy. Jusqu'à présent nous avons considéré les distances d'un point P à ces axes *comme de même espèce;* nous allons maintenant les regarder comme *d'espèces différentes, irréductibles les unes aux autres.* Les distances à l'axe Oy (*abscisses*) seront dites *réelles;* les distances à l'axe Ox (*ordonnées*) seront dites *imaginaires. Le lecteur voudra bien dès à présent donner aux mots réel et imaginaire, non leurs sens vulgaires, mais leurs sens de définition.* Il n'y a rien que de très réel au sens vulgaire dans les quantités imaginaires.

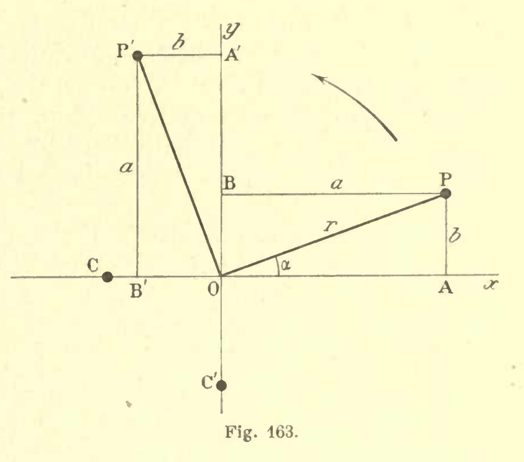


Fig. 163.

2°. — Un point P du plan est défini par une quantité *complexe,* c'est-à-dire formée d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire. Pour ne pas les confondre, nous mettrons la lettre i en facteur de la quantité imaginaire. Le point P est donc complètement défini par la quantité *complexe:*

$$a + bi. \tag{1}$$

Nous pouvons convenir que le même symbole $a + bi$ représente, non plus le point P, mais le vecteur $\overline{OP}$ mené de l'origine au point P. Il va de soi que les quantités a et b sont susceptibles de signes : par convention, a est compté sur Ox positivement à droite de O, négativement à gauche de O; b est compté sur Oy positivement au-dessus de O, négativement au-dessous de O.

3°. — Multiplier une quantité réelle par le facteur i, c'est la transformer en une quantité imaginaire : le vecteur représentatif OA réel et positif vient en $\overline{OA'}$; le vecteur $\overline{OC}$ réel et négatif vient en $\overline{OC'}$.

Dans ces deux opérations, on peut dire que *le facteur i est un opérateur qui fait tourner de 90° dans le sens de la flèche le vecteur auquel on l'applique.*

Cherchons à quelles conditions cette règle deviendra générale.

Soit OP un vecteur $a+bi$; le vecteur $\overline{\mathrm{OP}'}$ obtenu en faisant tourner $\overline{\mathrm{OP}}$ de 90° dans le sens de la flèche, a évidemment pour symbole $-b+ai$. Pour que la règle énoncée soit générale, nous devons avoir identiquement :

$$(a+bi)i=-b+ai, \qquad \text{d'où :} \qquad i^2=-1.$$

Nous conviendrons d'appliquer aux quantités complexes les règles ordinaires du calcul algébrique et de remplacer partout i^2 par -1.

4°. — Le lecteur doit se garder de poser $i=\sqrt{-1}$. Le signe i indique qu'on porte une quantité *réelle* dans une certaine direction; c'est aussi un opérateur qui fait tourner un vecteur de 90°. Effectuer deux fois l'opération (multiplier par i, puis encore par i, ce que, pour faire bref, nous énonçons multiplier par i^2), c'est donc retourner un vecteur, c'est changer son signe; l'opération i^2 est donc identique à l'opération soustractive. Nous n'énonçons pas autre chose; il n'y a là rien de mystérieux, rien d'imaginaire au sens vulgaire du mot.

222. Somme, différence des quantités complexes.

1°. — Pour définir l'extrémité d'un vecteur, nous pouvons utiliser les coordonnées polaires, au lieu des coordonnées cartésiennes.

Nous écrivons *symboliquement* :

$$\overline{\mathrm{OM}}=m(\cos\mu+i\sin\mu). \tag{2}$$

m est le *module*, μ l'*argument* de la quantité complexe. Nous pouvons supposer m positif; si m est négatif, nous remplacerons μ par $\mu+\pi$, et par suite m par $-m$.

Les équations (1) et (2) ont une interprétation remarquable que nous généraliserons.

On appelle *somme géométrique* de deux vecteurs la diagonale du parallélogramme construit sur ces vecteurs; autrement dit, la *résultante* de ces vecteurs. On a donc l'équation *symbolique* :

$$\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{OM}_1}+\overline{\mathrm{OM}_2}.$$

Les équations (1) et (2) n'expriment pas autre chose.

2°. — Soit maintenant deux vecteurs $\overline{\mathrm{OM}}$ et $\overline{\mathrm{ON}}$ (fig. 164). Nous poserons :

$$\overline{\mathrm{OM}}=m(\cos\mu+i\sin\mu), \qquad \overline{\mathrm{ON}}=n(\cos\nu+i\sin\nu),$$

$$\overline{\mathrm{OM}}+\overline{\mathrm{ON}}=\overline{\mathrm{OP}}=(m\cos\mu+n\cos\nu)+i(m\sin\mu+n\sin\nu)=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{OP}_2}.$$

La règle est donc générale : *L'application aux quantités complexes des règles d'addition des quantités algébriques ordinaires a pour résultat une addition géométrique.*

La généralisation va d'elle-même pour la soustraction.

223. Multiplication des quantités complexes.

On a :

$$[m(\cos\mu + i\sin\mu)]\,[n(\cos\nu + i\sin\nu)] = mn\,[\cos\mu\cos\nu + i^2\sin\mu\sin\nu + i(\sin\mu\cos\nu + \cos\mu\sin\nu)] = mn\,[\cos(\mu+\nu) + i\sin(\mu+\nu)],$$

puisque, les calculs faits à la manière ordinaire, nous devons remplacer i^2 par -1.

Ainsi le produit de deux vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$ est un vecteur $\overline{OR}$ dont le module mn est le produit des modules, et l'argument $\mu + \nu$ la somme des arguments.

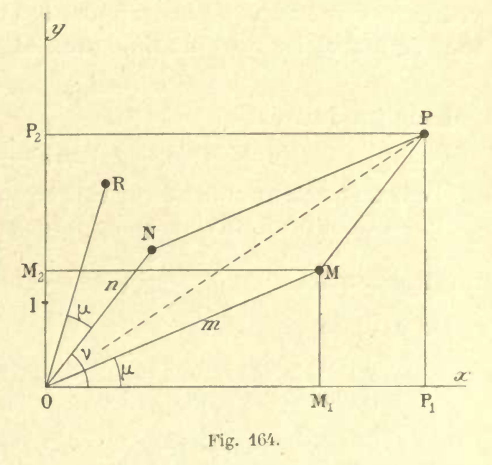


Fig. 164.

Un vecteur quelconque $\overline{OM}$ peut donc être considéré comme un *opérateur* qui, appliqué à un vecteur $\overline{ON}$, le fait tourner dans le sens positif d'un angle égal à son argument, et l'allonge d'un nombre de fois égal à son module.

On vérifiera immédiatement qu'appliquer l'opérateur $\overline{OM}$ au vecteur $\overline{ON}$ revient au même que d'appliquer l'opérateur $\overline{ON}$ au vecteur $\overline{OM}$; *la multiplication de deux vecteurs est donc une opération permutative, tout comme la multiplication algébrique (à la différence du Calcul des Quaternions).*

Cette règle admet pour cas particulier la multiplication par i.

Posons : $$i = a(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

L'identification donne : $a = 1$, $\alpha = \pi : 2$. Le module du vecteur i est 1 ; son argument est $\pi : 2$; il est représenté par le vecteur $\overline{OI}$. Multiplier un vecteur par i, c'est le faire tourner de $\pi : 2$ dans le sens positif.

224. Division des quantités complexes.

1°. — La division d'un vecteur par un autre découle immédiatement de ce qui précède.

On a : $$m(\cos\mu + i\sin\mu) : [n(\cos\nu + i\sin\nu)] = (m : n)\,[\cos(\mu - \nu) + i\sin(\mu - \nu)].$$

En effet, le quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur, il redonne le dividende : c'est la définition même du quotient.

2°. — Quantités conjuguées.

Nous arrivons au même résultat par une autre méthode fort intéressante.

Considérons les deux quantités dites *conjuguées* (voir la note du § 110) :

$$\cos \nu + i \sin \nu, \qquad \cos \nu - i \sin \nu.$$

Elles représentent deux vecteurs symétriques par rapport à Ox et de module 1. *Ces vecteurs sont inverses l'un de l'autre;* on a :

$$(\cos \nu + i \sin \nu)(\cos \nu - i \sin \nu) = \cos^2 \nu - i^2 \sin^2 \nu = 1.$$

D'une manière plus générale, on appelle vecteurs conjugués les vecteurs symétriques par rapport à Ox, dont par suite les modules sont égaux et les arguments égaux et de signes contraires :

$$a + bi, \qquad a - bi.$$

Leur produit est :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

C'est un vecteur couché sur Ox, ce qui est évident en vertu du § 223.

3°. — Ceci posé, diviser par $n(\cos \nu + i \sin \nu)$, c'est évidemment multiplier par $\frac{1}{n}(\cos \nu - i \sin \nu)$.

On a donc :

$$\frac{m(\cos \mu + i \sin \mu)}{n(\cos \nu + i \sin \nu)} = \frac{m}{n}(\cos \mu + i \sin \nu)(\cos \nu - i \sin \nu)$$

$$= \frac{m}{n}\left[\cos(\mu - \nu) + i \sin(\mu - \nu)\right].$$

Diviser par un vecteur de module n et d'argument ν, c'est faire tourner le vecteur dividende de l'angle ν dans le sens négatif, et raccourcir son module dans le rapport de n à 1.

4°. — On retrouve les mêmes résultats en mettant les quantités complexes sous la première forme. Pour la multiplication, on a :

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Les modules des quantités données sont :

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} : \qquad n = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Le module du produit est :

$$\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + d^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = mn.$$

Les arguments des quantités données sont :

$$\mu = \operatorname{arctg}(b : a), \qquad \nu = \operatorname{arctg}(d : c).$$

L'argument du produit est :

$$\operatorname{arctg}\left[(ad + bc) : (ac - bd)\right] = \mu + \nu,$$

comme on le vérifiera en appliquant la formule du § 60.

5°. — Passons à la division :

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

On vérifiera que le module du quotient est bien égal au quotient des modules, et son argument égal à la différence des arguments.

225. Formule de Moivre.

Élever à la puissance m, c'est multiplier m fois l'unité par la quantité donnée. Les règles de la multiplication sont connues; les règles de l'élévation aux puissances s'en déduisent immédiatement. On a :

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx.$$

Identifions dans les deux membres les quantités réelles et les quantités imaginaires, après avoir développé par la formule du binôme. Il vient :

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} x \sin^2 x + \dots$$

$$\sin mx = \frac{m}{1} \cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \dots$$

$\cos mx$ et $\sin mx$ s'expriment donc en fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$.

$\cos mx$ ne contenant que des puissances paires de $\sin x$, s'exprime rationnellement en fonction de $\cos x$. Au contraire, $\sin mx$ ne s'exprime rationnellement en fonction de $\sin x$ que si m est impair.

En particulier, on a :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \sin 2x = 2 \cos x \sin x;$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \qquad \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x;$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x,$$

$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x.$$

Ces formules peuvent s'établir sans employer les imaginaires, mais d'une manière moins élégante.

226. Développement des puissances du sinus ou du cosinus. Application : résolution de l'équation du troisième degré.

Posons : $u = \cos x + i \sin x, \qquad v = \cos x - i \sin x.$

u et v sont *conjuguées* : $uv = 1$. On tire de là :

$$2 \cos x = u + v, \qquad 2i \sin x = u - v.$$

D'où : $2^m \cos^m x = (u + v)^m, \qquad (2i)^m \sin^m x = (u - v)^m.$

Ces formules contiennent la solution du problème. Nous ne chercherons pas les expressions générales de $\cos^m x$ et de $\sin^m x$ qui n'ont aucun intérêt. Nous ferons seulement le calcul pour les valeurs les plus simples de m.

On a : $u^p = \cos px + i \sin px, \qquad v^p = \cos px - i \sin px;$

$u^p + v^p = 2\cos px, \qquad u^p - v^p = 2i \sin px.$

1°. — $m = 4$.

$16\cos^4 x = u^4 + v^4 + 4u^3v + 4v^3u + 6v^2u^2 = 2\cos 4x + 8\cos 2x + 6,$

$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3;$

$16\sin^4 x = u^4 + v^4 - 4u^3v - 4v^3u + 6v^2u^2 = 2\cos 4x - 8\cos 2x + 6,$

$8\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3.$

2°. — $m = 3$.

$8\cos^3 x = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3v^2u = 2\cos 3x + 6\cos 2x,$

$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x;$

$-i\,8\sin^3 x = u^3 - v^3 + 3v^2u - 3u^2v = 2i\sin 3x - 6i\sin x,$

$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x.$

3°. — $m = 2$.

$4\cos^2 x = u^2 + v^2 + 2uv = 2\cos 2x + 2, \qquad 2\cos^2 x = \cos 2x + 1;$

$-4\sin^2 x = u^2 + v^2 - 2uv = 2\cos 2x - 2, \qquad 2\sin^2 x = -\cos 2x + 1.$

4°. — Application : résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, dans le cas où les trois racines sont réelles (cas irréductible) (comparer au § 371).

Supposons p négatif et q assez petit, condition que nous montrerons nécessaire pour que les trois racines soient réelles. Écrivons donc :

$$x^3 - Px + q = 0. \tag{1}$$

Posons :

$$x = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\,.\cos\alpha, \qquad q = -2\sqrt{\frac{P^3}{27}}\,.\cos 3\alpha. \tag{2}$$

La seconde équation définit l'angle 3α par son cosinus ; la première donne x. En substituant les valeurs de x et de q dans l'équation (1), on trouve une identité en vertu du *2°*.

Pour que l'angle 3α soit réel, on doit avoir :

$$\cos^2 3\alpha < 1, \qquad 27q^2 - 4P^3 = 27q^2 + 4p^3 < 0.$$

L'angle 3α, n'étant défini que par son cosinus, a une infinité de valeurs (§ 50). On vérifiera que, pour ces valeurs, $\cos\alpha$ prend trois valeurs généralement différentes et trois seulement.

Voici un exemple simple pour fixer les idées.

Soit :

$$x^3 - 3x + 2 = 0; \qquad P = 3, \qquad q = 2; \qquad \cos 3\alpha = -1.$$

On peut prendre :

$$3\alpha = \pi, \qquad \alpha = \pi : 3, \qquad x = 2\cos\alpha = 1;$$
$$3\alpha = 3\pi, \qquad \alpha = \pi, \qquad x = -2;$$
$$3\alpha = 5\pi, \qquad \alpha = 5\pi : 3, \qquad x = 1.$$

Ainsi l'équation admet la racine double $x=1$, et la racine simple -2, ce qu'on vérifiera par substitution.

227. Équations binômes; extraction des racines d'une quantité complexe.

1°. — Soit à résoudre l'équation :

$$x^m = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad x = \sqrt[m]{\cos\alpha + i\sin\alpha}.$$

Par définition, il faut trouver un vecteur OR qui, *élevé à la puissance m*, reproduise le vecteur donné $\overline{OP}$, de module 1 et d'argument α (fig. 165). Je dis qu'il en existe m différents, de module 1 et dont les arguments $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{m-1}$, rentrent dans la formule :

$$\psi_k = \frac{\alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}.$$

En effet, élevé à la puissance m, le vecteur de module 1 et d'argument ψ_k, donne un vecteur de module 1 et d'argument :

$$m\psi_k = \alpha + 2k\pi,$$

qui se confond avec le vecteur donné $\overline{OP}$.

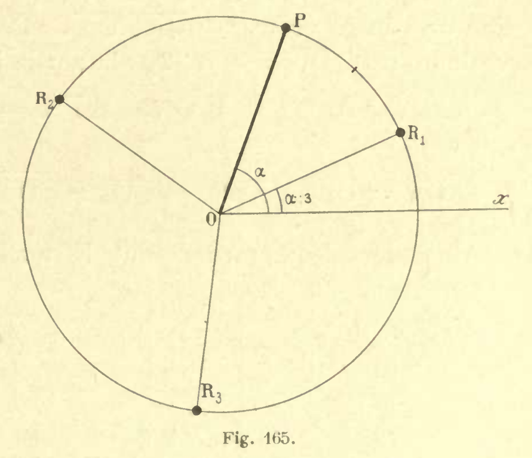


Fig. 165.

La figure 165 suppose $m=3$.

2°. — Soit l'équation : $x^m = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

On peut toujours supposer ρ positif (§ 222, *1°*), en choisissant convenablement l'angle α. On a pour solutions :

$$x_k = \sqrt[m]{\rho}\,(\cos\psi_k + i\sin\psi_k);$$

$\sqrt[m]{\rho}$ est la racine $m^{\text{ième}}$ *arithmétique* de ρ.

228. Équation du second degré.

1°. — Soit à résoudre l'équation où p et q sont réels :

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Les racines sont : $z = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$.

Portons sur Ox (fig. 166) une longueur $\overline{OB} = -p:2$ (nous supposons $p<0$ et nous le laisserons invariable dans notre discussion).

Tant que les racines sont réelles (c'est-à-dire tant que q est néga-

tif, ou positif et assez petit), elles sont représentées par des vecteurs $\overline{\mathrm{OP}}$ et $\overline{\mathrm{OP'}}$ qui aboutissent à deux points P et P′ situés sur Ox et équidistants de B.

Si $p^2 - 4q = 0$, les points P et P′ se confondent avec B; les racines sont égales.

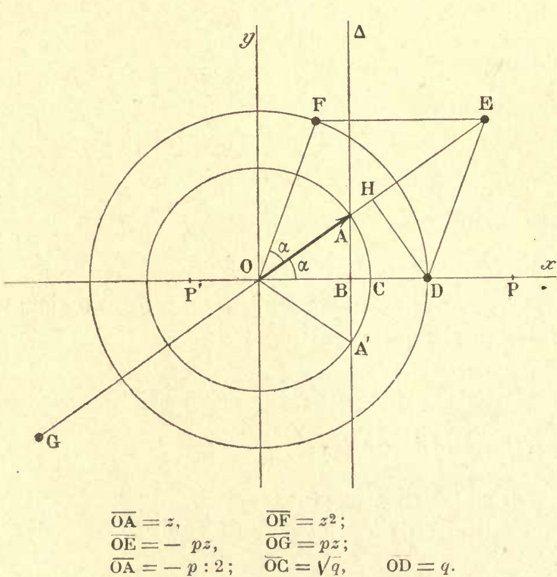
2°. — Supposons enfin $p^2 - 4q < 0$; les racines sont imaginaires.

Écrivons :
$$z = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

q est positif; prenons $\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{q}$. Je dis que z est représenté par l'un ou l'autre vecteur $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OA'}}$. En effet, la partie réelle de ces vecteurs est $\overline{\mathrm{OB}} = -p : 2$; la partie imaginaire est :
$$\overline{\mathrm{BA}} \text{ ou } \overline{\mathrm{BA'}} = -\overline{\mathrm{BA}}.$$

On a :
$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2; \qquad \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2 - \overline{\mathrm{OB}}^2} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Ainsi les deux racines ont le module $\sqrt{q}$ *indépendant de p*. L'angle α qu'elles font de part et d'autre de Ox, est donné par la relation :
$$\cos\alpha = -p : 2\sqrt{q}.$$



$\overline{\mathrm{OA}} = z$, $\overline{\mathrm{OF}} = z^2$;
$\overline{\mathrm{OE}} = -pz$, $\overline{\mathrm{OG}} = pz$;
$\overline{\mathrm{OA}} = -p : 2$; $\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{q}$, $\mathrm{OD} = q$.

Fig. 166.

3°. — Montrons directement que le vecteur $\overline{\mathrm{OA}}$ est une racine de l'équation. L'équation *symbolique* :
$$z^2 + pz + q = 0,$$
exprime que la résultante des trois vecteurs z^2, pz, q, est nulle.

Construisons-les.

Le vecteur représentatif de q est $\overline{\mathrm{OD}}$.

On a : $\text{mod.}\, z = \sqrt{q}$, $\text{mod.}\, z^2 = q$.

Puisque z fait l'angle α avec Ox, z^2 fait l'angle 2α. Donc le vecteur représentatif de z^2 est $\overline{\mathrm{OF}}$.

p étant réel, le vecteur représentatif de pz a la même direction que le vecteur z. Nous avons supposé $p < 0$; donc pz est dirigé

suivant OG. Évaluons sa grandeur. Construisons le parallélogramme OFED; évaluons la longueur $\overline{OE}$. On a :

$$\text{longueur } \overline{OE} = 2 \,.\, \overline{OH} = 2q \cos \alpha = -p\sqrt{q}.$$

$$\text{vecteur } \overline{OE} = -pz; \quad \text{d'où :} \quad \text{vecteur } \overline{OG} = -\text{vecteur } \overline{OE} = pz.$$

Les trois vecteurs $\overline{OF}$, $\overline{OD}$, $\overline{OG}$, s'équilibrent : ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Il faut soigneusement distinguer la *longueur* OE, par exemple, du *vecteur* OE. La longueur $\overline{OE}$ est considérée indépendamment de sa direction; c'est une quantité réelle. Le vecteur $\overline{OE}$ est défini en longueur et en direction; c'est une quantité *complexe*.

4°. — Si q croît, p restant invariable, les racines sont données par les intersections de la droite invariable Δ avec un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{q}$. Si q devient extrêmement grand, les racines sont très approximativement dirigées suivant Oy.

229. Généralisation : théorème de d'Alembert.

1°. — Généralisons d'abord pour l'équation du 2e degré. Nous supposons dans ce qui précède que p et q sont réels. Si p et q sont complexes, on démontre immédiatement qu'il existe encore deux racines : on peut trouver deux vecteurs tels qu'*utilisant l'un ou l'autre*, la résultante des trois vecteurs z^2, pz, q, est nulle. Toutefois, si p et q ne sont pas réels, les racines ne sont plus *conjuguées*; elles ne sont plus de la forme $a \pm bi$.

2°. — Passons au cas le plus général.

On démontre qu'une équation de degré m :

$$Az^m + Bz^{m-1} + \ldots = 0,$$

dont les coefficients A, B, ... sont réels ou complexes, admet m racines réelles ou complexes. C'est dire qu'il existe m vecteurs tels qu'*en utilisant l'un d'eux*, les vecteurs Az^m, Bz^{m-1}, ... ont une résultante nulle.

Si les coefficients A, B, ... sont réels, les racines sont conjuguées deux par deux (de la forme $a \pm bi$); les vecteurs représentatifs des racines sont deux par deux symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles.

Nous retrouvons les propositions des §§ 39 et suivants. Puisque les racines imaginaires vont deux par deux, toute équation de degré impair à coefficients réels a certainement un nombre impair de racines réelles; toute équation de degré pair à coefficients réels a certainement un nombre pair de racines réelles.

3°. — Enfin on démontre la proposition connexe : Tout polynôme de degré m à coefficients réels ou imaginaires est décomposable d'une seule manière en m facteurs du premier degré de la forme $z - (a + bi)$; la quantité complexe $a + bi$ est une des racines du polynôme égalé à zéro (§ 40).

Précisons le sens de cette proposition sur le polynôme du second degré : $z^2+6z+25=(z+3-4i)(z+3+4i)$.

Les racines du polynôme égalé à zéro sont représentées par les vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, symétriques par rapport à Ox (fig. 167).

Soit un vecteur *arbitrairement choisi* $z=\overline{OZ}$. On a :

$$\overline{OB}=\overline{OZ}+\overline{ZB}=\overline{OZ}-\overline{OA}=z+3-4i,$$
$$\overline{OB'}=\overline{OZ}+\overline{ZB'}=\overline{OZ}-\overline{OA'}=z+3+4i;$$
$$\overline{OA}=-3+4i, \qquad \overline{OA'}=-3-4i.$$

Les additions et soustractions sont *géométriques*.

La proposition énoncée signifie que le vecteur, produit des vecteurs $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$, est la résultante des trois vecteurs z^2, pz, q, où z est le vecteur $\overline{OZ}$ arbitrairement choisi.

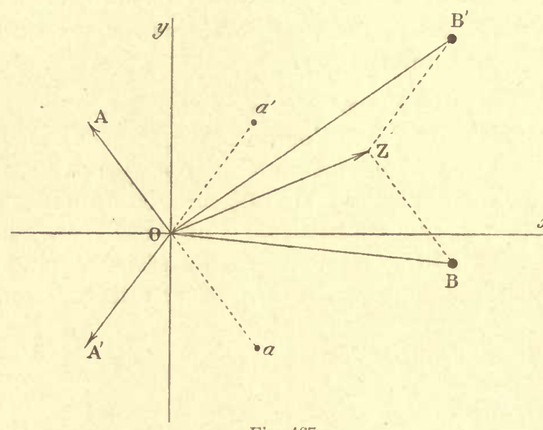


Fig. 167.

Nous énonçons ces propositions (dont le plan de cet ouvrage nous interdit la démonstration), d'abord pour généraliser les idées, surtout pour habituer le lecteur à l'emploi des imaginaires dont le rôle d'outil augmente tous les jours. Le lecteur les vérifiera sur les équations binômes (§ 227) pour lesquelles les racines sont immédiatement calculables.

230. Exponentielle d'une quantité complexe.

1°. — Jusqu'à présent nous n'avons pas attribué de sens au symbole e^{ix}, où x est une quantité réelle. Nous sommes libres évidemment de nos définitions; mais cette liberté disparaît *si nous posons que les règles du calcul des exponentielles réelles doivent s'appliquer aux exponentielles complexes*.

Montrons que nous sommes obligés d'écrire :

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \qquad (1)$$

Nous vérifions d'abord la règle de multiplication (et par suite de division, d'élévation aux puissances, d'extraction de racines). On a conformément à l'équation (1) :

$$e^{ix}\,.\,e^{iy}=e^{i(x+y)}=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)$$
$$=\cos(x+y)+i\sin(x+y).$$

2°. — Mais nous savons que la propriété fondamentale des exponentielles est la conséquence de l'équation différentielle qui les définit. Voyons ce que devient celle-ci dans le cas des quantités complexes.

Pour les quantités réelles, on a :

$$de^{ax} = ae^{ax}\,dx, \quad \text{où } a \text{ est réel.}$$

Les opérations algébriques restant les mêmes (*par convention*) pour les quantités complexes que pour les quantités réelles, les règles de dérivation demeurent inaltérées, puisque dériver revient à effectuer une différence, puis un quotient.

On aura donc pour les quantités complexes :

$$de^{ix} = ie^{ix}\,dx,$$

ce qui est conforme à l'équation (1), puisque :

$$d(\cos x + i \sin x) = (-\sin x + i \cos x)\,dx = i(\cos x + i \sin x)\,dx.$$

Les deux fonctions qu'identifie l'équation (1), auront donc toujours même dérivée. Elles sont égales entre elles pour $x = 0$; elles seront donc toujours égales. *En définitive, si nous voulons donner un sens au symbole* e^{ix}, *ce ne peut être que celui défini par la relation* (1).

Remarque I.

La fonction e^{ix} est périodique et de période 2π. On a en particulier (traduire le symbole exp. par *exponentielle*) :

$$\exp(i\,2k\pi) = 1, \qquad \exp\left(i\,2k\pi + i\frac{\pi}{2}\right) = i,$$

$$\exp(i\,2k\pi + i\pi) = -1, \qquad \exp\left(i\,2k\pi + i\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

Remarque II.

Toute quantité complexe peut se mettre sous les formes équivalentes, où α et β sont supposées réelles :

$$e^{\beta}e^{i\alpha} = e^{\beta + i\alpha} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = a + bi;$$

$$e^{\beta} = \rho, \qquad \beta = \log\rho.$$

Nous avons dit qu'on peut toujours prendre ρ positif; son logarithme est donc parfaitement défini.

231. Logarithme d'une quantité complexe.

Le paragraphe précédent ramène l'exponentielle d'une quantité complexe à la forme $a + bi$, c'est-à-dire *définit l'exponentielle d'une quantité complexe*, nous permet de représenter sa valeur sur le plan. Nous avons :

$$e^{\beta + i\alpha} = e^{\beta}e^{i\alpha} = a + bi = e^{\beta}(\cos\alpha + i\sin\alpha). \qquad (1)$$

Pour définir le logarithme d'une quantité complexe, nous poserons :

$$\beta + i\alpha = \log(a + bi).$$

Or on a par identification des équations (1) :

$$e^\beta = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \beta = \log\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2).$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

α est défini sans ambiguïté par son cosinus et son sinus, le radical devant être pris avec le signe $+$; α est donc défini à $2k\pi$ près, où k est entier. Appelons α une valeur possible; il vient en définitive :

$$\log(a+bi) = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + i(2k\pi+\alpha).$$

Une quantité quelconque, *serait-elle positive,* a donc une infinité de logarithmes, puisque le nombre entier k reste arbitraire; posant $k=0$, on retrouve le logarithme ordinaire. En particulier :

$$\log 1 = i\,.\,2k\pi, \qquad \log(-1) = i(2k+1)\pi,$$

$$\log(-a) = \log a + \log(-1) = \log a + i(2k+1)\pi.$$

Ainsi sont introduits les logarithmes des quantités négatives.

232. Fonctions circulaires d'une quantité complexe.

1°. — Comparons les formules :

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})},$$

aux formules qui définissent les fonctions hyperboliques (§ 212) :

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Les fonctions hyperboliques, étant composées d'exponentielles, sont définies pour des valeurs complexes de la variable (§ 230); nous pouvons donc remplacer x par ix dans le second groupe de formules. Le comparant alors au premier, il vient :

$$\cos x = \cosh ix, \qquad i\sin x = \sinh ix, \qquad i\operatorname{tg} x = \operatorname{tgh} ix.$$

2°. — *Admettons la généralité de ces formules;* appliquons-les à une quantité x purement imaginaire. Remplaçons x par ix.

$$\cos ix = \cosh i^2x = \cosh(-x) = \cosh x,$$

$$i\sin ix = \sinh i^2x = \sinh(-x) = -\sinh x, \qquad \sin ix = i\sinh x;$$

$$\operatorname{tg} ix = \sin ix : \cos ix = i\operatorname{tgh} x.$$

3°. — Généralisons pour une quantité complexe quelconque :

$$\sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.$$

$$\cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$$

Ainsi les fonctions circulaires des quantités complexes sont ramenées à la forme $a+bi$, par suite deviennent représentables par un point du plan.

233. Arcs en progression arithmétique.

Soit à calculer les sommes :

$$S_1 = \cos\alpha + \beta\cos(\alpha+\delta) + \dots \qquad + \beta^{m-1}\cos[\alpha+(m-1)\delta],$$

$$S_2 = \sin\alpha + \beta\sin(\alpha+\delta) + \dots \qquad + \beta^{m-1}\sin[\alpha+(m-1)\delta],$$

de m cosinus ou sinus dont les arcs sont en progression arithmétique, et dont les coefficients sont en progression géométrique.

Pour cela, calculons la somme :

$$S = S_1 + iS_2 = e^{i\alpha}\left[1 + \beta e^{i\delta} + \beta^2 e^{i2\delta} + \dots + \beta^{m-1}e^{i(m-1)\delta}\right].$$

La quantité entre crochets est une progression géométrique.

Une formule élémentaire (§ 245) donne :

$$S = e^{i\alpha}\frac{1-\beta^m e^{im\delta}}{1-\beta e^{i\delta}}. \tag{1}$$

Il suffit d'identifier dans les deux membres les quantités réelles et les quantités imaginaires. Pour éviter les calculs inutiles, nous ne traiterons que deux cas particuliers.

1°. — β est positif et petit. Quel que soit m (pourvu qu'il soit assez grand), on ne commet qu'une erreur insignifiante en posant $\beta^m = 0$. D'où aisément :

$$S_1' = \frac{(1-\beta\cos\delta)\cos\alpha - \beta\sin\delta\sin\alpha}{1+\beta^2-2\beta\cos\delta},$$

$$S_2' = \frac{(1-\beta\cos\delta)\sin\alpha + \beta\sin\delta\cos\alpha}{1+\beta^2-2\beta\cos\delta}. \tag{2}$$

Dans les applications optiques, on utilise la somme des carrés des coefficients de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ dans les deux expressions précédentes. Évidemment la même pour S_1' et S_2', elle est égale à :

$$1 : (1+\beta^2-2\beta\cos\delta).$$

2°. — Le second cas intéressant est celui où le nombre des termes est quelconque, mais où l'on a $\beta = 1$. Nous avons affaire à une série d'arcs en progression arithmétique :

$$S = e^{i\alpha}\frac{1-e^{im\delta}}{1-e^{i\delta}} = e^{i\alpha}\frac{e^{im\delta}-1}{e^{i\delta}-1}.$$

On met cette expression aisément sous les formes :

$$S = \exp i\left[\alpha + \frac{m-1}{2}\delta\right]\left[\exp\frac{im\delta}{2} - \exp\left(-\frac{im\delta}{2}\right)\right]$$

$$: \left[\exp\frac{i\delta}{2} - \exp\left(-\frac{i\delta}{2}\right)\right];$$

$$S = \left[\cos\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\delta\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\delta\right)\right]\left[\sin\frac{m\delta}{2} : \sin\frac{\delta}{2}\right].$$

Séparant les quantités réelles des imaginaires, on a :

$$S_1 = \cos\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\delta\right)\left[\sin\frac{m\delta}{2} : \sin\frac{\delta}{2}\right],$$

$$S_2 = \sin\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\delta\right)\left[\sin\frac{m\delta}{2} : \sin\frac{\delta}{2}\right].$$

En particulier si $\alpha = 0$, on a :

$$S'_1 = 1 + \cos\delta + \ldots + \cos(m-1)\delta,$$

$$S''_1 = 0 + \sin\delta + \ldots + \sin(m-1)\delta.$$

$$S'_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \sin\frac{2m-1}{2}\delta : \sin\frac{\delta}{2}\right],$$

$$S''_1 = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\delta}{2} - \cos\frac{2m-1}{2}\delta\right] : \sin\frac{\delta}{2}.$$

Représentation conforme.

234. Fonction des quantités constitutives d'une variable complexe.

1°. — Tout point A du plan xOy est défini par ses coordonnées cartésiennes : x, y, ou polaires : r, α.

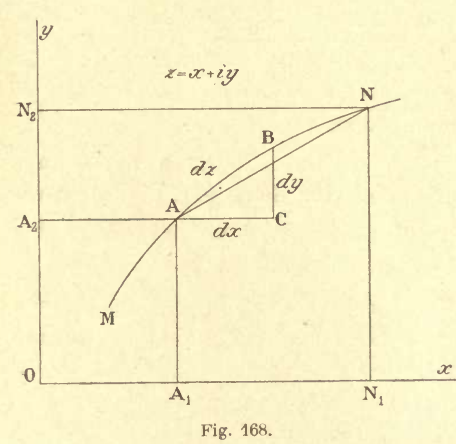


Fig. 168.

On peut aussi bien le considérer comme défini par la quantité complexe (fig. 168) :

$$z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Quand le point se promène sur une courbe MN, la quantité complexe varie. En particulier, du point A au point voisin B, elle augmente de :

$$dz = \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB},$$

$$dz = dx + idy.$$

Cette différentielle représente, d'après nos conventions, *non pas l'arc de courbe, mais la corde.* Du point A au point N quelconque, on a :

$$\int_A^N dz = (\overline{ON_1} - \overline{OA_1}) + i(\overline{ON_2} - \overline{OA_2}) = \text{corde } \overline{AN}.$$

D'où cette proposition fondamentale, du reste évidente : *quand on passe d'un point à l'autre du plan, la variable z subit une variation indépendante du chemin parcouru.*

2°. — Considérons un second plan que nous appellerons plan des w; posons : $w = \varphi + i\psi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

φ et ψ sont des quantités réelles. Chacun des points du plan w est défini par une valeur de w, c'est-à-dire par une valeur de φ et une valeur de ψ (fig. 169).

Il s'agit de relier les points du plan z aux points du plan w.

3°. — On pourrait prendre pour φ et ψ des fonctions arbitraires de x et de y; la correspondance entre les points des deux plans serait parfaitement déterminée. A une courbe Z du plan z correspondrait une courbe W du plan w.

Pour fixer les idées par un exemple, soit la correspondance :

$$w = x + 2iy; \qquad \varphi = x, \qquad \psi = 2y.$$

A. — Considérons, dans le plan z, les droites passant par l'origine : $y = ax$. Cherchons les courbes conjuguées dans le plan w. On a :

$$\varphi = x, \qquad \psi = 2ax; \qquad \psi = 2a\varphi.$$

ce sont des droites passant par l'origine du plan w.

B. — Considérons, dans le plan z, les cercles : $y^2 + x^2 = R^2$. Dans le plan w, les courbes correspondantes sont les ellipses :

$$\psi^2 + 4\varphi^2 = 4R^2.$$

Et ainsi de suite.

4°. — Mais quand φ et ψ sont choisies arbitrairement, il n'existe pas entre les courbes Z et les courbes W de relation intéressante. Aussi se borne-t-on à considérer des correspondances plus particulières, mais d'intérêt fondamental.

235. Existence d'une dérivée.

1°. — Supposons que le rapport $dw : dz$ ait une valeur *complexe*

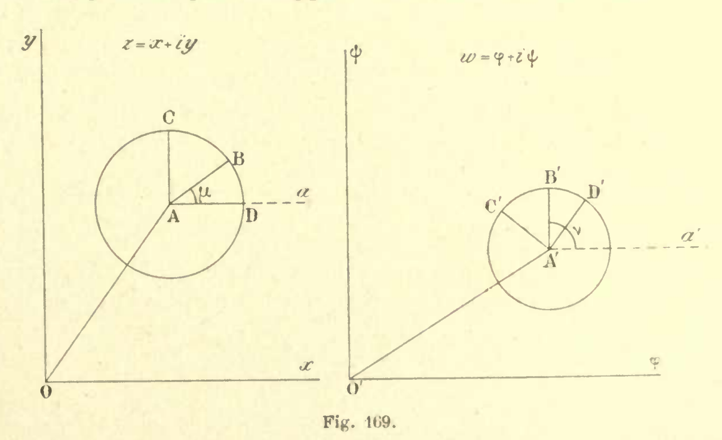


Fig. 169.

bien déterminée pour tout point A du plan z, par suite pour tout point A′ correspondant du plan w. Étudions les propriétés des correspondances jouissant de cette propriété (fig. 169).

Poser : $$dw = dz \,.\, s\,(\cos\sigma + i \sin\sigma).$$

c'est dire qu'on obtiendra le vecteur $\overline{A'B'} = dw$, à partir du vecteur $AB = dz$, en multipliant le module de ce dernier par s, et en augmentant son argument de l'arc σ.

Il résulte de là que *si l'extrémité* B *du vecteur* dz *décrit une circonférence de centre* A, *l'extrémité* B′ *du vecteur* dw *décrit une circonférence de centre* A′, *et avec la même vitesse angulaire.*

En effet, s et σ ne dépendent par hypothèse que du point A et non de la direction AB considérée.

Soit : $dz = m(\cos\mu + i\sin\mu)$, $dw = n(\cos\nu + i\sin\nu)$.

On doit avoir : $dw = dz \,.\, s(\cos\sigma + i\sin\sigma)$, ce qui implique :

$$n = ms, \qquad \nu = \mu + \sigma.$$

2°. — Considérons maintenant deux accroissements $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, de dz à partir du même point A. Il leur correspond pour w deux accroissements $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$, à partir du point A′. On a :

$$\nu_1 = \mu_1 + \sigma, \qquad \nu = \mu + \sigma; \qquad \nu_1 - \nu = \mu_1 - \mu.$$

Donc à deux courbes quelconques qui se coupent en A *dans le plan* z *sous un certain angle, correspondent dans le plan* w *deux courbes qui se coupent en* A′ *conjugué de* A *sous le même angle.*

Les figures formées dans les deux plans par deux systèmes de points conjugués sont semblables dans leurs éléments infiniment petits.

C'est à cette propriété que les modes de correspondance ici étudiés doivent leur nom de *représentation conforme.*

236. Représentation conforme. Fonctions conjuguées.

1°. — Cherchons comment sont reliées les fonctions φ et ψ pour qu'il existe une dérivée unique pour chaque système de points conjugués; par suite, que la représentation soit conforme. On a :

$$dw = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) = n(\cos\nu + i\sin\nu). \quad (1)$$

De la relation : $dz = dx + idy = m(\cos\mu + i\sin\mu)$,

on tire : $dx = m\cos\mu$, $dy = m\sin\mu$.

Identifions les deux membres de l'équation (1) en remplaçant dx, dy, par leurs valeurs, et en posant $\nu = \mu + \sigma$. Il vient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}m\cos\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial y}m\sin\mu = n\cos(\mu+\sigma) = n\cos\sigma\cos\mu - n\sin\sigma\sin\mu,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}m\cos\mu + \frac{\partial\psi}{\partial y}m\sin\mu = n\sin(\mu+\sigma) = n\sin\sigma\cos\mu + n\cos\sigma\sin\mu.$$

D'où :
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{n}{m}\cos\sigma, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{n}{m}\sin\sigma;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{n}{m}\sin\sigma, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{n}{m}\cos\sigma.$$

D'où enfin : $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Telles sont les relations qui doivent exister entre φ et ψ.

On a les relations équivalentes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2.$$

Quand les conditions (3) sont satisfaites, la dérivée $dw : dz$, est complètement déterminée et ne dépend que du point A.

On peut donc la calculer au moyen d'accroissements de la variable parallèles aux axes. D'où les relations :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial (iy)} = -i\frac{\partial w}{\partial y}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{5}$$

Ces dernières formules signifient que si au vecteur $\overline{AD}$ parallèle à l'axe Ox correspond le vecteur $A'D'$, au vecteur $\overline{AC}$ parallèle à Oy correspond le vecteur $\overline{A'C'}$ *égal et normal à* $\overline{A'D'}$.

C'est en effet le rôle de l'opérateur i de faire tourner un vecteur de $\pi : 2$ dans le sens positif.

2°. — FONCTION D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

Les conditions équivalentes (5) conduisent à la notion de *fonction d'une variable* complexe. Elles signifient, comme nous allons voir, que φ et $i\psi$ sont, non pas des fonctions arbitraires de x et de y, mais la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction :

$$w = f(z) = f(x + iy),$$

qui dépend, non de x et de y séparément, mais de la combinaison $x + iy$.

On a dans cette hypothèse :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{df}{dz},$$

relations identiques aux équations (5).

Les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, qui se déduisent comme il vient d'être dit d'une fonction *quelconque* $f(z) = f(x + iy)$, sont dites *conjuguées*.

3°. — Comme exercice, nous conseillons au lecteur d'étudier la transformation :

$$w = \varphi + i\psi = \log z = \log(x + iy),$$

dans le cas simple où le point A décrit un cercle de centre O. Le point correspondant A′ décrit une droite parallèle $O'\psi$. La construc-

tion lui fera comprendre en quel sens le logarithme est une fonction périodique. Il étudiera de même la fonction :

$$w = \varphi + i\psi = e^{ix},$$

dans le cas où x est une quantité réelle variant de $-\infty$ à $+\infty$.

237. Transformation par rayons vecteurs réciproques (inversion).

Prenons pour *transformateur* la fonction :

$$w = \frac{k^2}{z}, \quad \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{k^2}{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{k^2}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

D'où les conditions : $\rho r = k^2, \qquad \theta = -\alpha.$

La transformation consistera donc à changer le rayon vecteur en son inverse, et à prendre la symétrique de la figure obtenue par rapport à l'axe $O\varphi$. Mais comme le changement d'une figure en sa symétrique ne change pas les angles, nous arrivons à ce théorème fondamental : *la transformation par rayons vecteurs réciproques est conforme;* autrement dit, *deux systèmes de points conjugués par inversion constituent des figures infiniment petites semblables.*

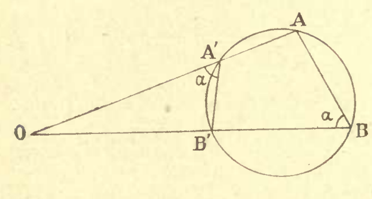


Fig. 170.

Remarque.

Nous déduisons les propriétés de l'inversion de la méthode générale, pour habituer le lecteur aux quantités imaginaires. Il est facile de les établir directement.

Considérons deux points A, B, et leurs inverses A′, B′. On a par hypothèse :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = C^{te}.$$

Donc le quadrilatère ABB′A′ est inscriptible. Les angles marqués α sont égaux.

Si les points A et B deviennent très proches, les droites OA, OB se superposent. Les droites AB et A′B′ deviennent les tangentes aux points homologues de deux courbes inverses. *Donc ces tangentes font le même angle* (en sens inverse) *avec le rayon vecteur.*

Supposons que le point A soit commun à deux courbes; le point A′ conjugué de A sera commun aux inverses. Il résulte de la proposition ci-dessus démontrée que *deux courbes se coupent sous le même angle que leurs inverses.*

Voici d'abord quelques exemples usuels de transformation par rayons vecteurs réciproques. La courbe à transformer étant unique, les propriétés de la transformation conforme n'apparaissent naturellement pas.

1°. — TRANSFORMÉE D'UN CERCLE.

Nous pouvons, sans diminuer la généralité du problème, mettre le centre du cercle sur l'axe Ox. L'équation est :

$$x^2 + y^2 - 2ax - R^2 + a^2 = 0, \qquad r^2 - 2ar\cos\alpha - R^2 + a^2 = 0. \quad (1)$$

La courbe transformée est :

$$\frac{k^4}{\rho^2} - \frac{2ak^2}{\rho}\cos\theta - R^2 + a^2 = 0, \quad (a^2 - R^2)\rho^2 - k^2 2a\rho\cos\theta + k^4 = 0. \quad (2)$$

C'est également un cercle dont le centre est sur l'axe $O\varphi$.

Si le cercle (1) passe par l'origine, $(R^2 = a^2)$, le cercle (2) se transforme en une droite parallèle à $O\psi$. Il y a naturellement réciprocité dans la transformation.

Nous reviendrons plus loin sur ces figures (§ 238).

2°. — TRANSFORMÉE D'UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE AYANT L'ORIGINE POUR CENTRE.

$$2xy = a^2, \qquad 2r^2\cos\alpha\sin\alpha = r^2\sin 2\alpha = a^2; \quad (1)$$

$$k^4\sin 2\theta : \rho^2 = a^2, \qquad a^2\rho^2 = k^4\sin 2\theta. \quad (2)$$

La transformée est une *Lemniscate de Bernoulli*.

La figure 171 n'en représente que la moitié.

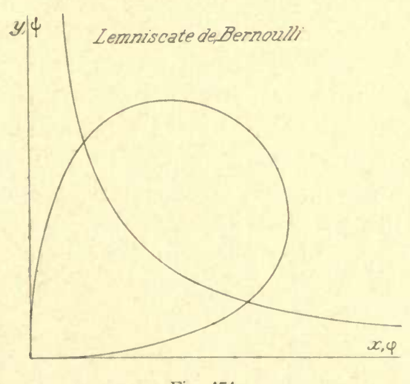


Fig. 171.

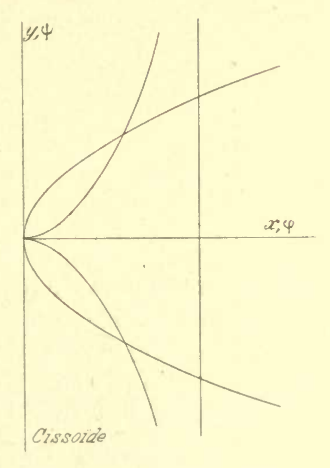


Fig. 172.

3°. — TRANSFORMÉE D'UNE PARABOLE PASSANT PAR L'ORIGINE.

$$y^2 = 2px, \qquad r\sin^2\alpha = 2p\cos\alpha, \quad (1)$$

$$\frac{k^2\sin^2\theta}{\rho} = 2p\cos\theta, \qquad \rho = k^2\frac{\sin^2\theta}{2p\cos\theta}. \quad (2)$$

La transformée est une *Cissoïde de Dioclès* (fig. 172).

Elle admet une asymptote verticale qui correspond aux points de la parabole voisins de l'origine. Son point de rebroussement correspond aux points à l'infini de la parabole (§ 124).

4°. — Transformée d'une conique ayant un foyer a l'origine.

Les coniques rapportées à leur foyer ont en coordonnées polaires l'équation générale (§ 177) :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}; \qquad (1)$$

$e < 1$ pour l'ellipse; $e = 1$ pour la parabole; $e > 1$ pour l'hyperbole.

L'équation de la transformée est donc :

$$p\rho = k^2(1 + e\cos\theta). \qquad (2)$$

C'est un *Limaçon de Pascal.* La courbe ne passe par l'origine ($\rho = 0$) que pour la parabole (point de rebroussement), et pour l'hyperbole (point double ordinaire).

L'équation d'un cercle passant par l'origine est :

$$p\rho = k^2 e\cos\theta.$$

On peut donc définir le limaçon comme obtenu à partir d'un cercle passant par l'origine, en prenant sur le rayon vecteur OA et de part et d'autre du point A du cercle, une longueur invariable $\overline{AB} = \overline{AB'}$ (ici représentée par $k^2 : p$; voir § 144).

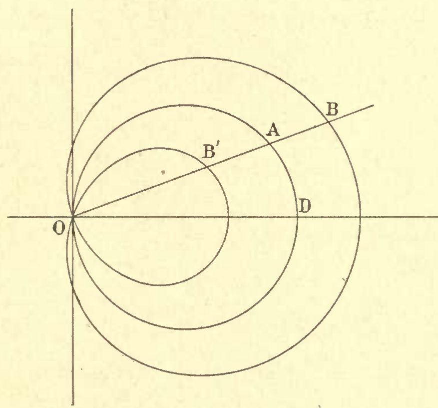


Fig. 173.

Si la longueur AB est supérieure au diamètre, la courbe ne passe pas par l'origine (transformée de l'ellipse). Si elle est égale au diamètre, la transformée y a un point de rebroussement (parabole). Enfin si elle est inférieure, on a la courbe représentée dans la figure 173; elle est l'inverse d'une hyperbole.

238. Faisceaux de courbes orthogonales; inversion.

Prenons dans le plan z deux faisceaux de courbes orthogonales, c'est-à-dire se coupant toutes à angle droit. Les courbes correspondantes dans le plan w se couperont également à angles droits ; c'est la conséquence de la *représentation conforme.*

On voit l'importance de cette proposition dans les nombreuses questions d'Hydrodynamique, d'Acoustique, d'Électricité, de Magnétisme (lignes équipotentielles et lignes de force), où l'on a besoin de connaître des faisceaux de courbes orthogonales. Naturellement nous choisirons dans le plan z les faisceaux de courbes les plus simples, par exemple :

1° les droites parallèles à Ox et les droites parallèles à Oy;
2° les droites passant par un point et les cercles ayant ce point pour centre.

Utilisant comme *transformateur* une fonction quelconque $f(z)$, nous obtiendrons dans le plan w deux nouveaux faisceaux de courbes orthogonales.

Usons d'abord de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

1°. — Les droites parallèles à Ox donnent des cercles tangents à $O\varphi$; les droites parallèles à Oy donnent des cercles tangents à $O\psi$. Les deux faisceaux de cercles obtenus sont formés de courbes orthogonales. Nous laissons au lecteur le soin de faire la figure et de discuter le problème.

2°. — Prenons comme centre d'inversion le point A et transformons le faisceau de droites qui se coupent en M, et le faisceau de cercles qui ont M pour centre (fig. 174).

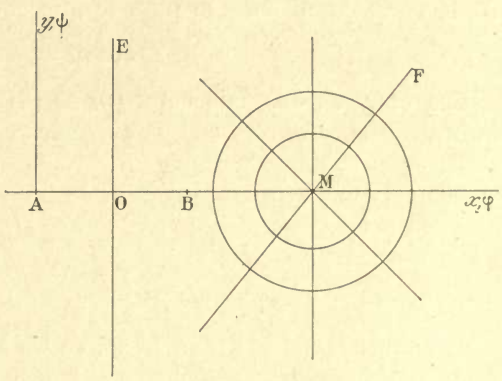


Fig. 174.

Soit B le transformé du point M. Les cercles qui résultent de la transformation des droites MF, doivent passer tous par le centre d'inversion A et par le point B. Leurs centres se trouvent donc sur la droite OE élevée normalement à AB au point O milieu de AB.

Il est facile de voir que les cercles qui résultent de la transformation des cercles de centre M, admettent cette droite OE comme axe radical (§ 88). En effet, soit $\overline{AM} = a$.

Les cercles transformés ont pour équation (§ 237) :

$$(a^2 - R^2)(\varphi^2 + \psi^2) - 2a\varphi + 1 = 0.$$

L'origine des coordonnées est actuellement en A. Transportons-la en O. On a : $k^2 = 1$; $\overline{AB} = 1 : a$, $\overline{AO} = 1 : 2a$.

Il faut remplacer dans l'équation précédente φ par $(\varphi + 1) : 2a$.

On trouve : $$\varphi^2 + \psi^2 - \frac{a^2 + R^2}{a^2 - R^2}\varphi + \frac{1}{4a^2} = 0;$$

équation qui est bien de la forme voulue (§ 90) pour que OE soit axe radical.

En définitive, nous retrouvons les faisceaux de cercles étudiés au § 90 et représentés dans la figure 66.

239. Faisceaux de courbes orthogonales ; transformation $w^n = kz$.

Choisissons comme transformateur la fonction : $w^n = kz$.

$$w^n = (\varphi + i\psi)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = k(x + iy)\,;$$

$$\rho^n \cos n\theta = kx, \qquad \rho^n \sin n\theta = ky. \qquad (1)$$

Prenons pour courbes orthogonales dans le plan z les droites parallèles à Ox *et à* Oy.

Une droite parallèle à Ox est définie par une valeur y_0 de y ; la valeur de x reste arbitraire.

A cette droite correspond dans le plan w une courbe :

$$\rho^n \sin n\theta = ky_0. \qquad (2)$$

De même à une droite parallèle à Oy et définie par une valeur x_0 de x, correspond dans le plan w une courbe :

$$\rho^n \cos n\theta = kx_0. \qquad (3)$$

Les courbes des faisceaux (2) et (3) sont orthogonales. Dans ce qui suit, nous écrirons x et y au lieu de x_0 et y_0 ; nous poserons : $k = 1$.

1°. — $n = 1$.

Les faisceaux (2) et (3) dans le plan w sont les droites parallèles à $O\varphi$ et à $O\psi$.

2°. — $n = 2$. On a :

$$\varphi^2 - \psi^2 = x, \qquad 2\varphi\psi = y.$$

Les courbes dans le plan w sont : les hyperboles équilatères asymptotes aux bissectrices des axes, les hyperboles équilatères asymptotes aux axes. On les obtient en donnant à x et y diverses valeurs.

3°. — $n = -2$.

$$\frac{1}{(\varphi + i\psi)^2} = \frac{(\varphi - i\psi)^2}{(\varphi^2 + \psi^2)^2} = x + iy\,;$$

$$x(\varphi^2 + \psi^2)^2 + \psi^2 - \varphi^2 = 0, \qquad y(\varphi^2 + \psi^2)^2 + 2\varphi\psi = 0. \qquad (4)$$

Les faisceaux de courbes orthogonales sont constitués par des *lemniscates*.

Les lemniscates se présentent dans la solution du problème général suivant : *on demande le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes* F *et* F′ *soit constant* (§ 399).

Déterminons le milieu O de FF′. Si le produit constant est égal à $\overline{OF}^2$, l'origine appartient au lieu cherché ; par définition, *la courbe est alors une lemniscate.*

On peut écrire la première équation (4) :

$$\left[\left(\varphi - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2 + \psi^2\right]\left[\left(\varphi + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2 + \psi^2\right] = \frac{1}{4x^2}.$$

Elle exprime que la courbe est le lieu des points dont le produit des distances aux points F et F′ tels que $\overline{OF} = \overline{OF'} = 1 : \sqrt{2x}$, est constant et égal à $1 : 2x$.

On vérifiera : 1° que les tangentes à l'origine sont les bissectrices

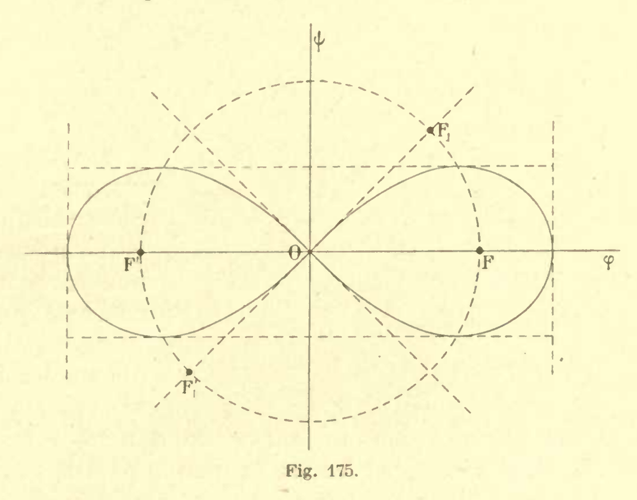


Fig. 175.

des axes ; 2° que les maximums de ψ sont sur le cercle de centre O et de rayon $\overline{OF}$.

On peut écrire la seconde équation (4) :

$$\left[\left(\varphi - \frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^2 + \left(\psi - \frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^2\right]\left[\left(\varphi + \frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^2 + \left(\psi + \frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^2\right] = \frac{1}{4y^2}.$$

Elle exprime que la courbe est le lieu des points dont le produit des distances aux points F_1 et F'_1 est constant et égal à $\overline{OF_1}^2$.

240. Coniques homofocales.

Utilisons la fonction transformatrice (§ 212) :

$$2w = 2a \cosh z = a \exp(x + iy) + a \exp(-x - iy);$$

$$2(\varphi + i\psi) = ae^x(\cos y + i \sin y) + ae^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

D'où : $\varphi = a \cos y \cosh x, \qquad \psi = a \sin y \sinh x.$

Éliminant y ou x entre ces deux équations, on trouve les faisceaux :

$$\frac{\varphi^2}{\cosh^2 x} + \frac{\psi^2}{\sinh^2 x} = a^2, \qquad (1)$$

$$\frac{\varphi^2}{\cos^2 y} - \frac{\psi^2}{\sin^2 y} = a^2. \qquad (2)$$

Les courbes (1) sont des ellipses (fig. 176) ; les foyers sont distants du centre de :

$$a\sqrt{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \pm a.$$

Les courbes (2) sont des hyperboles (fig. 176); les foyers sont distants du centre de :

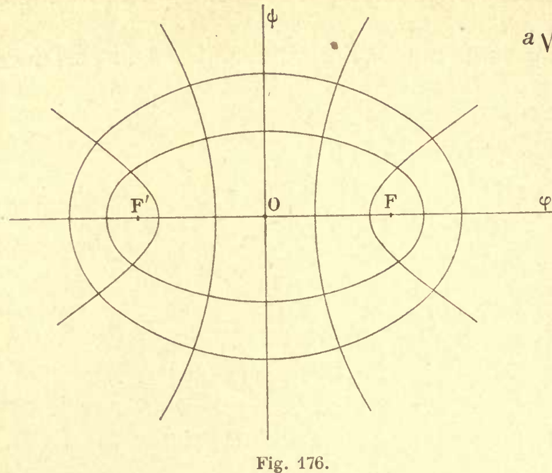


Fig. 176.

$$a\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = \pm a.$$

Donc les coniques homofocales se coupent à angles droits.

241. Transformation réciproque.

Dans les deux paragraphes précédents, nous prenons, pour courbes à transformer, les droites du plan z parallèles aux axes; les courbes transformées sont dans le plan w. Nous pouvons au contraire prendre, pour courbes à transformer, les droites du plan w parallèles aux axes; les transformées sont dans le plan z.

Elles ont pour équations :

$$\varphi(x, y) = \varphi_0, \qquad \psi(x, y) = \psi_0.$$

Les relations (2) du § 236 donnent immédiatement la relation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

qui exprime que ces courbes sont orthogonales (comme nous le savons du reste). En effet, pour déterminer respectivement *les pentes* de ces courbes, on a les deux relations :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} : \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Écrivons que le produit des pentes est égal à -1. Nous retrouvons précisément la condition (1).

Analyse vectorielle.

L'*analyse vectorielle* entre de plus en plus dans la pratique; donnons-en une idée sur des problèmes plans. Elle repose sur la convention de considérer comme *somme* (*géométrique*) de deux vecteurs la diagonale du parallélogramme construit sur ces vecteurs, c'est-à-dire

la *résultante* des vecteurs au sens mécanique du mot. Elle est évidemment indépendante de la Théorie des Imaginaires; mais la considération des vecteurs comme quantités complexes permet de passer immédiatement de l'équation victorielle aux coordonnées cartésiennes : le lecteur suivra donc les raisonnements simultanément dans les deux modes de représentation. C'est pourquoi nous traitons le sujet à cet endroit du Cours.

242. Équation d'une droite.

1°. — Soit d'abord à représenter une droite AI en coordonnées vectorielles. Prenons un vecteur $\overline{OB}=\beta$ parallèle à la droite; soit $\alpha=\overline{OA}$ le vecteur qui aboutit en un de ses points A, du reste arbitrairement choisi. L'équation de la droite est :

$$\delta=\alpha+t\beta; \qquad (1)$$

δ est le vecteur variable, t est une quantité numérique non dirigée (*scalaire*) variable de $-\infty$ à $+\infty$.

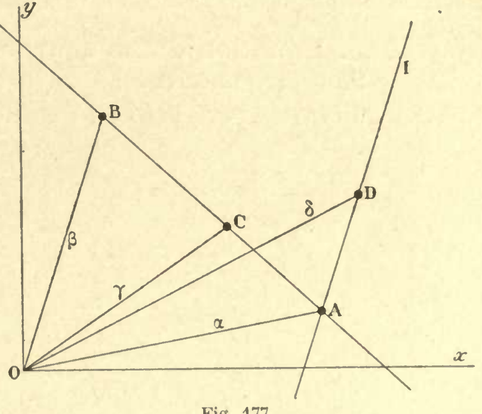


Fig. 177.

En effet, le vecteur $\overline{AD}$ parallèle à $\overline{OB}$ est une fraction de $\overline{OB}$ égale à $t\beta$. Le vecteur $\overline{OD}=\delta$ est la somme *géométrique* $\overline{OA}+\overline{AD}$.

Pour $t>0$, les points de la droite AI qu'on repère, sont du côté I du point A; pour $t<0$, ils sont de l'autre côté.

2°. — Représentons la droite AB en fonction des vecteurs *de référence* $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=\beta$, qui définissent deux de ses points. On a :

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=0, \qquad \overline{AB}=\beta-\alpha; \qquad \overline{AC}=t(\beta-\alpha);$$

$$\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}, \qquad \gamma=\alpha+t(\beta-\alpha). \qquad (2)$$

Pour $t=0$, $\gamma=\alpha$; pour $t=1$, $\gamma=\beta$.

On trouverait aussi bien :

$$\gamma=\beta+t'(\alpha-\beta).$$

3°. — Soit trois vecteurs $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=\beta$, $\overline{OC}=\gamma$, de même origine. Quand on a simultanément :

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0, \qquad p+q+r=0,$$

leurs extrémités sont sur la même droite. En effet, on peut alors poser, conformément à la relation (2) ci-dessus démontrée :

$$(t-1)\alpha - t\beta + \gamma = 0, \qquad \frac{p}{t-1} = \frac{q}{-t} = \frac{r}{1}.$$

4°. — Pour revenir aux coordonnées cartésiennes par l'intermédiaire des imaginaires, écrivons :

$$\alpha = a + ia', \qquad \beta = b + ib', \qquad \gamma = x + iy;$$

$$x + iy = a + ia' + t(b + ib'). \tag{3}$$

L'équation (3) est équivalente aux deux équations entre quantités réelles : $x = a + tb, \qquad y = a' + tb'$;

c'est l'équation d'une droite en fonction du paramètre auxiliaire t.

243. Équation d'une courbe.

1°. — Soit MN une courbe quelconque; exprimons le vecteur $\rho = \overline{OC}$ qui va de l'origine O à l'un de ses points C, au moyen des

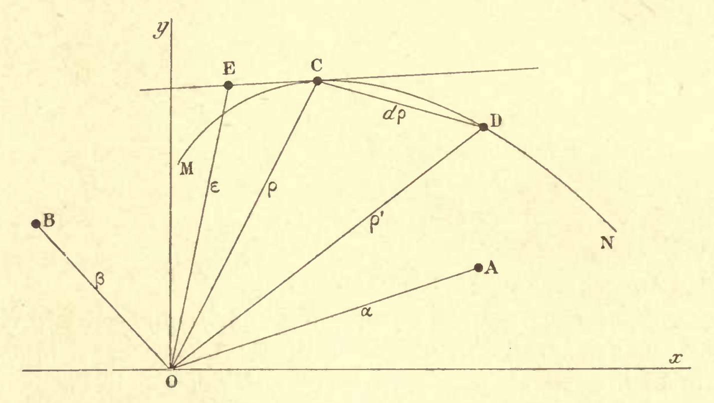


Fig. 178.

vecteurs *de référence* $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$. Nous obtiendrons une équation de la forme : $\rho = \alpha f(t) + \beta\varphi(t)$,

où t est une variable numérique auxiliaire.

2°. — Cherchons la grandeur de la différentielle $d\rho$. A la limite, elle se confond avec l'élément d'arc $\overline{CD}$; on a en effet :

$$\overline{OC} + \overline{CD} + \overline{DO} = 0, \qquad CD = \overline{OD} - OC = \rho' - \rho = d\rho.$$

Or : $\rho' = \rho + \alpha f' dt + \beta\varphi' dt, \qquad d\rho = (\alpha f' + \beta\varphi')dt.$

Si nous revenons aux imaginaires, le module $d\rho$ représente la différentielle de l'arc parcouru; son argument est l'angle avec l'axe Ox.

3°. — Équation de la tangente.

Elle est évidemment (§ 242, *2°*) :

$$\varepsilon = \alpha f(t) + \beta\varphi(t) + \tau\left[\alpha f'(t) + \beta\varphi'(t)\right].$$

Le paramètre t détermine le point C considéré sur la courbe; le paramètre τ détermine le point E considéré sur la tangente.

244. Applications.

1°. — Parabole.

On vérifiera immédiatement que l'équation (fig. 179) :

$$\rho = \alpha t + \beta t^2,$$

représente une parabole. La droite OB, sur laquelle repose le vecteur $\beta = \overline{OB}$, est parallèle à l'axe de la parabole; la direction OA du vecteur $\alpha = \overline{OA}$ est conjuguée de la précédente (§ 126).

L'équation de la tangente est :

$$\varepsilon = \alpha t + \beta t^2 + \tau(\alpha + 2\beta t).$$

Cherchons le point où la tangente coupe la droite OB; le vecteur ε est alors un multiple de $\overline{OB}$; le vecteur α disparaît. Il faut donc poser :

$$t + \tau = 0, \quad \varepsilon = -\beta t^2;$$

le vecteur ε est égal et de signe contraire à la composante de ρ suivant OB. C'est le théorème énoncé au § 126, 2°, dont nous avons promis la démonstration.

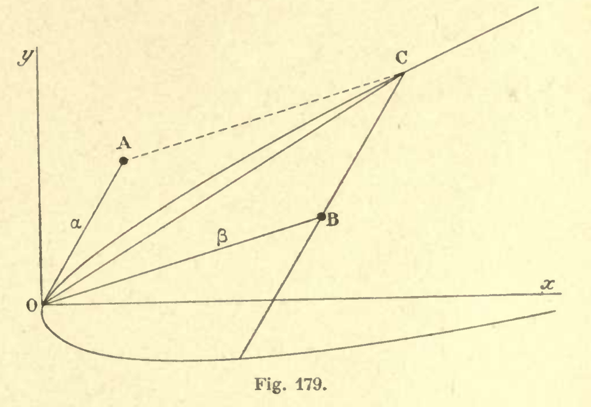


Fig. 179.

Cherchons la condition pour que la tangente passe par un point donné P. Le vecteur $\overline{OP} = \delta$ a pour expression :

$$\delta = p\alpha + q\beta,$$

où p et q sont des nombres. Identifions δ et ε, on a :

$$p = t + \tau, \qquad q = t^2 + 2t\tau.$$

Éliminons τ, il reste : $t = p \pm \sqrt{p^2 - q}$.

On pourra donc généralement d'un point P extérieur à la parabole mener deux tangentes. Elles se superposent si l'on a :

$$p^2 = q, \qquad \delta = p\alpha + p^2\beta.$$

δ se confond avec ρ; le point P est sur la parabole.

2° — Hyperbole.

L'équation : $\rho = \alpha t + \frac{\beta}{t}$, représente une hyperbole.

La tangente a pour équation :

$$\varepsilon = \alpha t + \frac{\beta}{t} + \tau\left(\alpha - \frac{\beta}{t^2}\right).$$

Les vecteurs de référence α et β sont parallèles aux asymptotes et ont le centre pour origine commune; ρ devient infini pour t nul et t infini.

On démontrera immédiatement le théorème suivant : Si un vecteur mené du centre d'une hyperbole forme la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, l'autre diagonale est parallèle à la tangente à l'hyperbole au point où le vecteur rencontre la courbe.

CHAPITRE XII

DEVELOPPEMENTS EN SERIE

Notions sur la convergence des séries infinies.

245. Définitions. Progression géométrique, progression arithmétique.

1°. — Une suite *indéfinie* de quantités $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ forme une *série infinie* dont elles sont les *termes*. Pour représenter cette série, construisons (fig. 180 et 182) les points A, B, C, ... d'abscisses : $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ et d'ordonnées :

$$y_0 = u_0, \qquad y_1 = u_0 + u_1, \ldots, \qquad y_n = u_0 + u_1 + \ldots u_n, \ldots$$

Si, à mesure que n croît, ces points se rapprochent indéfiniment d'une droite MN, de sorte que leur distance à cette droite devienne aussi petite qu'on voudra, on dit que la série est *convergente;* l'ordonnée $\overline{OM}$ est par définition la *somme* de la série.

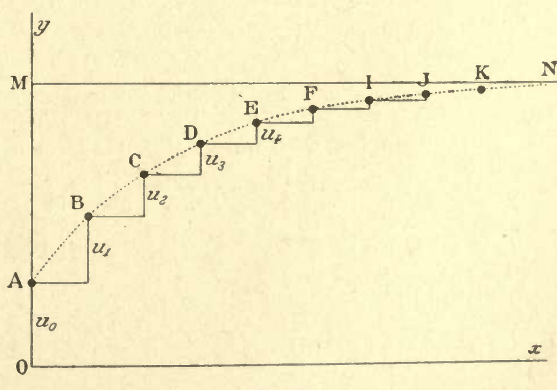


Fig. 180.

La figure 180 suppose que les termes de la série sont tous positifs ; les points vont constamment en montant. La figure 182 suppose que les termes sont alternativement positifs et négatifs ; les points figuratifs se placent alors sur deux courbes, l'une constamment au-dessus de MN, l'autre constamment au-dessous.

Bien entendu, une infinité d'autres combinaisons de signes peut se présenter.

2°. — Progression géométrique.

Pour fixer les idées, soit la série :

$$a, \quad ab, \quad ab^2, \ldots, \quad ab^n, \ldots$$

C'est une *progression géométrique de raison b*.

Sommons les n premiers termes :

$$y_n = a\left[1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}\right].$$

Multiplions les deux membres par b ; il vient :

$$by_n = a\left[b + b^2 + \ldots + b^n\right].$$

Retranchons membre à membre les équations précédentes :

$$y_n(1 - b) = a(1 - b^n),$$

$$y_n = \frac{a}{1-b} - \frac{ab^n}{1-b} = y - \frac{ab^n}{1-b}. \qquad (1)$$

Supposons b positif.

Si $b > 1$, le second terme de y_n croît au delà de toute limite quand n augmente : la série n'est pas convergente.

Si $b < 1$, b^n tend vers 0 quand n augmente indéfiniment. L'ordonnée y_n est donc toujours inférieure à y, mais elle en diffère de moins en moins à mesure que n augmente.

Les points représentatifs de la série se rapprochent donc indéfiniment de la droite $y = a : (1 - b)$.

La série est convergente, sa somme est y.

3°. — Progression arithmétique.

Soit la série :

$$a, \quad a + b, \quad a + 2b, \quad \ldots \quad a + nb, \ldots$$

Sommons-en les n premiers termes ; on a :

$$y_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + [a + (n - 1)b],$$

et aussi : $y_n = [a + (n - 1)\,b] + [a + (n - 2)b] + \ldots + a.$

Additionnons terme à terme :

$$2y_n = [2a + (n - 1)b] + [2a + (n - 1)b] + \ldots + [2a + (n - 1)b].$$

$$y_n = [2a + (n - 1)b]\,\frac{n}{2}. \qquad (2)$$

Considérons la parabole : $y = \frac{bx^2}{2} + \left(a - \frac{b}{2}\right)x. \qquad (3)$

Elle passe par tous les points figuratifs de la série ; pour s'en convaincre, il suffit de poser dans (3) $x = 1, 2, \ldots n$.

On retrouve les valeurs données par la relation (2).

Il est clair que y_n ne tend vers aucune limite déterminée quand n augmente indéfiniment. *La série est divergente.*

246. Intérêt simple, intérêt composé.

A l'occasion des progressions arithmétiques et géométriques, disons quelques mots des intérêts simples et composés.

1°. — Dans le placement à intérêt simple, l'intérêt acquis par la somme à la fin d'une année *ne se capitalise pas,* c'est-à-dire ne s'ajoute pas automatiquement au capital *productif d'intérêt.* La somme obtenue, formée du capital *productif constant* et du capital *improductif variable,* s'accroît donc tous les ans d'une quantité invariable.

Au bout de n années, un franc devient : $1+nr$, où r est le taux de l'intérêt (calculé pour un franc).

2°. — Dans le placement à intérêt composé, l'intérêt acquis par la somme *se capitalise.* Un franc devient $1+r$ au bout de la première année ; chaque franc constituant cette somme devient de même $1+r$ au bout de la seconde année. La somme $1+r$ devient donc :

$$(1+r)(1+r)=(1+r)^2.$$

Au bout de n années, le franc sera devenu : $(1+r)^n$.

Les taux d'intérêt étant toujours les mêmes, il est possible de dresser une table donnant les puissances entières successives de $1+r$, où r est égal à 0,025 si le taux est 2 $^1/_2$ $^0/_0$, 0,030 si le taux est 3 $^0/_0$, etc.

On la trouvera plus loin (§ 248).

3°. — On doit rembourser un capital S à la fin de n années ; l'argent est censément placé au taux r. On demande quelle somme S' il faut payer aujourd'hui pour que le créancier n'y perde pas.

Il est clair qu'il faut lui payer une somme S' qui, placée au taux r pendant n années, reconstitue la somme S :

$$S'(1+r)^n=S, \qquad S'=\frac{S}{(1+r)^n}.$$

Il revient au même de poser le problème sous la forme suivante : *quelle est la valeur actuelle d'un franc payable à la fin de n années ?* D'après ce qui vient d'être dit, il faut prendre les inverses des nombres de la table § 248.

Ainsi la valeur actuelle d'un franc placé à 4 $^0/_0$ et payable dans 15 ans est : 1 fr. $: 1{,}800 = 0$ fr. 555.

La valeur actuelle d'un franc placé à 3 $^0/_0$ et payable dans 30 ans est : $1 : 2{,}427 = 0{,}412$.

4°. — Placements annuels.

On fait n placements d'un franc au commencement de toutes les

années, de la première à la $n^{ième}$; on demande quelle est la somme à toucher à la fin de la $n^{ième}$ année. Elle est évidemment (§ 245) :

$$S = (1+r)^n + (1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) = \frac{1+r}{r}\left[(1+r)^n - 1\right].$$

5°. — Annuités.

On emprunte une somme S, qu'il faut rembourser par des annuités d'un franc payées à la fin de n années en commençant par la fin de la première. Quelle est cette somme?

Le franc versé à la fin de la première année, porte intérêt pendant $n-1$ années ; le franc versé à la fin de la $n^{ième}$ année, ne porte pas intérêt. On a donc :

$$S = (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1 = \frac{1}{r}\left[(1+r)^n - 1\right].$$

Par exemple, supposons le taux 3 % et $n = 20$; il vient :

$$S = 0{,}806 : 0{,}03 = 26{,}87.$$

L'annuité d'un franc produit 26,87 au bout de 20 ans à 3 %.

Si la somme S est donnée, la même formule permettra de calculer l'annuité à payer, puisqu'il y a proportionnalité entre les deux.

6°. — On résoudra avec la même facilité tous les problèmes de rentes, d'amortissement, etc. Les questions qui se posent aux Compagnies d'assurances sur la vie sont analogues, à la différence près que l'âge de la mort, par conséquent du payement de la prime, est incertain ; il ne peut être fixé que d'après une probabilité moyenne. C'est à l'établir dans chaque pays et d'après l'âge actuel de l'assuré, que servent les Tables statistiques de Mortalité.

Les questions de Retraites sont basées sur les mêmes formules. Toutefois, en calculant les annuités à payer, on tient compte du fait que les survivants profitent des morts prématurées (tontine).

247. Fonction continue passant par tous les points de la série.

Une série est donc représentée dans le plan par des points isolés les uns des autres. Par ces points, nous pouvons faire passer une infinité de courbes continues. La courbe la plus naturelle est souvent facile à trouver.

Par exemple, nous savons qu'un franc placé à intérêt composé au taux r, prend au bout de n années la valeur :

$$S = (1+r)^n. \qquad (1)$$

Rien ne nous empêche de considérer n comme variant, non plus par sauts discontinus d'une unité, mais d'une manière continue. Nous définissons ainsi une fonction continue qui coïncide avec la fonction discontinue à la fin de toutes les années.

Son calcul est aisé à l'aide des logarithmes ; on a :

$$\log S = n \log(1+r). \qquad (2)$$

En prenant pour abscisses les nombres n et pour ordonnées les valeurs log S, la courbe (2) est une droite (voir le chapitre XXIV pour l'emploi des papiers à échelle logarithmique).

248. Valeur à la fin de n années de 1 franc placé à intérêt composé : $S = (1 + r)^n$.

ANNÉES n	TAUX DE L'INTÉRÊT 2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.	fr.
1	1,025	1,030	1,035	1,040	1,045	1,050	1,055	1,060
2	1,050	1,060	1,071	1,081	1,092	1,102	1,113	1,123
2	1,076	1,092	1,108	1,124	1,141	1,157	1,174	1,191
4	1,103	1,125	1,147	1,169	1,192	1,215	1,238	1,262
5	1,131	1,159	1,187	1,216	1,246	1,276	1,306	1,338
6	1,159	1,194	1,229	1,265	1,302	1,340	1,378	1,418
7	1,188	1,229	1,272	1,315	1,360	1,407	1,454	1,503
8	1,218	1,266	1,316	1,368	1,422	1,477	1,534	1,593
9	1,248	1,304	1,362	1,423	1,486	1,551	1,619	1,689
10	1,280	1,343	1,410	1,480	1,552	1,628	1,708	1,790
11	1,312	1,384	1,459	1,539	1,622	1,710	1,802	1,898
12	1,344	1,425	1,511	1,601	1,695	1,795	1,901	2,012
13	1,378	1,468	1,563	1,665	1,772	1,885	2,005	2,132
14	1,412	1,512	1,618	1,731	1,851	1,979	2,116	2,260
15	1,448	1,557	1,675	1,800	1,935	2,078	2,232	2,396
16	1,484	1,604	1,733	1,872	2,022	2,182	2,355	2,540
17	1,521	1,652	1,794	1,947	2,113	2,292	2,484	2,692
18	1,559	1,702	1,857	2,025	2,208	2,406	2,621	2,854
19	1,598	1,753	1,922	2,106	2,307	2,526	2,765	3,025
20	1,638	1,806	1,989	2,191	2,411	2,653	2,917	3,207
21	1,679	1,860	2,059	2,278	2,520	2,785	3,078	3,399
22	1,721	1,916	2,131	2,369	2,633	2,925	3,247	3,603
23	1,764	1,973	2,206	2,464	2,752	3,071	3,426	3,819
24	1,808	2,032	2,283	2,563	2,876	3,225	3,614	4,048
25	1,853	2,093	2,363	2,665	3,005	3,386	3,813	4,291
26	1,900	2,156	2,445	2,772	3,140	3,555	4,023	4,549
27	1,947	2,221	2,531	2,883	3,282	3,733	4,244	4,822
28	1,996	2,287	2,620	2,998	3,429	3,920	4,477	5,111
29	2,046	2,356	2,711	3,118	3,584	4,116	4,724	5,418
30	2,097	2,427	2,806	3,243	3,745	4,321	4,983	5,743
31	2,150	2,500	2,905	3,373	3,913	4,538	5,258	6,088
32	2,203	2,575	3,006	3,508	4,089	4,764	5,547	6,453
33	2,258	2,652	3,111	3,648	4,274	5,003	5,852	6,840
34	2,315	2,731	3,220	3,794	4,466	5,253	6,174	7,251

249. Règles de convergence.

Revenons à l'étude générale des séries.

Pour savoir si une série est convergente ou divergente, on en compare les termes à ceux d'une série dont on sait qu'elle est convergente ou divergente. Voici quelques remarques évidentes.

1°. — SÉRIE A TERMES TOUS POSITIFS.

Prenons comme série de comparaison la série convergente :

$$u_0, u_1, \dots u_n, \dots \qquad (1)$$

Soit la série à étudier : $v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$ (2)

Admettons qu'à partir du terme u_p de la série (1) et v_q de la série (2), on ait constamment : $v_q < u_p$, $v_{q+1} < u_{p+1}, \dots$

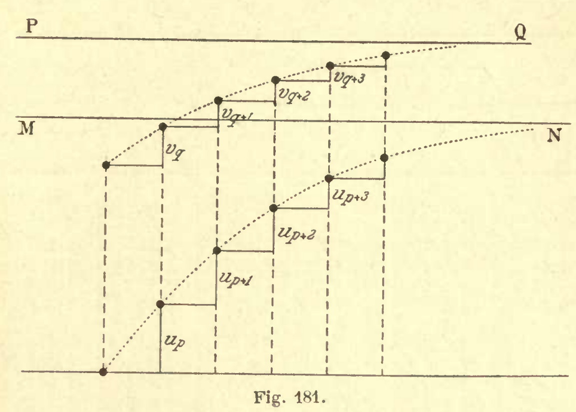


Fig. 181.

Je dis que *la série* (2) *est convergente.*

Faisons glisser les graphiques des deux séries parallèlement à Ox, de manière que les termes correspondants $p, p+1, \dots$; $q, q+1, \dots$ aient les mêmes abscisses (fig. 181). Il est évident que la *pente* de la série v étant toujours plus petite que la pente de la série u, si u tend vers une limite MN, v tendra également vers une limite PQ.

2°. — Il n'est pas moins évident que si la série u est *divergente* et si, à partir des termes u_p et v_q, on a toujours :

$$v_q > u_p, \qquad v_{q+1} > u_{p+1}, \dots$$

la série v sera elle-même divergente. Ramenons deux termes correspondants à la même abscisse. La pente de la série v est supérieure à la pente de la série u; si u diverge, v diverge *a fortiori.*

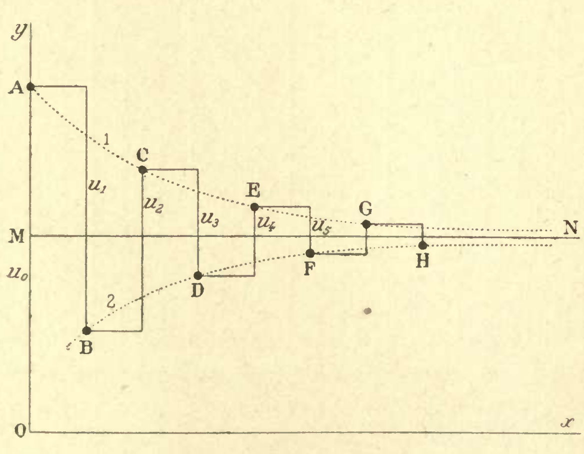


Fig. 182.

3°. — SÉRIE A TERMES ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS.

Pour que les séries soient convergentes, il suffit que les termes décroissent et tendent vers zéro. C'est ce que la figure 182 rend évident.

Puisque u_1 est négatif, B est au-dessous de A ; puisque u_2 est

positif, mais plus petit en valeur absolue que u_1, C est au-dessus de B, *mais au-dessous de* A. De même, puisque u_3 est négatif, mais plus petit en valeur absolue que u_2, D est au-dessous de C, *mais au-dessus de* B. Ainsi de suite. Donc les points figuratifs de la série se rangent sur deux courbes 1 et 2 : la courbe 1 est toujours au-dessus de 2 ; la courbe 1 s'abaisse constamment, la courbe 2 s'élève constamment ; elles tendent donc vers une limite commune MN dont l'ordonnée est la somme de la série.

On remarquera que les deux séries :

$$u_0, u_2, \ldots, u_{2n}, \ldots ; \qquad u_1, u_3, \ldots, u_{2n+1}, \ldots$$

peuvent être séparément divergentes ; car de ce que les termes décroissent en valeur absolue et tendent vers 0, il ne résulte pas que la série soit convergente. Autrement dit, de ce que la pente d'une courbe diminue, il ne résulte pas qu'elle ait une asymptote horizontale ; exemple, la parabole $y^2 = 2px$, dont la pente :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \sqrt{\frac{p}{2x}},$$

diminue constamment quand x croît.

D'où le corollaire : tandis qu'on peut intervertir à son gré les termes d'une série convergente à termes tous positifs, il n'est généralement pas permis de le faire pour des séries convergentes à termes alternativement positifs et négatifs. Il faut les prendre dans l'ordre pour lequel la convergence a été établie.

4°. — Série dont les termes sont de signes différents.

Lorsqu'une série à termes tous positifs est convergente, on peut changer les signes d'un nombre quelconque de termes arbitrairement choisis, sans que la convergence cesse d'exister.

Reprenons la figure 180. Il est d'abord évident que la série ne deviendra pas divergente ; car la limite de ce qu'on peut obtenir en changeant tous les signes, est de changer le signe de la somme. Donc en prenant les n premiers termes et changeant les signes arbitrairement, on aboutit à un point P du plan certainement compris entre la droite MN et la droite M'N' (non représentée), dont l'ordonnée est égale et de signe contraire à OM.

Reste à savoir si la série est *indéterminée*. Elle ne l'est pas, parce qu'en prenant n assez grand, la somme de tous les termes *pris positivement* constituant la fin de la série, est aussi petite qu'on veut : c'est en cela que consiste la convergence. Changer arbitrairement les signes ne peut que diminuer la valeur absolue de cette somme. Donc la série tend vers une limite bien déterminée.

250. Emploi de la progression géométrique comme série convergente de comparaison.

Il est bien évident d'abord que la somme d'un nombre quelconque

n de termes *finis* est finie ; nous n'avons donc à nous préoccuper de la convergence qu'à partir du $n+1^{ième}$ terme, n étant aussi grand que nous voulons, mais restant fini. Comparons les deux séries :

$$b^n, \quad b^{n+1}, \quad b^{n+2}, \ldots \qquad (1)$$

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \ldots \qquad (2)$$

Si $b < 1$, nous savons que la première est convergente. Écrivons que les termes de (2) sont respectivement plus petits que les termes de (1). Nous le pouvons de deux manières équivalentes.

1° Poser : $u_p < b^p$, c'est poser : $\sqrt[p]{u_p} < b$.

Donc lorsqu'à partir d'un certain rang la racine $p^{ième}$ du terme de rang p est constamment égale ou inférieure à un nombre $b < 1$, la série est convergente.

2°. — Soit $u_n < b^n$. Nous voulons qu'on ait aussi :

$$u_{n+1} < b^{n+1}.$$

La condition est évidemment réalisée si :

$$u_{n+1} = u_n \cdot b, \qquad \textit{a fortiori} \text{ si : } \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < b.$$

Et ainsi de suite.

Donc lorsqu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent est constamment égal ou. inférieur à un nombre $b < 1$, la série est convergente.

Remarque.

Il arrive souvent que les quantités : $u_{n+1} : u_n$, $\sqrt[n]{u_n}$, tendent vers une limite bien déterminée quand n croît indéfiniment.

On déterminera cette limite.

Si elle est inférieure à 1, la série est convergente.

Si elle est supérieure à 1, la série est divergente ; car sa pente est plus grande que celle d'une progression géométrique de raison $b > 1$, progression sûrement divergente.

Si elle est égale à 1, la comparaison avec la progression géométrique laisse la convergence incertaine ; il faut procéder autrement.

251. Exemples.

1°. — La série : $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots,$

est convergente *pour toute valeur de* x.

Prenons en effet le rapport de deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^n}{n!} : \frac{x^{n-1}}{n-1\,!} = \frac{x}{n}.$$

Il a pour limite 0, *quel que soit* x, quand n augmente indéfiniment. *Donc la série est convergente quel que soit* x.

Pour $x < 1$, les termes de la série diminuent dès le début. Pour

$x > 1$, ils commencent par croître ; ils passent par un maximum, puis décroissent. La figure 183 donne en I, et à l'échelle de droite, la valeur de la série pour $x = 5$, quand on prend $1, 2, \dots n$ termes.

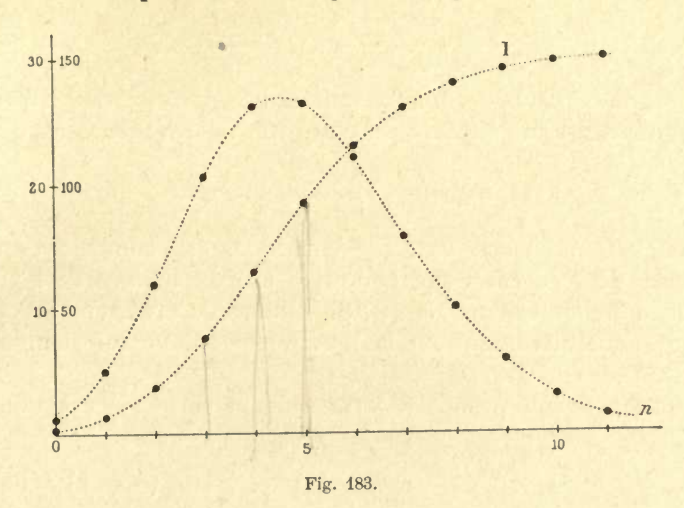


Fig. 183.

Elle donne en II, et à l'échelle de gauche, la valeur des termes successifs de la série.

Comme nous le verrons (§ 256), la série représente e^x.

Sa valeur exacte pour $x = 5$, est 148,4.

2°. — La série : $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots,$

est convergente pour $x < 1$, divergente pour $x \geq 1$.

On a en effet : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1} x.$

La limite de ce rapport est x quand n croît indéfiniment. Donc pour que la série soit convergente, on doit avoir $x < 1$. Nous verrons (§ 252) que la série est divergente pour $x = 1$, et *a fortiori* pour $x > 1$.

252. Emploi d'une fonction continue comme génératrice de la série de comparaison.

Soit une fonction continue $y = f(x)$. Calculons la valeur de y pour $x = 1, 2, 3, \dots n\dots$ Nous obtenons des ordonnées $y_0, y_1, \dots y_{n+1}$. Nous pouvons considérer les différences de ces ordonnées $u_0 = y_1 - y_0$, $u_1 = y_2 - y_1, \dots$ comme les termes d'une série que nous savons convergente ou divergente. Il suffit de voir si $f(\infty)$ a une valeur finie ou non.

La série u peut nous servir de série de comparaison.

Pratiquement il n'est pas nécessaire de calculer exactement les

termes u_0, u_1, ... : il nous suffit d'en avoir une évaluation par excès ou par défaut, suivant les cas. Voici deux exemples simples.

1°. — Nous voulons montrer que la série :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots \tag{1}$$

est divergente. Considérons la fonction : $y=\log x$. Elle devient infinie quand x croît au delà de toute limite. D'ailleurs on a :

$$\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}. \tag{2}$$

En effet : $d\log x=dx : x$. Quand x est compris entre n et $n+1$, la dérivée est donc comprise entre $1 : n$ et $1 : (n+1)$; elle est donc inférieure à $1 : n$. Pour l'accroissement 1 de la variable, l'accroissement de la fonction est donc inférieur à $1 : n$. C. Q. F. D.

La somme des n premiers termes de la série (1) est donc supérieure à :

$$(\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+\dots+[\log(n+1)-\log n]$$
$$=\log n-\log 1=\log n.$$

Donc la série (1) est divergente.

Il est remarquable que les points figuratifs de la série (1) tendent à se mettre exactement sur la courbe :

$$y=0{,}576+\log(x+0{,}5). \tag{3}$$

Ainsi :

$$\sum_1^5\frac{1}{n}=2{,}283,\qquad \log 5{,}5=1{,}705;\qquad 2{,}283-1{,}705=0{,}578,$$

$$\sum_1^{50}\frac{1}{n}=4{,}498,\qquad \log 50{,}5=3{,}922;\qquad 4{,}498-3{,}922=0{,}576.$$

2°. — Nous voulons montrer que la série :

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots\qquad+\frac{1}{n^\alpha}+\dots \tag{4}$$

est convergente si $\alpha>1$. Considérons la fonction :

$$y=\left[S-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]. \tag{5}$$

Les points figuratifs des sommes partielles successives de la série (4) finissent par se mettre sur la courbe (5), où la quantité S est une certaine fonction de α à déterminer. En effet, la dérivée de (5) est :
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^\alpha}.$$

La différence finie Δy pour $\Delta x=(n+1)-n$, est donc aussi

voisine que nous voulons de l'accroissement de la série (4) quand nous passons de n à $n+1$ termes : il suffit de prendre n assez grand. La courbe *discontinue* (4) et la courbe *continue* (5) tendent donc asymptotiquement l'une vers l'autre. Or, si α est >1, la fonction (5) tend vers la valeur S pour $x=\infty$. Donc la série (4) est convergente.

Voici les valeurs Σ des séries (4) pour diverses valeurs entières de α.

α	Σ	α	Σ	α	Σ
2	1,64493	6	1,01734	10	1,00099
3	1,20206	7	1,00835	11	1,00049
4	1,08232	8	1,00408	12	1,00025
5	1,03693	9	1,00201	13	1,00012.

253. Séries formées de quantités complexes.

Pour fixer les idées du lecteur et généraliser la notion de série, nous dirons quelques mots des séries formées de quantités complexes :

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

Les termes sont de la forme :

$$u_n=\rho_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n).$$

On obtient un polygone ouvert OABCDE (fig. 184).

La série est convergente si l'extrémité de ce polygone tend vers un point limite P *à distance finie, quand on augmente indéfiniment le nombre de ses côtés.*

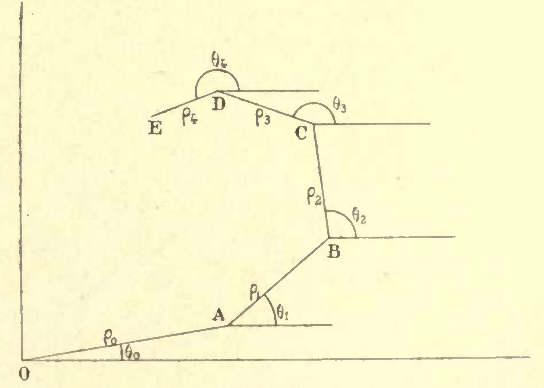


Fig. 184.

Deux cas sont à considérer.

Déroulons le polygone spiraliforme construit jusqu'au point limite, et mesurons sa longueur (somme des modules des vecteurs). Si cette longueur est finie, cela signifie que la série formée par les modules (tous positifs, § 222) est elle-même convergente. La série est dite *absolument convergente.*

Si cette longueur dépasse toute quantité donnée, la série formée par les modules n'est pas convergente. On dit que la série (1) convergente est *semi-convergente.* Nous verrons plus loin que ce terme est souvent pris dans une acception différente (§ 262).

Comme cas particulier, nous retrouvons les séries dont tous les

termes sont positifs, et les séries dont les termes sont tantôt positifs, tantôt négatifs. Ainsi la série :

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

qui est convergente (§ 249, *3°*), est *semi-convergente,* puisque la série des modules de ses termes :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

est divergente (§ 252, *1°*).

Si la série est *absolument convergente,* on peut changer arbitrairement l'ordre des termes sans modifier la position du point limite; si elle est *semi-convergente,* l'interversion peut donner à ce point une infinité de positions différentes (§ 249).

Développements suivant les puissances de la variable.

254. Développement en série. Formule de Taylor.

1°. — Montrons d'abord que toute fonction *entière* de $x+h$ (§ 36), $f(x+h)$, peut être mise sous la forme :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\dots; \qquad (1)$$

f', f'', ... sont les dérivées successives de $f(x)$ par rapport à x. Le nombre des termes du développement est fini, car la dérivée $m+1^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré m est nulle.

Il suffit de prouver le théorème pour la fonction $A(x+h)^m$, la dérivée d'une somme étant la somme des dérivées. Il suffit même d'étudier $(x+h)^m$; on multipliera ensuite tous les termes par A.

On a, d'après la formule du binôme (§ 12) :

$$f(x+h)=(x+h)^m=x^m+\frac{m}{1}hx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}h^2x^{m-2}+\dots \qquad (2)$$

Or : $f(x)=x^m$, $\quad f'(x)=mx^{m-1}$, $\quad f''(x)=m(m-1)x^{m-2}+\dots$

Substituant dans (2), on retrouve (1). C. Q. F. D.

2°. — Quelle que soit la fonction $f(x+h)$, nous pouvons toujours poser :

$$f(x+h)=A_0+A_1h+A_2h^2+\dots+A_nh^n+R(x,h), \qquad (3)$$

où A_0, A_1, ... A_n sont des fonctions *arbitrairement choisies* de x, où $R(x,h)$ est une fonction de x et de h *à déterminer.*

En effet, *le reste* R étant d'abord indéterminé, nous pourrons toujours le choisir de manière à transformer (3) en une identité.

L'intéressant n'est donc pas de développer $f(x+h)$ *suivant les*

puissances de h; c'est de trouver pour les fonctions $A_0(x)$, $A_1(x)$, ... $A_n(x)$, *des formes telles que le reste* R *ait une expression aisément calculable.*

Nous sommes naturellement conduits à essayer pour les fonctions A les formes qui réussissent parfaitement bien pour les fonctions entières (puisqu'elles annulent le *reste* R, à la seule condition de prendre un nombre de termes égal au degré augmenté d'une unité). Nous écrirons donc avec Taylor :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^n(x)+\mathrm{R}, \quad (4)$$

$$n! = \textit{factorielle } n = 1 \,.\, 2 \dots n.$$

Nous pouvons toujours poser l'identité (4) sans contradiction, *puisque* R *est encore à déterminer.* Mais le développement n'a d'intérêt : d'abord, que si nous parvenons à trouver la forme du reste; ensuite, que si la valeur du reste est négligeable à la seule condition de prendre un nombre convenable de termes.

REMARQUE.

Les développements en série servent à deux fins qu'il faut soigneusement distinguer.

Ou bien nous voulons obtenir une série *infinie* qui soit *équivalente* à la fonction donnée, dans un intervalle déterminé pour la variable. Il est clair qu'alors la série doit être convergente.

Ou bien nous nous proposons seulement de calculer numériquement une fonction donnée. *Or on ne calcule pas des séries infinies; on se borne nécessairement à un petit nombre de termes.* Il devient alors indifférent que la série *indéfiniment prolongée suivant la même loi* soit convergente ou non. Il suffit que le reste devienne suffisamment petit, quand on prend un nombre *convenable* de termes (par *convenable*, il ne faut pas nécessairement entendre *grand*).

On verra, par exemple (§ 262), qu'il est possible de calculer certaines fonctions au moyen de séries qui non seulement sont divergentes, mais dont les termes, d'abord décroissants, passent par un minimum pour un certain rang, *et croissent ensuite indéfiniment.* Naturellement il en est de même pour le reste. Si ce reste est facile à évaluer et passe par un minimum suffisamment petit, la série est parfaitement utilisable.

255. Restes des formules de Taylor et de Maclaurin.

1°. — Considérons la fonction de z :

$$\varphi(z)=f(x+h)-f(z)-\frac{(x+h-z)}{1!}f'(z)-\dots\dots$$

$$-\frac{(x+h-z)^n}{n!}f^n(z)-(x+h-z)^{k+1}\mathrm{S}. \quad (1)$$

$\varphi(z)$ s'annule identiquement pour $z = x + h$; $\varphi(x+h) = 0$. Nous voulons trouver une quantité S indépendante de z, et telle qu'on ait également $\varphi(x) = 0$.

D'après le § 155 : $\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x+\theta h)$, $0 < \theta < 1$.

Puisque nous avons *par hypothèse :*

$$\varphi(x+h) = 0, \qquad \varphi(x) = 0,$$

il existe une valeur de z intermédiaire entre x et $x+h$ pour laquelle $\varphi'(z) = \varphi'(x+\theta h) = 0$. Écrivons qu'il en est ainsi. Or :

$$\varphi'(z) = -f'(z) + f'(z) - (x+h-z)f''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{(x+h-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z) - \frac{(x+h-z)^n}{n!} f^{n+1}(z) + (k+1)(x+h-z)^k \mathrm{S}.$$

Tous les termes du second membre disparaissent, sauf les deux derniers. D'où les conditions corrélatives :

$$\varphi'(x+\theta h) = 0, \qquad \mathrm{S} = \frac{h^{n-k}(1-\theta)^{n-k}}{n!\,(k+1)} f^{n+1}(x+\theta h).$$

Si θ est convenablement choisi entre 0 et 1, on a : $\varphi(x) = 0$.

Faisons donc $z = x$, dans la formule (1); substituons à S sa valeur; enfin posons $\varphi(x) = 0$. Il reste la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + \mathrm{R}; \qquad (2)$$

$$\mathrm{R} = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-k}}{n!\,(k+1)} f^{n+1}(x+\theta h). \qquad (3)$$

L'exposant k est arbitraire; à chaque valeur de k correspond une valeur particulière de θ.

On utilise principalement deux formes du reste.

2°. — Reste de Lagrange. Posons $k = n$:

$$\mathrm{R} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x+\theta h).$$

3°. — Reste de Cauchy. Posons $k = 0$:

$$\mathrm{R} = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{n+1}(x+\theta h).$$

4°. — Formule de Maclaurin.

Faisons $x = 0$, dans la formule (2) qui est une identité pour toute valeur de x et de h; remplaçons h par x. Nous obtenons :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \mathrm{R};$$

$$\mathrm{R} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x), \qquad \mathrm{R} = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{n+1}(\theta x).$$

256. Développements du logarithme et de l'exponentielle.

1°. — Soit à développer e^x en série. On a (§ 197) :

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x;$$

par suite, toutes les dérivées $f^n(0)$ sont égales à l'unité. D'où :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}. \qquad (1)$$

Or $e^{\theta x}$ est essentiellement fini. En vertu du § 251, le reste s'annule donc quand n croît indéfiniment, *quel que soit x*. Par suite, on peut considérer la série *indéfiniment prolongée* comme représentant e^x; elle est convergente quel que soit x (§ 251).

Si on utilise un nombre fini de termes, on commet une erreur égale au reste, et dont il est facile d'évaluer une limite supérieure.

Généralisons; on a : $\log a^x = x \log a$, $a^x = e^{x \log a}$.

Pour développer a^x, on remplacera donc dans la formule (1) x par $x \log a$, et $e^{\theta x}$ par $a^{\theta x}$.

2°. — Soit à développer $\log(1+x)$.

On a : $f^n(x) = \pm 1 \, . \, 2 \dots (n-1)(1+x)^{-n}$,

$$f^{n+1}(\theta x) = \mp 1 \, . \, 2 \dots (n-1)n(1+\theta x)^{-n-1}.$$

D'où :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}. \qquad (2)$$

La série indéfiniment prolongée est divergente pour $x > 1$. Nous sommes par conséquent assurés qu'indéfiniment prolongée, elle ne représentera pas $\log(1+x)$. Non seulement elle est divergente, mais pour peu que x soit grand, les termes croissent immédiatement; nous ne pourrons donc pas davantage nous en servir pour calculer $\log(1+x)$, en la limitant à un nombre fini de termes.

Pour $x < 1$, la série indéfiniment prolongée est convergente et représente $\log(1+x)$. Pour le montrer, il suffit de prouver que le reste diminue au delà de toute limite, quand n augmente indéfiniment.

En effet, l'égalité (2) est une identité pour une valeur convenable de θ; $\log(1+x)$ est certainement fini. Si donc le reste diminue indéfiniment, la série est convergente et représente $\log(1+x)$.

Il en est évidemment ainsi quand x est positif, puisque :

$$x : (1+\theta x) < 1.$$

On élève donc à une puissance indéfiniment croissante un nombre inférieur à l'unité; de plus, ce qui accroît la rapidité de la décroissance, on divise le résultat par le nombre $n+1$ qui croît indéfiniment.

Si x est négatif, utilisons la seconde forme du reste :

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}(\theta x) = x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} = \left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n \frac{x}{1+\theta x}.$$

Posons $x = -y$; $\quad x - \theta x = -(y - \theta y)$, $\quad 1 + \theta x = 1 - \theta y$.

On a : $y - \theta y < 1 - \theta y$, puisque y est positif et < 1. Donc le reste contient en facteur une puissance indéfiniment croissante d'un nombre dont la valeur absolue est inférieure à l'unité : il tend vers 0 quand n croît indéfiniment.

En résumé, pour toute valeur de x dont la valeur absolue est inférieure à 1, nous pouvons écrire :

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Remarquons que pour $x < 0$, tous les termes de la série sont négatifs.

Pour fixer les idées sur le degré de convergence de la série, calculons $\log(1{,}5)$ et $\log(0{,}5)$; donnons à x la valeur $\pm 1 : 2$. On trouve immédiatement (à l'aide d'une table des inverses) pour valeurs absolues des termes successifs (multipliés par 10^4) :

5000, 1250, 417, 156, 63, 26, 11, ...

D'où : $\log(0{,}5) = -0{,}6923$, $\quad \log(1{,}5) = 0{,}4059$.

La table du § 194 donne $\log(0{,}5) = -\log 2 = -0{,}6931$.

Une table de logarithmes vulgaires donne :

$\mathrm{Log}(1{,}5) = 0{,}1761$; $\quad$ d'où : $\log(1{,}5) = 0{,}1761 \times 2{,}3026 = 0{,}4055$.

Naturellement la convergence est d'autant moins rapide que la valeur absolue de x s'approche davantage de 1. Pour $x = 1$, on a :

$$\log 2 = 1 - 0{,}5000 + 0{,}3333, - 0{,}2500, + 0{,}2000 - 0{,}1667 + \ldots.$$

La série converge (§ 249, *3°*), mais très lentement.

257. Développements du sinus et du cosinus.

1°. — Soit d'abord $\sin x$ à développer.

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f'(0) = 0;$$

et ainsi de suite. Prenons n pair; on a :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta x).$$

Le reste est donc toujours inférieur à $x^{n+1} : (n+1)!$.

La série indéfiniment prolongée est convergente *quel que soit x*.

Soit, par exemple, $x = 2$. On trouvera pour les termes successifs de la série :

$$2{,}000 - 1{,}333 + 0{,}267 - 0{,}025 + 0{,}002 - \ldots = 0{,}911.$$

Or l'arc 2 correspond à peu près à $114°\,30'$ dont le sinus est le même que celui de $65°\,30'$. Les tables donnent 0,910.

Cet exemple montre à quel point la série est convergente; il est clair que, pour calculer des sinus, on ne s'avisera pas de prendre des arcs supérieurs à $\pi : 2$.

2°. — Soit $\cos x$ à développer.

$$f'(x) = -\sin x, \qquad f'(0) = 0;$$
$$f''(x) = -\cos x, \qquad f''(0) = -1;$$

et ainsi de suite. Prenons n impair; on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} \cos(\theta x).$$

La série indéfiniment prolongée est convergente quel que soit x.

3°. — Appliquons à e^{ix} le développement précédemment démontré pour e^x (§ 256). On trouve (§ 253) :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1\,!} - \frac{x^2}{2\,!} - \frac{ix^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{ix^5}{5\,!} - \ldots$$

que nous pouvons écrire :

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots + i\left(\frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots\right),$$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

C'est la formule de laquelle nous sommes partis pour définir e^{ix}.

258. Généralisation de la formule de binôme.

Soit à développer $(1+x)^p$, où p n'est plus nécessairement entier.

$$f(x) = (1+x)^p, \qquad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}, \qquad f'(0) = p;$$
$$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \qquad f''(0) = p(p-1);$$

et ainsi de suite. D'où :

$$(1+x)^p = 1 + \frac{px}{1} + \frac{p(p-1)}{2\,!} x^2 + \ldots + \mathrm{R},$$

$$\mathrm{R} = (1-\theta)^n \frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{n\,!} (1+\theta x)^{p-n-1} x^{n+1}.$$

Nous retrouvons donc la formule du binôme avec un reste. Celui-ci a une valeur qui tend vers 0 quand n croît indéfiniment, *pourvu que x soit compris entre -1 et $+1$.*

En effet, le reste peut se décomposer en trois facteurs :

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n, \qquad (1+\theta x)^{p-1}, \qquad \frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{n\,!} x^{n+1}.$$

Puisque θ est compris entre 0 et 1, et que x est compris entre -1 et $+1$, le premier facteur est certainement infiniment petit pour n infiniment grand. Il resterait fini et égal à l'unité pour $x=-1$. Le second facteur est fini. Il faut donc prouver que le troisième est infiniment petit pour n infiniment grand. En effet, pour passer de sa valeur pour n termes à sa valeur pour $n+1$ termes, on doit le multiplier par :

$$[p-(n+1)]\,x:(n+1),$$

quantité qui pour n très grand tend vers $-x$, c'est-à-dire est comprise entre -1 et $+1$. Le produit d'un nombre de plus en plus grand de facteurs qui (au moins à partir d'un certain rang fini) sont tous inférieurs à l'unité en valeur absolue, tend évidemment vers 0.

259. Développements usuels.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}-\ldots$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}+\frac{35x^4}{243}-\ldots$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$$\operatorname{arc\,sin} x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\ldots$$

Formules d'approximation.

260. Formules d'approximation.

1°. — Nous avons déjà fait observer que les développements en série servent à deux fins : 1° obtenir une fonction équivalente à une fonction donnée; 2° faire plus aisément des calculs approchés. Dans

le premier cas, nous devons nous inquiéter de la convergence de la série *indéfiniment continuée*. Dans le second cas, elle nous est parfaitement indifférente, *puisqu'on ne calcule pas une série infinie;* il suffit que nous puissions estimer la valeur du reste.

Voici des exemples pour fixer les idées.

2°. — Il est évident qu'on a pour x positif et petit :

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \qquad \frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2} : \cos\frac{x}{2}.$$

Par suite : $x\cos^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \qquad x\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) < \sin x.$

$$x - \sin x < x\sin^2\frac{x}{2}, \qquad x - \sin x < \frac{x^3}{4},$$

puisque le sinus d'un arc est plus petit que cet arc.

En définitive, nous avons les inégalités :

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x.$$

Nous pouvons donc remplacer $\sin x$ par x avec une approximation que nous savons évaluer.

La connaissance du développement convergent (§ 257) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots$$

est précieuse, puisqu'elle nous fournit, outre une estimation plus précise de l'erreur ($x^3 : 6$ au lieu de $x^3 : 4$), une approximation indéfinie grâce à un plus grand nombre de termes; mais elle n'est pas nécessaire.

3°. — On a : $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2},$

d'où : $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$

Voici donc $\cos x$ déjà compris entre les limites 1 et $1 - x^2 : 2$. On peut aller plus loin. Remplaçons $\sin(x : 2)$ par la valeur sûrement trop petite déterminée ci-dessus. On a :

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}\right)^2, \qquad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{2x^6}{32^2},$$

et *a fortiori :* $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$

Nous renfermons donc $\cos x$ dans les limites :

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Le développement convergent (§ 257) :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots,$$

fournit une estimation plus précise de l'erreur.

4°. — La formule du binôme donne :

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots,$$

et par suite : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

Elle n'est cependant pas nécessaire pour savoir que poser :

$1 : (1+x) = 1 - x,$ c'est écrire : $x^2 = 0;$

$1 : (1+x) = 1 - x + x^2,$ c'est écrire : $x^3 = 0;$

et ainsi de suite.

5°. — Soit une fonction quelconque $f(x, y, z)$ dont nous voulons calculer les valeurs autour du système x, y, z; par exemple, pour le système $x+h, \; y+k, \; z+g$. Sans qu'il soit nécessaire d'aucun raisonnement supplémentaire, nous avons approximativement :

$$f(x+h, y+k, z+g) = f(x, y, z) + h\frac{\partial f}{\partial z} + k\frac{\partial f}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial z},$$

en vertu de la définition même de la dérivée et pourvu que la fonction $f(x, y, z)$ n'ait pas de propriétés particulières au voisinage du système x, y, z. Notre but est ici non pas de construire une fonction équivalente à la fonction $f(x, y, z)$, mais de calculer des valeurs approchées. Elles le seront d'autant plus que h, k, g, seront plus petits.

6°. — On conçoit maintenant l'usage, pour le calcul des fonctions, de séries qui *indéfiniment prolongées* seraient divergentes, dont les termes pourraient même croître indéfiniment.

261. Résolution de l'équation du second degré par approximations successives.

1°. — Supposons très petit le coefficient a de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

La résoudre, c'est déterminer les points d'intersection avec l'axe des x de la parabole :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Vu la petitesse du coefficient a, cette parabole *à distance finie* se confond presque avec la droite :

$$y = bx + c.$$

Il existe donc une racine réelle voisine de $x = -c : b$.

Il en existe une autre très grande voisine de $-b : a$. En effet, pour les grandes valeurs de x, les deux premiers termes ax^2+bx l'emportent beaucoup sur le troisième.

Cherchons une valeur plus approchée de la première racine.

Remplaçons x^2 par $-c : b$ dans le terme petit. On a :

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}.$$

On obtient une valeur encore plus approchée, en remplaçant x^2 par cette nouvelle valeur.

Négligeant le terme en a^3, on trouve :

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}.$$

2°. — On obtient autrement le même résultat.

Résolvons l'équation (1) :

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b}{2a}\left(-1+\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right).$$

Nous ne gardons que la racine relativement petite. Développons le radical par la formule du binôme (§ 258) :

$$\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{2ac}{b^2}-\frac{2a^2c^2}{b^4}-\frac{4a^3c^3}{b^6},$$

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}.$$

3°. — Comme application, traitons le problème classique du puits. On laisse tomber un caillou au temps 0 ; on détermine le temps t auquel on entend le bruit de la chute. On demande la profondeur du puits. Appelons g l'accélération de la pesanteur, V la vitesse du son. La profondeur h est donnée par l'équation :

$$t=\frac{h}{V}+\sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad h=\frac{g}{2}\left(t-\frac{h}{V}\right)^2. \qquad (1)$$

Comme V est grand relativement à la vitesse de chute, on a comme première approximation $h=gt^2 : 2$. Substituons cette valeur dans le second membre de la relation exacte ; il vient :

$$h=\frac{g}{2}\left(t-\frac{h}{V}\right)^2=\frac{gt^2}{2}-\frac{g^2t^3}{2V}.$$

On trouve le même résultat en développant la solution exacte :

$$h=Vt+\frac{V^2}{g}\pm\sqrt{\frac{2V^3t}{g}+\frac{V^4}{g^2}}.$$

Remarque.

La première méthode présente l'avantage de donner une solution *unique*. Quand on part de la première équation (1) et qu'on chasse

le radical, on introduit *ipso facto* une solution *fausse,* puisque le résultat serait le même pour l'équation :

$$t = \frac{h}{V} - \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

qui n'a pas de signification physique. La remarque s'applique chaque fois qu'on est amené à chasser des radicaux. On ne retrouve évidemment jamais dans les résultats que ce qu'on a mis dans les équations; mais il faut avoir soin de ne rien ajouter en cours de route, car on le retrouve à la fin.

262. Calculs approchés au moyen de séries qui indéfiniment prolongées sont divergentes.

Voici un intéressant exemple du calcul des intégrales de Fresnel.

Une intégration par parties donne les formules :

$$(2n-1)\int \frac{dv}{v^{4n-4}} \cos\frac{\pi}{2}v^2 = \frac{1}{\pi v^{4n-3}} \sin\frac{\pi}{2}v^2 + \frac{4n-3}{\pi}\int \frac{dv}{v^{4n-2}} \sin\frac{\pi}{2}v^2,$$

$$\int \frac{dv}{v^{4n-2}} \sin\frac{\pi}{2}v^2 = -\frac{1}{\pi v^{4n-1}} \cos\frac{\pi}{2}v^2 - \frac{4n-1}{\pi}\int \frac{dv}{v^{4n}} \cos\frac{\pi}{2}v^2.$$

Ceci posé, on obtiendra de proche en proche :

$$\int dv \cos\frac{\pi}{2}v^2 = \sin\frac{\pi}{2}v^2 \left[\frac{1}{\pi v} - \frac{1\,.\,3}{\pi^3 v^5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{\pi^5 v^9} - \dots\right]$$

$$+ \cos\frac{\pi}{2}v^2 \left[-\frac{1}{\pi^2 v^3} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{\pi^4 v^7} - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{\pi^6 v^{11}} + \dots\right]$$

$$\pm \frac{1\,.\,3\,.\,5 \dots (4n-3)(4n-1)}{\pi^{2n}} \int \frac{dv}{v^{4n}} \cos\frac{\pi}{2}v^2.$$

On vérifie que, pour des valeurs assez grandes de v, les termes des séries vont d'abord en décroissant, passent par un minimum, puis croissent à nouveau. En effet, les termes généraux sont de la forme :

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5 \dots (4n-1)}{\pi^{2n+1}\, v^{4n+1}}, \qquad \frac{1\,.\,3\,.\,5 \dots (4n+1)}{\pi^{2n+2}\, v^{4n+3}}.$$

Les rapports de deux termes consécutifs sont donc de la forme :

$$(4n \pm 1) : \pi^2 v^4.$$

Quelle que soit la valeur de $\pi^2 v^4$, ils finissent par devenir supérieurs à l'unité quand n croît. Si $\pi^2 v^4$ est assez petit, les termes croissent à partir du premier.

Les séries sont donc certainement divergentes.

Mais cela n'a aucune importance : il s'agit en effet, non pas de représenter l'intégrale G de Fresnel par une série, mais bien d'en calculer la valeur. Ayant l'expression exacte du reste, nous savons ce que nous négligeons. Nous n'avons même pas besoin de connaître la valeur

exacte de l'intégrale contenue dans ce reste. Nous en avons une limite supérieure : $\displaystyle\int \frac{dv}{v^{4n}}$.

Si v est assez grand, on obtient une excellente approximation en prenant les deux premiers termes de chaque série.

On trouve les mêmes séries pour calculer $\displaystyle\int dv \sin\frac{\pi}{2}v^2$.

Dans le calcul des phénomènes de diffraction, il est avantageux de mettre les intégrales de Fresnel sous la forme :

$$G = \int_0 \cos\frac{\pi}{2}v^2 \,.\, dv = \frac{1}{2} + M\sin\frac{\pi}{2}v^2 - N\cos\frac{\pi}{2}v^2,$$

$$F = \int_0 \sin\frac{\pi}{2}v^2 \,.\, dv = \frac{1}{2} - M\cos\frac{\pi}{2}v^2 - N\sin\frac{\pi}{2}v^2.$$

Ces fonctions M et N sont fournies par les séries précédentes, *quand le terme minimum est assez petit.* On connaît des séries convergentes qui les représentent; mais elles sont moins commodes que les séries divergentes ici données. Une table des fonctions M et N se trouve à la fin du tome IV de notre Cours de Physique.

263. Méthode des moindres carrés.

1°. — Il s'agit de représenter au mieux les résultats d'une série d'expériences au moyen d'une courbe *dont on se donne arbitrairement la forme :*

$$y = f(x, A, B, C, \ldots),$$

et qui contient m constantes arbitraires, A, B, ... On demande de choisir *au mieux* ces constantes. Les expériences, effectuées pour les valeurs x_0, x_1, x_2, ... de la variable, ont fourni des points A, B, C, ... (fig. 185) ou, ce qui revient au même, des nombres y'_0, y'_1, y'_2, ...

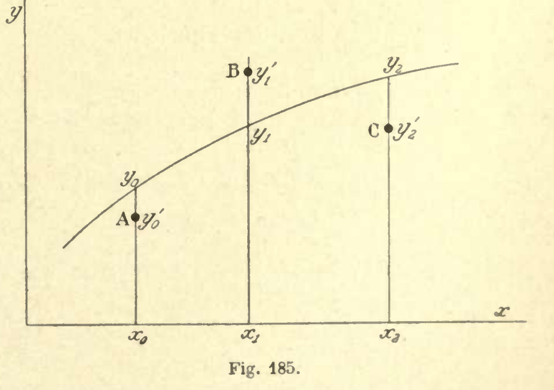


Fig. 185.

On demande donc de faire passer au voisinage de ces points une courbe telle que *les erreurs :*

$$\varepsilon_0 = y_0 - y'_0, \qquad \varepsilon_1 = y_1 - y'_1, \qquad \varepsilon_2 = y_2 - y'_2, \cdots$$

satisfassent à une condition donnée à l'avance.

Le nombre p des points A, B, C, ... fournis par l'expérience étant très supérieur *par hypothèse* au nombre m des constantes A, B, C, ... (la similitude des notations pour les points et pour les constantes est purement fortuite), la courbe $y = f(x)$ ne passe pas exactement par tous les points.

D'où la nécessité de choisir une condition pour les erreurs qui permette à la courbe de rester hors des points et cependant d'être déterminée.

On impose ordinairement comme condition, justifiée seulement par la simplicité de son expression mathématique, que la somme des carrés $\sum \varepsilon^2$ *soit minimum.* Le défaut de cette méthode (dite *méthode des moindres carrés*) est d'exagérer l'influence des erreurs grossières et des expériences particulièrement mauvaises qu'il serait souvent plus prudent d'éliminer. Peu importe pour nous, qui n'envisageons la question que du point de vue des calculs à effectuer.

2°. — Montrons qu'il est facile de calculer les valeurs *exactes* des paramètres A, B, C, ... qui satisfont à la condition imposée, pourvu qu'on en connaisse des valeurs *approchées* $a, b, c, \ldots$ Dans la pratique, on calcule ces valeurs approchées par tâtonnements, en se laissant guider par des analogies ou des hypothèses.

Posons : $\quad A = a + \alpha, \qquad B = b + \beta, \qquad C = c + \gamma, \ldots$

Nous pouvons écrire en vertu de l'hypothèse que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des quantités petites (§ 260, *5°*) :

$$f(x, A, B, C, \ldots) = f(x, a, b, c, \ldots) + \alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} + \gamma \frac{\partial f}{\partial c} + \ldots$$

Posons pour simplifier l'écriture :

$$f(x_0, a, b, c, \ldots) = f_0, \qquad \frac{\partial f(x_0, a, b, c, \ldots)}{\partial a} = f_0^a, \ldots$$

$$y_0 = f_0 + \alpha f_0^a + \beta f_0^b + \gamma f_0^c + \ldots$$
$$y_1 = f_1 + \alpha f_1^a + \beta f_1^b + \gamma f_1^c + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_0 = y_0 - y'_0 = (f_0 - y'_0) + \alpha f_0^a + \beta f_0^b + \gamma f_0^c = \delta_0 + \alpha f_0^a + \beta f_0^b + \ldots$$
$$\varepsilon_1 = y_1 - y'_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \delta_1 + \alpha f_1^a + \beta f_1^b + \gamma f_1^c + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans toutes les formules précédentes, seules les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont inconnues. Toutes les autres sont par hypothèse calculables.

3°. — Calculons $\sum \varepsilon^2$ et écrivons que cette quantité est minima.

$$\sum \varepsilon^2 = \sum \delta^2 + 2\alpha \sum \delta f^a + 2\beta \sum \delta f^b + \ldots$$
$$+ \alpha^2 \sum f^a f^a + \beta^2 \sum f^b f^b + \ldots + 2\alpha\beta \sum f^a f^b + \ldots$$

Pas de difficulté sur le sens des signes $\sum$. Les sommations sont étendues à toutes les abscisses x_0, x_1, x_2, ... Nous sommes donc conduits à une forme quadratique par rapport à α, β, γ, ...

Écrire que la somme est minimum, revient à égaler à zéro les dérivées de l'expression précédente prises successivement par rapport à α, β, γ .... On trouve :

$$\alpha\sum f^a f^a + \beta\sum f^a f^b + \gamma\sum f^a f^c + \dots = -\sum \delta f^a,$$
$$\alpha\sum f^b f^a + \beta\sum f^b f^b + \gamma\sum f^b f^c + \dots = -\sum \delta f^b,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Pour déterminer α, β, ..., on est donc conduit à un système de m équations du 1er degré à m inconnues.

Le lecteur que les notations précédentes (nécessairement compliquées) effaroucheraient, verra par les exemples suivants qu'il s'agit dé considérations très élémentaires.

264. Applications.

1°. — Nous voulons faire passer la droite $y = Ax + B$, à travers les points :

$$x_0 = 4 \qquad x_1 = 10 \qquad x_2 = 12 \qquad x_3 = 20$$
$$y'_0 = 3 \qquad y'_1 = 13 \qquad y'_2 = 10 \qquad y'_3 = 22$$

de manière que la somme des carrés des erreurs soit minima.

Construisons ces points sur un plan ; nous constatons que la droite $y = x$, $(a = 1,\ b = 0)$ satisfait approximativement à la question. Nous poserons donc :

$$A = 1 + \alpha, \qquad B = \beta; \qquad y = (1 + \alpha)x + \beta;$$

α et β sont censément petits. Du reste, ici le développement en série par rapport à α et β est tout effectué : ces quantités n'apparaissent qu'au premier degré. Calculons les erreurs.

$$\varepsilon_0 = y_0 - y'_0 = (1 + \alpha)4 + \beta - 3; \quad \varepsilon_1 = y_1 - y'_1 = (1 + \alpha)10 + \beta - 13;$$
$$\varepsilon_2 = y_2 - y'_2 = (1 + \alpha)12 + \beta - 10; \quad \varepsilon_3 = y_3 - y'_3 = (1 + \alpha)20 + \beta - 22.$$

Il faut écrire les conditions de minimum pour la somme :

$$(4\alpha + \beta + 1)^2 + (10\alpha + \beta - 3)^2 + (12\alpha + \beta + 2)^2 + (20\alpha + \beta - 2)^2.$$

D'où le système : $\quad 330\alpha + 23\beta = 21;$

$$23\alpha + 2\beta = 1;$$

$$\alpha = 0{,}145, \qquad \beta = -1{,}167; \qquad y = 1{,}145x - 1{,}167.$$

2°. — Nous voulons faire passer l'exponentielle : $y = Ae^{Bx}$, à travers les points :

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3$$
$$y'_0 = 1{,}8 \quad y'_1 = 6 \qquad y'_2 = 14 \qquad y'_3 = 42.$$

Quelques tâtonnements donnent comme valeurs approchées :

$$a = 2, \qquad b = 1.$$

Posons donc : $\qquad y = (2 + \alpha)e^{(1+\beta)x}.$

Comme par hypothèse α et β sont de petites quantités, nous pouvons négliger les termes en β^2 ou en $\alpha\beta$. D'où :

$$e^{(1+\beta)x} = e^x e^{\beta x} = e^x(1 + \beta x)$$

$$y = (2+\alpha)\, e^{(1+\beta)x} = (2+\alpha)\,(1+\beta x)\, e^x = 2e^x + \alpha e^x + 2\beta x e^x.$$

Nous sommes ramenés à une forme linéaire en α et β.

Calculons les erreurs :

$$\varepsilon_0 = y_0 - y'_0 = 2 + \alpha - 1{,}8\,; \qquad \varepsilon_1 = y_1 - y'_1 = (2 + \alpha + 2\beta)\, 2{,}72 - 6\,;$$

$$\varepsilon_2 = (2 + \alpha + 4\beta)\, 7{,}39 - 14\,; \qquad \varepsilon_3 = (2 + \alpha + 6\beta)\, 20 - 42.$$

Il faut écrire les conditions de minimum pour la somme :

$$(\alpha + 0{,}2)^2 + (2{,}72\alpha + 5{,}44\beta - 0{,}56)^2 + (7{,}39\alpha + 29{,}56\beta + 0{,}78)^2$$
$$+ (20\alpha + 120\beta - 2)^2.$$

D où le système :

$$\alpha = -0{,}27, \qquad \beta = 0{,}061\,; \qquad y = 1{,}73\, e^{1{,}061\,.\,x}.$$

Série de Fourrier.

265. Calcul des coefficients.

Soit une fonction $F(x)$ à représenter entre les limites 0 et 2π *Admettons* que ce soit possible au moyen du développement :

$$\begin{aligned} F(x) = {} & A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \ldots + A_n \sin nx + \ldots \\ & + B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \ldots + B_n \cos nx + \ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

ou du développement équivalent :

$$\begin{aligned} F(x) = {} & B_0 + a_1 \sin (x - \alpha_1) + a_2 \sin (2x - \alpha_2) + \ldots \\ & + a_n \sin (nx - \alpha_n) + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

Nous pouvons calculer aisément les coefficients de la série (1). Multiplions les deux membres de (1) par $\sin mx$ ou $\cos mx$; intégrons entre 0 et 2π. Nous trouvons trois sortes d'intégrales (§ 48) :

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \,.\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\sin (m+n)\, x + \sin (m-n)x\right] dx,$$

qui est nulle quels que soient les entiers m et n ;

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \,.\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\cos (m-n)\, x - \cos (m+n)x\right] dx,$$

qui est nulle quand m diffère de n, et vaut π quand $m=n>0$;

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \,.\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx,$$

qui est nulle quand m diffère de n, vaut π quand $m=n>0$, enfin 2π quand $m=n=0$.

D'où les valeurs cherchées des coefficients de la série (1) :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin nx \,.\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos nx \,.\, dx,$$

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx.$$

Connaissant A_n et B_n, on calcule a_n et α_n par les formules :

$$a_n^2 = A_n^2 + B_n^2, \qquad \operatorname{tg} \alpha_n = - B_n : A_n,$$

qui résultent de l'identification des séries (1) et (2).

Nous admettons le développement possible : c'est une hypothèse à justifier (§ 270). Toutefois le calcul précédent ne suppose absolument rien sur la fonction $F(x)$, sinon qu'elle ne devient pas infinie entre les limites d'intégration 0 et 2π. Tous les termes des séries étant périodiques et admettant 2π comme multiple de la période, la fonction $F(x)$ est elle-même périodique et admet 2π comme période.

Elle peut être aussi discontinue qu'on voudra. Toutefois il est bien évident que la série trigonométrique, n'ayant pour chaque valeur de la variable qu'une valeur unique et bien déterminée, ne peut représenter la fonction $F(x)$ pour les valeurs particulières de la variable pour lesquelles celle-ci est discontinue, c'est-à-dire possède deux valeurs différentes. On démontre que la valeur de la série pour ces valeurs de la variable est la *moyenne* des valeurs que $F(x)$ y prend (§ 270).

Nous n'insisterons pas sur ce cas.

Aussi bien nous pourrions supposer, sans restreindre le champ des applications en Mécanique et Physique, que la fonction $F(x)$ est continue, ses dérivées pouvant être aussi discontinues qu'on voudra : ce qui supprime toute difficulté. En effet, la série de Fourrier sert ordinairement à représenter le mouvement d'un mobile, les oscillations de température, ... Or, s'il est logiquement admissible que la vitesse varie brusquement, il ne l'est pas que le mobile occupe simultanément deux positions différentes, ou possède deux températures différentes.

Avant de discuter plus à fond les propriétés de la série de Fourrier, donnons-en quelques exemples.

266. Premier exemple.

Soit à développer en série trigonométrique la fonction périodique représentée par la courbe OABCDE, EFGHKI, ... (fig. 186).

Posons : $\overline{OA} = k \,.\, 2\pi, \quad \overline{OD} = k' \,.\, 2\pi.$

La fonction est donc partout nulle, sauf dans les intervalles $\overline{AD}$, $\overline{FK}$, ... de grandeur $(k' - k)2\pi$, où elle est constante et égale à F. On a :

$$A_n = \frac{F}{\pi}\int_{2k\pi}^{2k'\pi} \sin nx \,.\, dx = \frac{F}{n\pi}(\cos 2\pi kn - \cos 2\pi k'n),$$

$$B_n = \frac{F}{\pi}\int_{2k\pi}^{2k'\pi} \cos nx \,.\, dx = \frac{F}{n\pi}(\sin 2\pi k'n - \sin 2\pi kn).$$

$$B_0 = (k' - k)F.$$

En particulier posons $k = 0$, $k' = 1 : 2$. Il vient :

$$\frac{\pi}{2} f(x) = F\left[\frac{\pi}{4} + \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right]. \quad (1)$$

La fonction $f(x)$ vaut la constante F quand x varie entre 0 et π, entre 2π et 3π, ... Mais elle est nulle identiquement quand x varie entre π et 2π, 3π et 4π, ...

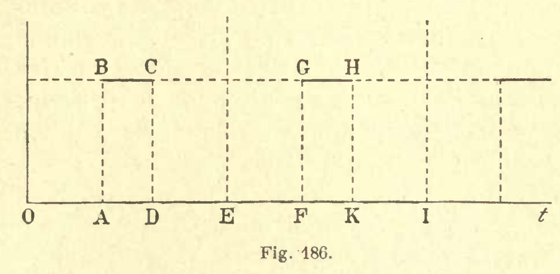


Fig. 186.

Pour les valeurs 0, π, 2π, 3π, ...,

$$f(x) = F : 2.$$

Ainsi $f(x)$ représente la fonction donnée, sauf aux points de discontinuité pour lesquels elle vaut la moyenne des valeurs de cette fonction.

Comme la série prend des valeurs égales et de signes contraires pour des valeurs égales et de signes contraires de x, on a :

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots = \pm\frac{\pi}{4},$$

suivant que l'arc x se termine dans le premier et le second quadrants, ou dans le troisième et le quatrième (sauf évidemment aux points intermédiaires diamétralement opposés, où la série s'annule).

Pour montrer combien la série est peu convergente, faisons le calcul pour $x = 45^0$:

$$\sin x = \sin 3x = -\sin 5x = -\sin 7x = \sin 9x = \dots = 0{,}707.$$

La valeur de la série est :

$$[1{,}333 - 0{,}343 + 0{,}202 - 0{,}144 + 0{,}112 - 0{,}091 + 0{,}077$$
$$- 0{,}066 + \dots]\, 0{,}707 = 0{,}7636.$$

Rappelons que $\pi : 4 = 0,7854$. L'évaluation est erronée *par défaut*, puisqu'on s'arrête à un terme soustractif. En s'arrêtant au terme positif précédent 0,077, elle est erronée *par excès :* on trouve 0,8102.

Le calcul pour un arc voisin de 0 ou de π est très intéressant.

Nous pouvons trouver une infinité de développements trigonométriques représentant la même constante dans la première moitié de la période, et représentant une fonction arbitraire dans la seconde moitié.

Il est incorrect de dire que nous développons une constante en série trigonométrique. La série (1) entre crochets représente non pas la constante $\pi : 2$, mais bien une fonction prenant $\pi : 2$ comme valeur dans une partie de la période, 0 dans une autre partie, enfin $\pi : 4$ pour certaines valeurs de la variable.

267. Autres exemples.

Voici trois autres exemples empruntés à Fourrier et représentés par les courbes de la figure 187.

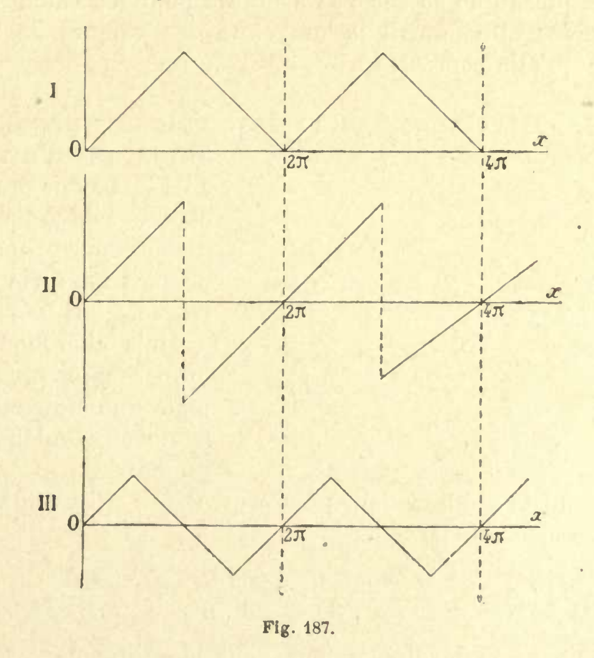


Fig. 187.

$$\text{I} \quad F_1(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

$$\text{II} \quad F_2(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$$

$$\text{III} \quad F_3(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \cdots\right).$$

Pour effectuer les intégrations, on usera des formules :

$$mx \sin mx\,dx = \cos mx\,dx - d(x \cos mx),$$

$$mx \cos mx\,dx = - \sin mx\,dx + d(x \sin mx).$$

La période est ici 2π.

Ainsi voilà trois développements parfaitement équivalents entre 0 et $\pi : 2$. Ils représentent tous les trois $x : 2$. En particulier, faisons $x = \pi : 2$; la première série ne donne rien ; les deux dernières deviennent :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$$

Il va de soi qu'en dehors de l'intervalle 0 et $\pi : 2$, les séries ne sont plus équivalentes. Les figures 187 représentent les courbes correspondantes.

On remarquera que la série II s'annule pour les valeurs π, 3π, ... de la variable; elle fournit la moyenne des valeurs de la fonction *discontinue* qu'elle représente.

268. Développements des valeurs absolues d'un sinus et d'un cosinus.

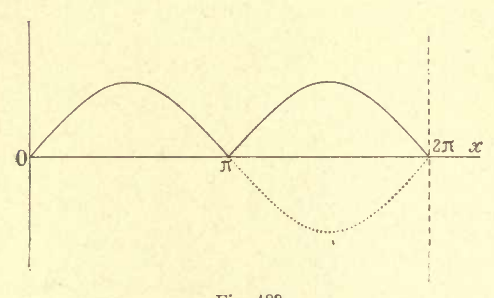


Fig. 188.

Il est clair que le sinus et le cosinus sont à eux-mêmes leur propre développement en série trigonométrique.

Mais cherchons à développer non plus le sinus, mais une nouvelle fonction égale aux valeurs absolues du sinus.

Elle reprend la même valeur pour x et $x + \pi$ (fig. 188).

On trouve aisément :

$$\frac{\pi}{4} F(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1 . 3} - \frac{\cos 4x}{3 . 5} - \frac{\cos 6x}{5 . 7} - \cdots \qquad (1)$$

Entre 0 et π, le développement vaut identiquement $(\pi \sin x : 4)$. Mais il vaut $(-\pi \sin x : 4)$ entre π et 2π.

Un courant alternatif *redressé* est représenté par la série (1).

Il est intéressant de voir une fonction impaire telle que le sinus développée au moyen d'une fonction paire ; mais le fait de ne prendre que les valeurs absolues transforme la fonction impaire qu'est le sinus, en une fonction paire.

269. Décroissance des termes de la série.

1°. — Montrons d'abord que les termes de la série décroissent au moins comme l'inverse du numéro d'ordre, $1 : n$.

Considérons l'intégrale : $\int_0^{2\pi} F(x) \sin nx \,.\, dx.$

L'intervalle de 0 à 2π contient n périodes du sinus. La figure 189 suppose $n = 3$.

Dans ce cas, pour avoir les éléments de l'intégrale, il faut multiplier $F(x)$ par un facteur qui prend alternativement trois fois des valeurs égales et de signes contraires. Si, pendant une période, $F(x)$ ne varie pas, la partie correspondante de l'intégrale disparaît.

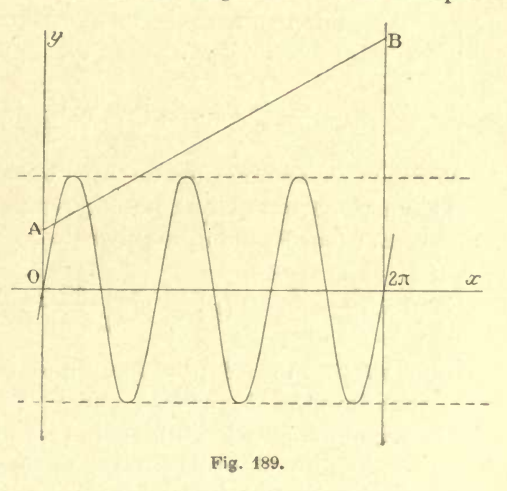


Fig. 189.

Lorsque n augmente, la période de $\sin nx$ diminue en raison inverse de n ; pour variable que soit $F(x)$, ses variations *pendant une période* deviennent de plus en plus petites : l'intégrale diminue certainement.

Pour fixer une limite de sa valeur, remplaçons $F(x)$ par sa tangente dans l'intervalle d'une période du facteur $\sin nx$.

Calculons l'intégrale *pour une période :*

$$S = \int_0^l (ax + b) \sin nx \,.\, dx, \qquad l = \frac{2\pi}{n}.$$

Il vient (§ 219) : $$S = a\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{2\pi}{n}} = \frac{2\pi a}{n^2}.$$

Comme c'était évident *a priori*, b disparaît du résultat.

Si $F(x)$ est une droite, a est constant : la valeur de l'intégrale *pour l'intervalle* 0 *à* 2π est : $$\frac{2\pi}{n^2}\sum a = \left(\frac{2\pi a}{n^2}\right)n = \frac{2\pi a}{n}.$$

Même résultat pour une courbe quelconque, à la différence près que a représente la pente moyenne pour une période de $\sin nx$.

Ainsi, dans tous les cas, les termes décroissent au moins comme $1 : n$.

Si la fonction périodique $F(x)$ est non seulement finie, mais continue, il y a compensation entre les quantités $2\pi a : n^2$ calculées, pour chaque période de $\sin nx$, au moyen de la pente moyenne a de $F(x)$. *A une pente positive doit succéder une pente négative ;* le produit Σa

reste fini, et les termes décroissent comme $1 : n^2$. Nous n'insisterons pas sur la démonstration de ce théorème, du reste très important, qui se vérifie dans les exemples des §§ 266 et 267.

270. Légitimité du développement.

Pour démontrer que le développement est légitime, il faut calculer directement la somme d'un nombre croissant de termes de la série et prouver que sa valeur limite est bien $F(x)$. Additionnons les termes deux à deux ; appelons y la variable d'intégration ; on a :

$$\sin ny \sin nx + \cos ny \cos nx = \cos n(y-x).$$

D'où :

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(y)dy \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \cos n(y-x)\right].$$

Arrêtons la sommation au $n^{ième}$ terme. Appliquons la formule du § 233, en remarquant que nous devons retrancher 1, puisque le premier terme (cos 0) manque ; il reste :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(y)dy \ \sin\left[\frac{2n-1}{2}(y-x)\right] : \sin\frac{y-x}{2}. \quad (1)$$

Nous avons montré plus haut que les termes de la série décroissent indéfiniment à mesure que le rang augmente. Appliquant le même raisonnement à l'intégrale (1), nous concluons que, pour une valeur indéfiniment croissante de n, seuls restent à considérer les éléments très grands pour lesquels le dénominateur s'annule, c'est-à-dire pour lesquels on a $x = y$.

Afin de simplifier l'écriture, posons : $y - x = z$.

Négligeons l'unité devant $2n$; appelons h une quantité quelconque, mais petite. Remplaçons $\sin(z : 2)$ par $z : 2$. Nous pouvons écrire (en faisant sortir $F(x)$ du signe $\int$, puisque nous n'en conservons que des valeurs très voisines) :

$$F(x) = \frac{F(x)}{\pi}\int_{-h}^{+h} \frac{\sin nz}{z} dz.$$

Posons $nz = \xi$; puisque n est très grand, nous pouvons encore écrire l'intégrale sous la forme :

$$\int_{-nh}^{+nh} \frac{\sin \xi}{(\xi : n)} d(\xi : n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi.$$

Nous aurons l'occasion de montrer (§ 304) que la valeur de cette intégrale est π, ce qui prouve la légitimité du développement.

Il suffit d'un mot pour démontrer la proposition énoncée ci-dessus : *pour les discontinuités, la série représente la moyenne des valeurs de la fonction.*

Au voisinage du point de discontinuité, l'intégrale :

$$\int_{-h}^{+h} \frac{\sin nz}{z} dz, \quad \text{et l'intégrale équivalente :} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi,$$

se rapportent pour moitié à la valeur de $F(x)$ qui précède immédiatement la discontinuité, pour moitié à la valeur de $F(x)$ qui suit immédiatement la discontinuité. Autrement dit, quand on intègre de $-h$ à 0, le facteur $F(x)$ qui sort du signe $\int$, a la valeur de $F(x)$ qui précède la discontinuité; quand on intègre de 0 à h, ce facteur a la valeur de $F(x)$ qui suit la discontinuité. La valeur de la série est la moyenne des valeurs de la fonction, puisqu'on a évidemment :

$$\int_{0}^{h} \frac{\sin nz}{z} dz = \int_{-h}^{0} \frac{\sin nz}{z} dz.$$

271. Calcul des coefficients de la série de Fourrier à partir d'une courbe expérimentale.

1°. — Le problème qui se pose aux physiciens est le suivant. L'expérience fournit une courbe périodique ; on demande quels sont les coefficients des termes de la série de Fourrier nécessaires pour la représenter. Il s'agit ici de calculer, non pas une série infinie, mais les premiers termes du développement, les seuls qui aient de l'importance : le phénomène simple dont le phénomène réel se rapproche, serait généralement sinusoïdal; le phénomène réel en diffère par des termes d'amplitude parfois grande, mais toujours rapidement décroissante à mesure qu'augmente leur numéro d'ordre.

2°. — La méthode consiste à utiliser les équations qui expriment la valeur des coefficients :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin nx \,.\, dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos nx \,.\, dx,$$

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx,$$

c'est-à-dire à calculer approximativement des aires élémentaires, connaissant un nombre fini d'ordonnées.

Les ordonnées des courbes qui limitent les aires, sont les ordonnées de la courbe expérimentale $y = F(x)$, multipliées par $\sin nx$ ou $\cos nx$, suivant qu'il s'agit des coefficients A ou des coefficients B. Les méthodes de Poncelet ou de Simpson (§§ 165 et 166) sont utilisables, mais elles sont pénibles.

3°. — Dans la pratique, on opère de la manière suivante.

On marque sur la courbe à étudier les deux extrémités d'une période, et l'on mesure quarante ordonnées équidistantes; la pre-

mière correspond à $x = 0$. La quarante et unième correspond à $x = 2\pi$; elle est égale à la première, puisque nous supposons le phénomène périodique et continu. Dans ces conditions, $\Delta x =$ arc $9°$; le quotient $\pi : \Delta x$, est égal à 20. On a, par exemple :

$$20 A_1 = y_0 \sin 0 + y_1 \sin 9° + y_2 \sin 18° + \ldots + y_{40} \sin 351°,$$
$$20 A_2 = y_0 \sin 0 + y_1 \sin 18° + y_3 \sin 36° + \ldots + y_{40} \sin 702°, \quad (1)$$

et ainsi de suite.

Or il est facile de voir que tous les sinus et cosinus à utiliser sont, aux signes près, égaux à :

$$\cos 9°, \quad \cos 18°, \quad \cos 27°, \ldots, \quad \cos 90°. \quad (2)$$

L'opération consistera en définitive à multiplier les quarante ordonnées par les dix cosinus ; nous sommes sûrs d'avoir ainsi tous les facteurs nécessaires pour calculer les 20 premières valeurs de A et de B.

4°. — Pour simplifier les calculs, il suffit de construire une fois pour toutes une table donnant les multiples des cosinus (2) par 1, 2, 3, ..., 8, 9. Les multiplications par un nombre quelconque deviennent rapides, puisqu'on a les produits partiels. Une autre table pourrait donner les équivalences entre les cosinus (2) et les lignes trigonométriques qui entrent dans les formules (1). Il est plus sûr d'écrire simplement les 400 produits dont il est parlé au *3°*, en un tableau de quarante lignes et de dix colonnes, et d'utiliser des papiers percés de fenêtres, découpés une fois pour toutes et indiquant pour chaque coefficient les produits à employer avec leurs signes.

Si simple que soit la méthode, elle est assez longue. Mais de pareils calculs ne se présentent que dans des cas assez rares ; quelques jours y peuvent être dépensés sans inconvénient.

272. Analyseur harmonique.

1°. — Le premier problème à résoudre est de composer mécaniquement des mouvements sinusoïdaux en nombre quelconque, ayant des amplitudes quelconques. Pour des raisons mécaniques, on somme séparément les séries :

$$S_1 = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \ldots$$
$$S_2 = B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \ldots$$

L'appareil de Michelson se compose de 80 roues dentées R_1, R_2, ... R_{80}, montées *folles* sur un arbre A et engrenant respectivement avec 80 autres roues $R'_1, R'_2, \ldots R'_{80}$, montées sur un arbre A' dont elles sont solidaires. Les dents des roues en prise sont calculées de manière que, pendant un tour de l'arbre A', R_1 fasse un tour, R_2 deux tours, ..., R_{80} quatre-vingts tours.

2°. — On s'appuie sur la propriété des ressorts spiraux de subir des allongements proportionnels à la traction, ou inversement de

créer des tractions proportionnelles aux allongements. La roue R entraîne un excentrique E par l'intermédiaire duquel elle imprime aux balanciers BOC et O'DF des mouvements alternatifs très sensiblements sinusoïdaux (voir Mécanique, § 157).

L'amplitude de l'oscillation du point F dépend de la position du point de contact C de la tige DC avec le balancier BOC ; elle est proportionnelle à la distance OC, qui peut être positive ou négative.

Il y a autant d'appareils que de roues, soit 80. On peut donc imposer aux points F_1, F_2, ... F_{80}, des oscillations de périodes rela-

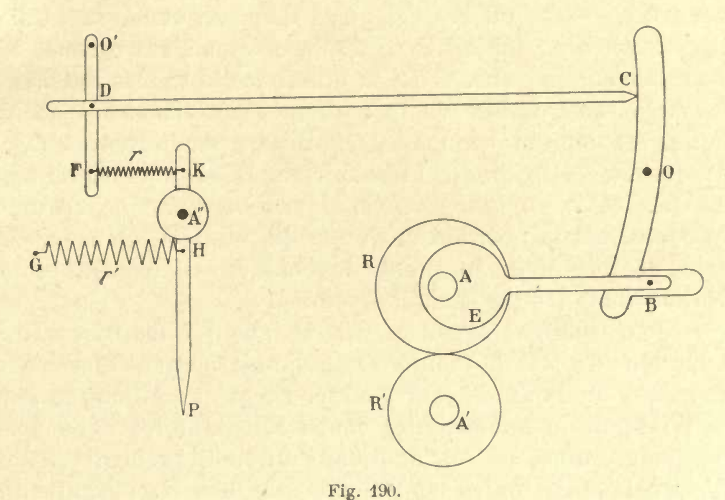


Fig. 190.

tives et de phases convenables, et d'amplitudes arbitraires ; nous les appellerons *amplitudes des éléments de la machine*.

Aux points F sont attachés des ressorts r qui agissent sur un cylindre d'axe A''. Le cylindre est rappelé dans une position d'équilibre par un ressort r', très fort vis-à-vis des ressorts r. Les déplacements (identiques) des points K_1, K_2, ... sont toujours petits vis-à-vis des déplacements (différents d'un point à l'autre) des points F_1, F_2, ... ; les 80 ressorts r subissent donc à chaque instant des allongements proportionnels aux élongations des points F ; par suite, ils exercent à chaque instant sur le cylindre un couple proportionnel *à la somme algébrique* de ces élongations.

Ainsi se trouve résolue la sommation mécanique d'un nombre quelconque de mouvements s'effectuant suivant des lois quelconques. Ici ces lois sont sinusoïdales avec des fréquences variant comme la suite des nombres entiers ; mais la solution est générale.

3°. — Reprenons le problème qui consiste à obtenir un déplacement du point P proportionnel à la valeur de la série :

$$S_1 = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \ldots$$

Imaginons les roues R′ calées sur l'arbre A′ de manière que simultanément tous les excentriques soient dans leurs positions moyennes. Il en sera de même des allongements des ressorts r dont les tensions sont alors équilibrées par la tension du ressort r'. La pointe P est dans une position qui correspond à $S_1 = 0$, à partir de laquelle seront comptées ses élongations. Disposons les leviers DC, de manière que les distances $\overline{OC}$ soient proportionnelles à A_1, A_2, ... Quand l'arbre A′ tournera, la pointe P aura un déplacement périodique, proportionnel à la valeur de la somme S_1.

Remarque I. — Quand F se déplace dans un sens, la tension du ressort r *augmente ;* quand F se déplace dans l'autre sens, la tension du ressort r *diminue.* C'est la différence entre les tensions et la tension moyenne qui intervient : *elle est positive ou négative.* La somme des tensions moyennes est équilibrée par le ressort r'.

Remarque II. — Le profil du balancier BOC sur lequel s'appuie la tige DC, *et qu'on suppose dans la position moyenne,* est un cercle dont le centre est la position moyenne du point D. Dans ces conditions, le déplacement du point de contact C n'entraîne aucune modification dans les positions moyennes.

4°. — Pour sommer la série S_2, il faut que les roues R′ soient calées sur leur axe A′ de manière que simultanément tous les excentriques soient au bout de leur course. On peut obtenir ce résultat, soit en doublant le nombre des roues et calant les deux systèmes une fois pour toutes, soit en modifiant automatiquement et simultanément le calage de toutes les roues ou de tous les excentriques (ce qui est plus facile), de manière à passer de la condition énoncée au *3°* à la condition présentement nécessaire.

5°. — Une des applications les plus curieuses de l'*analyseur harmonique,* est la détermination mécanique des coefficients A_n et B_n des termes de la série nécessaire pour représenter une courbe expérimentale donnée. C'est l'opération inverse de la précédente, la plus utile en réalité, celle qui a donné son nom à l'appareil.

Nous avons : $$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx \, dx.$$

Dans une période de la courbe expérimentale, traçons p (ici 80) ordonnées équidistantes (81 avec la première ordonnée de la période suivante). L'intégrale qui entre dans l'expression de A_n est proportionnelle à la somme :

$$\sum_1^p F\left(q \frac{2\pi}{p}\right) \sin\left(nq \frac{2\pi}{p}\right) = \sum_1^p y_q \sin\left(nq \frac{2\pi}{p}\right);$$

q prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., p ; le nombre n est constant.

Or imposons pour amplitudes des éléments de la machine, des quantités proportionnelles à y_1, y_2, ... La machine fournit la fonction :

$$S_1 = y_1 \sin x + y_2 \sin 2x + \ldots = \sum_1^p y_q \sin qx.$$

Traçons cette courbe qui est périodique et continue. Divisons sa période au moyen de p ordonnées. Leur équidistance est $2\pi : p$. Prenons la valeur de la fonction pour la $n^{\text{ième}}$ ordonnée. On a :

$$x = n\frac{2\pi}{p}, \qquad S_1 = \sum_1^p y_q \sin qx = \sum_1^p y_q \sin\left(nq\frac{2\pi}{p}\right).$$

Le résultat est proportionnel à A_n. Les différents coefficients A_1, A_2, A_n, sont donc proportionnels aux ordonnées équidistantes de la courbe continue qu'on obtient en donnant aux éléments de la machine des amplitudes proportionnelles aux ordonnées équidistantes y de la courbe à analyser.

CHAPITRE XIII

FONCTIONS DEFINIES PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

273. Nature des équations différentielles. Équations du premier ordre.

On appelle *équation différentielle* une relation entre la fonction y, la variable x, et un nombre quelconque de dérivées :

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$$

Rendons-nous compte de ce qu'expriment les équations différentielles.

1°. — Soit le faisceau de courbes :

$$f(x,y) = a\,; \tag{1}$$

a est un paramètre, constant pour chaque courbe, qui varie d'une courbe à l'autre. Cherchons s'il n'existerait pas quelque propriété indépendante de la courbe considérée, par suite indépendante du paramètre a. Différentions (1), en considérant a comme constant, ce qui revient à chercher une propriété définie par deux points voisins d'une courbe particulière du faisceau :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{2}$$

L'équation différentielle (2) exprime une relation entre x, y, et la pente de la courbe considérée, *relation commune à toutes les courbes, puisque a est éliminé du résultat.*

Par exemple, soit le faisceau des cercles :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Ils admettent tous pour centre le point de coordonnées x_0, y_0.

Différentions : $\quad (x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy = 0.$

Cette équation est obtenue en supposant R constant : elle est valable pour une courbe du faisceau. Mais comme R n'y entre plus, elle est également valable pour toutes les courbes du faisceau. Elle

exprime que la normale passe par le point fixe de coordonnées x_0, y_0.

2°. — A la vérité, nous supposons que la différentiation chasse immédiatement le paramètre. Dans le cas général, nous en sommes quittes pour une élimination supplémentaire.

Soit, par exemple (fig. 191), le faisceau de paraboles $y^2 = 2px$, admettant toutes Ox pour axe, passant par l'origine O où elles sont tangentes à Oy.

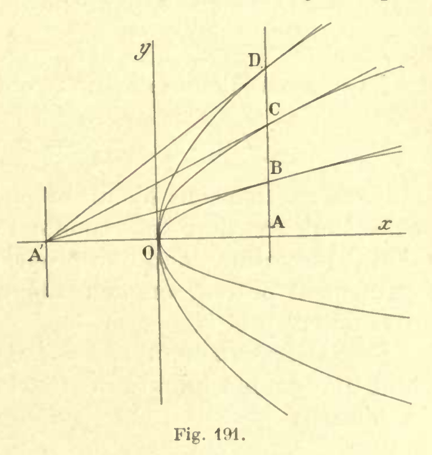


Fig. 191.

Différentions et éliminons p entre l'équation donnée et l'équation obtenue :

$$y^2 = 2px, \qquad ydy = pdx.$$

Il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}, \qquad (3)$$

qui exprime que les tangentes aux points de même abscisse $\overline{OA} = x$, passent par le point A' d'abscisse $\overline{OA'} = -x$.

Le paramètre p a naturellement disparu de l'équation (3).

3° L'équation donnée peut contenir plusieurs paramètres.

Par exemple :
$$y^2 = 2px + q^2, \qquad (4)$$

représente : soit un faisceau de paraboles identiques, mais ayant glissé l'une par rapport à l'autre parallèlement à Ox (p constant, q variable, faisceau I) ; soit un faisceau de paraboles de même axe, de formes différentes, mais passant toutes par les points $x = 0$, $y = \pm q$ (p variable, q constant, faisceau II). Différentions :

$$ydy = pdx. \qquad (5)$$

L'équation (5) exprime une propriété commune à toutes les courbes du faisceau I ; la pente de la tangente est la même pour les points de même ordonnée sur toutes les courbes du faisceau.

Pour avoir une propriété commune aux courbes du faisceau II, éliminons p entre (4) et (5) :

$$y^2 = 2xy\frac{dy}{dx} + q^2.$$

Il va de soi que nous ne pourrons éliminer à la fois que l'un des paramètres.

4°. — Réciproquement, une équation différentielle *du premier ordre* (c'est-à-dire ne contenant que la dérivée première) :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

exprime une relation entre la pente d'une courbe *d'un faisceau* et les coordonnées. *Intégrer cette équation, c'est chercher la fonction y de*

x qui, contenant un paramètre arbitraire, reproduira par différentiation et au besoin par élimination l'équation différentielle donnée.

274. Équation du second ordre, d'ordre supérieur. Intégrales particulières.

1°. — Reprenons le faisceau de paraboles :

$$y^2 = 2px + q^2. \qquad (1)$$

En dérivant deux fois, nous obtenons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{y^2}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (2)$$

Nous construisons ainsi une équation *du second ordre,* c'est-à-dire contenant une dérivée seconde. Les paramètres ont disparu : l'équation (2) exprime donc une propriété commune à toutes les paraboles qu'on peut obtenir en donnant des valeurs *quelconques* aux deux paramètres p et q.

2°. — Généralement, soit $f(x, y, a, b) = 0$, une équation représentant une double infinité de courbes. Deux dérivations par rapport à x donnent :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Entre ces trois équations, éliminons a et b. Nous obtenons une équation différentielle du second ordre, exprimant une propriété commune à la double infinité de courbes.

Réciproquement, soit une équation :

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \qquad (3)$$

L'intégrer, c'est chercher une fonction $f(x, y, a, b) = 0$, contenant deux paramètres arbitraires et reproduisant (3) par dérivation et élimination.

3°. — On peut trouver des fonctions qui reproduisent (3) par dérivation, mais qui ne contiennent qu'une constante arbitraire ou pas de constante. On les appelle *intégrales particulières,* par opposition avec les *intégrales générales* que nous avons définies. Ainsi l'équation (2) est satisfaite par les paraboles $y^2 = 2px$; mais ces courbes ne sont pas les seules auxquelles l'équation (2) convienne : elles constituent une *intégrale particulière.*

Cette notion d'intégrale particulière s'applique aussi aux équations du premier ordre. Par exemple : $y^2 = 2x$, est une solution particulière de l'équation (3) du paragraphe précédent.

4°. — Généralement, soit une fonction :

$$f(x, y, a, b, c\ldots) = 0 \qquad (4)$$

contenant n paramètres arbitraires. Dérivons n fois. Entre (4) et les n équations obtenues, éliminons les n paramètres. Nous obtenons une équation différentielle du $n^{ième}$ ordre :

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (5)$$

Inversement intégrer (5), c'est chercher une fonction (4) contenant n paramètres arbitraires et qui redonne (5) par dérivation et élimination. Toute fonction qui redonne (5), mais ne contient pas n paramètres arbitraires, s'applique à moins d'objets que (5) : c'est une *intégrale particulière.*

5°. — Voici un exemple que nous retrouverons souvent.

Soit :
$$y = A \sin \omega (x - \alpha). \quad (6)$$

On obtient par deux dérivations successives :

$$\frac{dy}{dx} = A\omega \cos \omega (x - \alpha), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = - A\omega^2 \sin \omega (x - \alpha) ;$$

d'où :
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0. \quad (7)$$

Les paramètres A et α ont disparu Donc (7) est une équation différentielle du second ordre dont (6) est l'intégrale générale.

Les fonctions :

$$y = \sin \omega (x - \alpha), \qquad y = A \sin \omega x, \qquad y = \sin \omega x, \quad (8)$$

sont des intégrales particulières. Elles satisfont à (7), mais (7) convient à d'autres fonctions.

L'équation (7) représente le mouvement d'un mobile attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Le mobile exécute des oscillations isochrones (période indépendante de l'amplitude) autour de sa position d'équilibre [mouvements (6) où x représente le temps, y la distance à l'origine considérée comme centre d'attraction]. Le problème mécanique comporte deux arbitraires : l'amplitude A de l'oscillation, sa phase α qui dépend de l'instant où le mobile est lancé. L'intégrale générale doit exprimer tous les mouvements possibles et, par suite, contenir ces deux paramètres *à déterminer par les conditions imposées.* Au contraire, dans les intégrales particulières (8), qui représentent des oscillations possibles, mais non toutes les oscillations possibles, un ou deux paramètres ont reçu des valeurs *particulières.*

Équations différentielles du premier ordre.

275. Séparation des variables.

1°. — Une équation différentielle du premier ordre est une relation entre x, y, et $dy : dx$. On peut toujours la supposer mise sous la forme :
$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

Si les termes en x et en y sont alors *séparés;* autrement dit, si l'on a :
$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0,$$
l'intégration est ramenée à des *quadratures*, c'est-à-dire à l'évaluation de deux aires :
$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0.$$
Supposons l'intégration effectuée ; on obtient :
$$F(x) - F(x_0) + f(y) - f(y_0) = 0,$$
$$F(x) + f(y) = F(x_0) + f(y_0) = C.$$
x_0 et y_0 sont les valeurs de x et de y *dont on impose la correspondance.* En effet, l'intégrale représente un faisceau de courbes ; on peut déterminer une des courbes du faisceau, en lui imposant de passer par un point arbitrairement choisi. Précisément, x_0 et y_0 sont les coordonnées de ce point. Il revient au même d'ajouter une constante arbitraire : $C = F(x_0) + f(y_0)$.

2°. — La séparation s'effectue aisément quand M et N sont des fonctions homogènes et du même degré (§ 15) des variables x et y.

On peut alors écrire :
$$M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0.$$
Posons : $\quad y : x = z, \qquad dy = xdz + zdx\,;$

il vient : $\quad M(z)\,dx + N(z)\,(xdz + zdx) = 0\,;$
$$\frac{dx}{x} + \frac{N(z)\,dz}{M(z) + z\,N(z)} = 0.$$
3°. — Soit, par exemple :
$$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad dy - \frac{y}{x}dx = dx\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,;$$
$$xdz + zdx - zdx = dx\sqrt{1 + z^2}\,, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$
$$\log x = \log\left[z + \sqrt{1 + z^2}\right] + \log C.$$
En effet, il est indifférent d'ajouter la constante arbitraire sous forme de logarithme. Passons des logarithmes aux nombres :
$$x = C\left[z + \sqrt{1 + z^2}\right].$$
Revenons à la variable y :
$$x = C\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right];$$
et enfin : $\quad x^2 = C\left[y + \sqrt{x^2 + y^2}\right], \qquad x^2 = 2\,Cy + C^2.$

276. Équation linéaire du premier ordre.

On appelle *linéaire du premier ordre l'équation* :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions de x. Elle ne contient ni les puissances, ni les produits de y et de sa dérivée.

Pour l'intégrer, posons : $y = uv$;

u et v sont deux fonctions de x, *dont l'une reste arbitraire*.

On a : $$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q. \tag{2}$$

Profitons de ce que l'une des fonctions est arbitraire, pour écrire :

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0, \quad \frac{du}{u} = -Pdx, \quad u = \exp\left(-\int Pdx\right). \tag{3}$$

Supposons calculée la fonction u. L'équation (2) est devenue :

$$dv = \frac{Qdx}{u} \qquad v = \int Q\exp\left(\int P\,dx\right)dx + C;$$

et enfin : $$y = \exp\left(-\int Pdx\right)\left[\int Q\exp\left(\int Pdx\right)dx + C\right].$$

Exemples.

1°. — Soit : $$\frac{dy}{dx} + y = -x;$$

$$P = 1, \quad Q = -x; \qquad \int Pdx = \int dx = x;$$

$$y = e^{-x}\left[-\int xe^x dx + C\right], \qquad -\int xe^x dx = e^x(1-x);$$

et enfin : $$y = 1 - x + Ce^{-x}.$$

2°. — Soit : $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -x;$$

$$P = 1 : x, \quad Q = -x; \qquad \int Pdx = \log x; \qquad \exp\left(\int Pdx\right) = x.$$

$$y = \frac{1}{x}\left[-\int x^2\,dx + C\right] = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.$$

277. Équation de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q;$$

On pose : $$z = \frac{y^{1-n}}{1-n}, \qquad dz = y^{-n}dy.$$

L'équation devient : $$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = Q.$$

Elle a la forme étudiée au paragraphe précédent.

278. Solutions singulières des équations du premier ordre.

L'équation : $$M dx + N dy = 0, \qquad (1)$$
exprime une relation entre les coordonnées d'un point P d'une quelconque C des courbes du faisceau :
$$f(x,y) = a, \qquad (2)$$
et la pente de la tangente en ce point. Considérons l'enveloppe des courbes du faisceau (2) et le point de contact P de cette enveloppe avec la courbe C (§ 129). Puisque l'enveloppe et la courbe sont tangentes au point P, la relation exprimée par (1) convient aussi à l'enveloppe. Celle-ci est donc une *solution singulière* de (1) qui ne rentre ordinairement pas dans la *solution générale* (2).

Exemple.

Soit la *droite :* $$y = 2ax - a^2, \qquad (1)$$
qui dépend du paramètre a. Éliminons a entre (1) et sa dérivée :
$$\frac{dy}{dx} = 2a, \qquad \frac{dy}{dx} = 2\left[x \pm \sqrt{x^2 - y}\right]. \qquad (2)$$
L'équation différentielle (2) admet (1) comme intégrale générale.

Cherchons l'enveloppe des droites (1). Il faut (§ 129) éliminer a entre (1) et la dérivée de (1) par rapport à a :
$$x = a\,; \qquad y = x^2.$$
C'est une *parabole.* Elle satisfait à l'équation (2).

279. Solution graphique de l'équation linéaire : courbes isoclines.

1°. — On obtient la forme générale des courbes intégrales par la construction des *courbes isoclines.* Soit :
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad (1)$$
l'équation différentielle. Construisons (ce qui n'implique aucun tâtonnement) le faisceau des courbes :
$$C = f(x, y), \qquad (2)$$
où C prend successivement toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Ce sont respectivement les lieux des points pour lesquels les pentes des courbes intégrales sont les mêmes. Elles ont même inclinaison sur Ox.

Soit 1, 2, 3..., des courbes isoclines consécutives. A partir d'un point A sur 1, traçons un segment de droite faisant avec Ox l'angle *caractéristique* de la courbe 1. Arrêtons-le à peu près à égale distance de 1 et de 2. Changeons alors la pente ; prenons celle qui correspond à 2. Traçons un segment de droite s'arrêtant à peu près à égale distance de 2 et de 3. Changeons alors la pente ; prenons celle qui correspond à 3. Et ainsi de suite.

A partir de points A différents, on trace de la sorte des courbes d'autant plus exactes que les *isoclines* sont plus rapprochées ; elles fournissent au moins l'allure générale des courbes intégrales.

2°. — Sur chaque courbe isocline, il est intéressant de considérer le ou les points pour lesquels sa propre pente est égale à la pente *caractéristique*. Chaque courbe isocline correspondant à une valeur constante de C, sa pente $dy : dx$ est fournie par les équations :

$$df = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Écrivons la condition précédemment énoncée ; il vient :

$$\frac{dy}{dx} = C = f(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0. \tag{2}$$

Remarquons que $dy : dx$ représente ici la pente de la courbe isocline, tandis que dans l'équation (1), $dy : dx$ représente la pente de la courbe intégrale.

Nous déterminons ainsi dans le plan une certaine courbe, qui est un lieu de points d'inflexion pour les courbes intégrales.

En effet, de part et d'autre du point de contact avec la courbe isocline considérée, la courbe intégrale coupe deux fois la même courbe isocline voisine ; donc sa pente a un maximum ou un minimum au point de tangence.

On étudiera sous ce rapport l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

dont les courbes isoclines sont des cercles concentriques.

La courbe des inflexions est :

$$x + (x^2 + y^2)\, y = 0,$$

en coordonnées polaires :

$$r^2 = -\operatorname{cotg} \theta.$$

3°. — Il peut exister des inflexions autre part que sur la courbe (2).

Soit, par exemple : $\dfrac{dy}{dx} = x\,(x - 1).$

Les courbes isoclines sont des droites parallèles à Oy ; la pente qui est $+\infty$ pour $x = \pm\infty$, s'annule pour $x = 0$, $x = 1$, et passe par un minimum pour $x = 0,5$. Les courbes intégrales ont toutes une inflexion sur la droite $x = 0,5$, à laquelle elles ne sont pas tangentes. Du reste, la courbe (2) est tout entière rejetée à l'infini.

4°. — Soit l'équation : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}.$

Les lignes isoclines $y = 2Cx$, sont des droites passant par l'origine. Traçons-les, en indiquant les inclinaisons correspondantes ;

nous obtenons aisément des courbes intégrales dont l'allure est celle des courbes de la figure 191. Effectivement ce sont des paraboles.

Nous pouvons généraliser. Chaque fois que les isoclines sont des droites concourantes, les courbes intégrales sont homothétiques (§ 364) ; le point de concours est centre d'homothétie.

5°. — Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2R}{y} - 1}.$$

On a : $$\frac{dy}{dx} = C, \qquad y = \frac{2R}{1+C^2}.$$

Les courbes isoclines sont des horizontales. Pour $C = \pm\infty$, $y = 0$; donc l'axe Ox est le lieu des rebroussements avec tangente verticale. Les courbes intégrales sont symétriques par rapport à la tangente de rebroussement, puisque toute courbe isocline $y = y_0$, correspond à deux valeurs égales et de signes contraires de la pente.

La pente est nulle pour $y = 2R$.

Traçant les courbes intégrales sur ces données, on retrouve, sinon la solution exacte (cycloïdes, § 100), du moins des courbes de même allure.

6°. — ÉQUATION DE CLAIRAULT.

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right). \qquad (4)$$

Les lignes isoclines sont les droites :

$$y = Cx + f(C).$$

Elles constituent les intégrales elles-mêmes, puisque le paramètre C_0 qui correspond à la droite :

$$y = C_0x + f(C_0),$$

est précisément la pente de cette droite.

Nous laissons au lecteur le soin d'étudier l'équation généralisée :

$$y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

qui admet comme cas particulier l'exemple du 4°.

Facteur intégrant.

280. Intégrale le long d'un contour.

1°. — Soit la différentielle dQ, définie par la relation (fig. 192) :

$$dQ = Mdx + Ndy.$$

M et N sont des fonctions de x et de y considérées comme variables indépendantes. Allons du point A au point voisin A_1. Les accroissements Δx, Δy, sont bien déterminés; sur tout l'élément AA_1, les

fonctions M et N conservent sensiblement la valeur qu'elles ont en A ; donc l'accroissement ΔQ est bien déterminé.

Il est rigoureusement calculable quand Δx et Δy deviennent des différentielles.

Pour aller d'un point A du plan à un autre point B, imposons une trajectoire AEB. C'est dire que les coordonnées x et y cessent d'être indépendantes ; elles sont reliées, par exemple, au moyen de la variable auxiliaire t :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$
$$dQ = M\varphi' dt + N\psi' dt,$$
$$\int dQ = \int_{t_1}^{t_2} (M\varphi' + N\psi')dt;$$

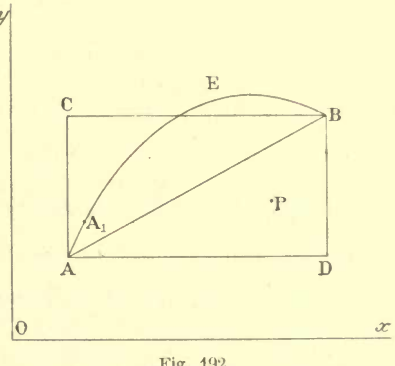


Fig. 192.

t_1 et t_2 sont les valeurs de t pour les points A et B. La valeur de Q s'obtient par une quadrature, portant sur des fonctions de t ; *on effectue par une intégration le long du contour* AEB.

Mais (c'est là que nous en voulons venir), $\int dQ$ *dépend non seulement des points* A *et* B *extrémités du parcours, mais généralement de la trajectoire choisie.* Montrons-le sur un exemple.

2°. — Soit :

$$dQ = xdy - ydx.$$

Les coordonnées de A sont x_1, y_1 ; les coordonnées de B sont x_2, y_2.

Évaluons $\int dQ$ pour le parcours ADB.

Suivant AD, $\quad \int dQ = -y_1 \int dx = -y_1(x_2 - x_1)$,

puisque dy est identiquement nul.

Suivant BD, $\quad \int dQ = x_2 \int dy = x_2(y_2 - y_1)$,

puisque dx est identiquement nul.

Pour le parcours entier :

$$\int dQ = -y_1(x_2 - x_1) + x_2(y_2 - y_1) = y_1x_1 + y_2x_2 - 2x_2y_1.$$

Évaluons de même $\int dQ$ pour le parcours AC. On trouve :

$$\int dQ = x_1(y_2 - y_1) - y_2(x_2 - x_1) = -y_1x_1 - y_2x_2 + 2x_1y_2.$$

Enfin évaluons $\int dQ$ pour le parcours AB. Posons donc :

$$y = ax + b, \qquad dy = adx.$$

$$\int dQ = -b\int dx = -b(x_2 - x_1).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer b, en écrivant que la droite passe par les points A et B. On trouve une troisième valeur de $\int dQ$ différente des deux autres.

281. Différentielle exacte.

Ainsi quand on passe d'un point à l'autre du plan, $\int dQ$ a généralement une infinité de valeurs; à chaque trajectoire en correspond une. D'où la question : *peut-il arriver que la valeur soit unique et indépendante de la trajectoire?*

Pour cela, il faut évidemment que Q soit (*à une constante additive près*) une fonction bien déterminée des variables x, y; il faut qu'on ait :

$$Q = Q_0 + f(x, y). \qquad (1)$$

Menons par le point quelconque P une droite perpendiculaire au plan xOy. Portons dessus une longueur représentative de Q, calculée après avoir choisi une valeur arbitraire de la constante Q_0. Dans l'hypothèse (1), Q est représenté par une surface. En modifiant Q_0, on obtient un faisceau de surfaces qui résultent du glissement de l'une quelconque d'entre elles, d'une longueur quelconque, perpendiculairement au plan xOy.

Quand on passe du point A au point B, Q varie de Q_1 à Q_2 :

$$Q_1 = Q_0 + f(x_1, y_1), \qquad Q_2 = Q_0 + f(x_2, y_2);$$

$$Q_2 - Q_1 = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

La constante Q_0 a disparu.

Mais si Q satisfait à l'équation (1), on doit avoir :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy, \qquad M = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad N = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Or (§ 21) : $$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}, \quad \text{d'où :} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (2)$$

Ainsi les fonctions M et N ne sont plus arbitraires; elles doivent satisfaire à la relation (2). On dit que dQ *est une différentielle exacte.*

Remarque.

Les notations $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, impliquent que Q satisfasse à l'équation (1), c'est-à-dire soit une fonction bien déterminée des variables

indépendantes x, y. [Toutefois, en Thermodynamique, les physiciens sont accoutumés à écrire :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy, \qquad (3)$$

alors même qu'ils savent pertinemment que dQ (représentant la chaleur absorbée par un système dont *l'état* est déterminé par les variables x, y, et *la variation d'état* par les différentielles dx, dy) n'est pas une différentielle exacte. Cela n'a aucun inconvénient pourvu qu'on soit prévenu. L'avantage de la notation (3) est de soulager la mémoire. Par exemple, $\partial Q : \partial x$ représente *ni plus ni moins* le coefficient de dx dans l'équation (3); c'est une fonction bien déterminée de x et de y. Naturellement ce serait une faute grossière

de poser : $$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x},$$

puisque Q n'est plus une fonction bien déterminée de x et de y.

282. Facteur intégrant.

1°. — Soit : $$dQ = M dx + N dy,$$

une différentielle *que nous savons ne pas être exacte :* la relation (2) n'est pas satisfaite. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $I(x, y)$, telle que : $$dS = I dQ,$$

soit une différentielle exacte.

En effet, soit : $F(x, y) = \text{Constante} = C$,

l'intégrale générale de l'équation : $M dx + N dy = 0$.

On a : $$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0;$$

par suite : $$M : \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = N : \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Ces rapports égaux sont une certaine fonction $1 : I(x, y)$, de x et de y; de sorte qu'on a :

$$M(x, y) \,.\, I(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad N(x, y) \,.\, I(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

La différentielle : $I dQ = (MI) dx + (NI) dy$, est donc exacte.

2°. — Une fois trouvé un facteur intégrant I, on en obtient aisément une infinité d'autres.

En effet, si $$dS = I(M dx + N dy),$$

est une différentielle exacte, il en est évidemment de même pour :

$$\varphi(S) dS = I\varphi(S)(M dx + N dy).$$

Donc $I\varphi(S)$ est un facteur intégrant, quelle que soit φ.

3°. — EXEMPLE.

Reprenons l'équation différentielle : $dQ = xdy - ydx$.

Intégrons l'équation : $xdy - ydx = 0$.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \log x = \log y - \log C; \qquad F(x, y) = \frac{y}{x} = C.$$

Différentions l'intégrale générale obtenue ; nous avons identiquement :

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

Le facteur intégrant le plus simple est $I = \frac{1}{x^2}$; mais nous en avons une infinité de la forme : $\frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

4°. — APPLICATION.

En Thermodynamique, on montre que la quantité de chaleur absorbée, quand un système passe d'un état à un autre état, dépend de la manière dont s'effectue la transformation :

$$dQ = Mdx + Ndy,$$

n'est pas une différentielle exacte.

Le principe de Carnot-Clausius revient à dire que, *pour certaines transformations, le facteur intégrant est l'inverse de la température absolue :*

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{M}{T} dx + \frac{N}{T} dy,$$

est une différentielle exacte. La fonction S ainsi définie est *l'Entropie.*

Équations différentielles linéaires.

Il n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage de démontrer des théorèmes que le lecteur n'aura jamais à appliquer. Nous préférons qu'il garde une idée nette des matières fondamentales. Nous limiterons donc notre étude à quelques types usuels d'équations.

283. Équation linéaire à coefficients constants, du second ordre, sans second membre.

1°. — Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + by = c.$$

a, b, c, sont des constantes. L'équation est linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Nous pouvons nous débarrasser du second membre en remplaçant y par $y + c : b$, ce qui revient à

transporter l'origine des coordonnées au point d'abscisse nulle et d'ordonnée $-c : b$.

2°. — Soit donc à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + by = 0. \qquad (1)$$

Substituons la fonction : $y = Ae^{rx}$, où A est constant. Il vient :

$$Ae^{rx}(r^2 - 2ar + b) = 0.$$

La fonction y est une intégrale, à condition que r soit racine de l'équation *dite caractéristique :*

$$r^2 - 2ar + b = 0. \qquad (2)$$

Posons : $r_1 = a + \sqrt{a^2 - b}$, $\qquad r_2 = a - \sqrt{a^2 - b}$.

3°. — Racines réelles et inégales.

Si les racines r_1 et r_2 sont réelles et inégales, nous avons l'intégrale générale sous la forme :

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, \qquad (3)$$

qui contient deux constantes arbitraires.

Les constantes sont déterminées par les conditions initiales. Dans la pratique, x représente le plus souvent le temps, y la position d'un mobile, $dy : dx$ sa vitesse, $d^2y : dx^2$ son accélération. Pour déterminer les constantes, on pose habituellement que pour $x = 0$ (origine des temps, début de l'expérience), le mobile a une position y_0 et une vitesse v_0. D'où les conditions :

$$y_0 = A + B, \qquad v_0 = r_1A + r_2B.$$

Si, d'après la nature du problème, y ne peut croître indéfiniment, on doit annuler la constante d'intégration qui correspond à une racine réelle positive. Il est alors impossible de se donner deux conditions initiales arbitraires.

4°. — Si les racines sont imaginaires (ce qui implique $b > 0$), on doit les grouper de manière à faire apparaître des fonctions réelles. Les coefficients a et b étant réels, les racines sont conjuguées :

$$r_1 = a + \beta i, \qquad r_1 = a - \beta i; \qquad \beta = \sqrt{b - a^2}.$$

$$Ae^{r_1x} = Ae^{ax}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \qquad Be^{r_2x} = Be^{ax}(\cos\beta x - i\sin\beta x);$$

$$y = e^{ax}[(A+B)\cos\beta x + i(A-B)\sin\beta x].$$

Posons : $A + B = P$, $\quad i(A - B) = Q$; $\quad$ il vient :

$$y = e^{ax}(P\cos\beta x + Q\sin\beta x) = e^{ax}M\cos(\beta x - \mu).$$

On vérifiera par substitution directe que ces solutions conviennent.

Ordinairement on a $a < 0$: *l'intégrale représente un mouvement sinusoïdal amorti, d'amplitude* M, *de phase* μ, *de période* $\beta : 2\pi$ (§ 52).

5°. — Pour que le mouvement périodique soit *permanent*, le terme amortissant e^{ax} doit disparaître. D'où les conditions : $a = 0$, $b > 0$.

L'équation : $$\frac{d^2y}{dx^2} + by = 0,$$

a donc pour intégrale générale l'une ou l'autre forme :

$$y = \mathrm{P}\cos x\sqrt{b} + \mathrm{Q}\sin x\sqrt{b}, \qquad y = \mathrm{M}\cos(x\sqrt{b} - \mu).$$

6°. — Ce qui précède se généralise immédiatement pour une équation linéaire à coefficients constants d'ordre quelconque. On substitue la fonction $y = \mathrm{A}e^{rx}$: c'est une intégrale si r est racine d'une équation dont le degré est égal à l'ordre de l'équation différentielle proposée. Toute racine réelle donne une exponentielle ; le système de deux racines imaginaires conjuguées donne un terme sinusoïdal amorti ou non amorti.

284. Cas des racines multiples.

1°. — Si les racines de l'équation (2) sont égales, on a $b = a^2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + a^2y = 0. \qquad (4)$$

La solution (3) devient :

$$y = (\mathrm{A} + \mathrm{B})e^{rx}. \qquad (5)$$

L'intégrale (5) n'a plus la généralité requise ; elle ne contient réellement qu'une constante arbitraire $\mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Mais on vérifiera par substitution que (4) est satisfaite pour :

$$y = e^{rx}(\mathrm{A} + \mathrm{B}x).$$

2°. — La proposition est générale. Si l'équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire, sans second membre, à coefficients constants, a une racine r d'ordre m, elle admet l'intégrale :

$$y = e^{rx}(\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \ldots + \mathrm{E}x^{m-1}).$$

La démonstration se fait par substitution, en s'appuyant sur le théorème du § 43 : *quand un polynôme admet une racine d'ordre* m, *sa dérivée l'admet d'ordre* $m - 1$, *sa dérivée seconde l'admet d'ordre* $m - 2$, ...

Nous conseillons au lecteur de faire le calcul complet pour une équation de troisième ordre dont l'équation caractéristique est supposée avoir une racine triple.

285. Équation du quatrième ordre.

On rencontre fréquemment en Physique l'équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4} = b^4y.$$

Le lecteur se reportera au § 227, où sont étudiées les équations

binômes. L'équation *caractéristique* $r^4 = b^4$, rentre dans ce type. Elle admet les quatre racines :

$$+b, \qquad -b, \qquad +bi, \qquad -bi.$$

Groupant convenablement les exponentielles e^{bx}, e^{-bx}, on met la solution sous la forme :

$$y = A \cos bx + B \sin bx + C \cosh bx + D \sinh bx.$$

L intégrale générale contient quatre constantes arbitraires qui seront déterminées, par exemple, au moyen des valeurs de deux des dérivées :

$$\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = l.$$

Dans la Théorie de l'Élasticité, cette équation sert à l'étude des vibrations des verges vibrantes; l est la longueur de la verge.

286. Équation du second ordre avec second membre exponentiel.

1°. — Soit l'équation : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2a\dfrac{dy}{dx} + by = Ae^{\omega x}$. (1)

Il faut ajouter, à l'intégrale *générale* de l'équation privée de second membre (qui aura les deux constantes arbitraires nécessaires), une intégrale *particulière* n'ayant aucune arbitraire et faisant simplement disparaître le second membre. Essayons l'expression :

$$y = Be^{\omega x};$$

substituons dans (1). Il vient la condition :

$$B(\omega^2 - 2a\omega + b) = A. \qquad (2)$$

2°. — La condition (2) est illusoire quand ω est racine de l'équation caractéristique, par exemple quand on a simultanément :

$$a = 0, \qquad \omega^2 + b = 0.$$

Étudions donc l'équation : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \omega^2 y = Ae^{\omega x}$.

On vérifie aisément qu'elle admet l'intégrale particulière :

$$y = \frac{Ax}{2\omega} e^{\omega x}.$$

Les solutions sont semblables dans le cas où ω est négatif.

Connaissant les relations (§ 230) entre les exponentielles imaginaires et les arcs, nous pourrions déduire de ce qui précède les résultats relatifs au second membre sinusoïdal; il est préférable de reprendre la question.

287. Équation du second ordre avec second membre sinusoïdal.

Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + by = \mathrm{A} \sin \omega x. \qquad (1)$$

1°. — Montrons qu'il existe une intégrale particulière de la forme :

$$y = -\frac{\mathrm{A} \sin \varepsilon}{2a\omega} \sin(\omega x - \varepsilon). \qquad (2)$$

Substituons (2) dans (1) :

$$\omega^2 \sin \varepsilon \sin(\omega x - \varepsilon) + 2a\omega \sin \varepsilon \cos(\omega x - \varepsilon) - b \sin \varepsilon \sin(\omega x - \varepsilon)$$
$$= 2a\omega \sin \omega x.$$

Prenons comme nouvelle variable $z = \omega x - \varepsilon$:

$$\omega^2 \sin \varepsilon \sin z + 2a\omega \sin \varepsilon \cos z - b \sin \varepsilon \sin z = 2a\omega \sin(z + \varepsilon).$$

Cette équation devant être identiquement satisfaite, développons $\sin(z + \varepsilon)$; égalons dans les deux membres les coefficients de $\sin z$ et de $\cos z$. D'où les conditions :

$$(\omega^2 - b) \sin \varepsilon = 2\,a \cos \varepsilon, \qquad 2a \sin \varepsilon = 2a \sin \varepsilon.$$

La seconde est une identité. La première donne :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2a}{\omega^2 - b}. \qquad (3)$$

2°. — L'intégrale générale se compose donc de l'intégrale de l'équation (1) privée de second membre (*solution amortie*), à laquelle on ajoute l'intégrale particulière (2) (*solution permanente*) :

$$y = e^{ax} \mathrm{M} \cos(\beta x - \mu) - \frac{\mathrm{A} \sin \varepsilon}{2a\omega} \sin(\omega x - \varepsilon). \qquad (4)$$

En effet, (4) contient deux constantes arbitraires M et μ, et satisfait évidemment à l'équation (1), puisque l'intégrale particulière fait disparaître le second membre.

3°. — Cas ou $a = 0$.

Supposons $a = 0$; la solution particulière semble indéterminée. Mais faisons a très petit ; ε étant très petit, on a :

$$\frac{\sin \varepsilon}{2a} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2a} = \frac{1}{\omega^2 - b},$$

quantité qui est indépendante de ε. Donc pour $\varepsilon = 0$, il vient :

$$y = \frac{\mathrm{A}}{b - \omega^2} \sin \omega x.$$

4°. — La solution précédente ne vaut plus si $b = \omega^2$. C'est dire que la période de l'intégrale générale de l'équation (1), privée du

second membre, est précisément égale à la période du second membre. Dans ce cas, on trouve une solution particulière *indéfiniment croissante :*

$$y = -\frac{A}{2\omega} x \cos \omega x.$$

288. Intégrales particulières de l'équation du second ordre compliquée de termes petits. Équation des sons résultants.

Jusqu'à présent les intégrales des équations étudiées s'exprimaient rigoureusement au moyen des fonctions usuelles. Il n'en est généralement pas ainsi. Quelquefois l'intégration approchée n'est possible qu'en vertu de la petitesse des termes qui compliquent l'équation différentielle simple.

Voici un exemple où l'on ne désire qu'une solution *particulière permanente* approchée : nous y trouverons un développement en série par approximations successives.

Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + by + cy^2 + P \sin 2\pi px + Q \sin (2\pi qx + \delta) = 0. \qquad (1)$$

Si le coefficient c était nul, nous calculerions exactement l'intégrale particulière qui correspond au phénomène périodique permanent, en opérant comme au paragraphe précédent. Nous supposerons que le coefficient c est petit.

Développons la solution en série par rapport à un paramètre auxiliaire ε.

Posons : $y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \ldots; \quad P = \varepsilon P_1, \quad Q = \varepsilon Q_1. \quad (2)$

Substituons dans (1) ; égalons séparément à 0 les coefficients des diverses puissances de ε. Nous faisons ainsi une série d'approximations.

Comme première approximation, nous avons :

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + by_1 + P_1 \sin 2\pi px + Q_1 \sin (2\pi qx + \delta) = 0. \qquad (3)$$

Elle revient à négliger le terme en y^2. Nous savons que l'intégrale *permanente* correspondante (§ 287) est la somme de deux fonctions périodiques de fréquences p et q. Cela veut dire que chaque terme de la solution reprend respectivement la même valeur quand x croît d'un nombre entier de fois $1 : p$, ou $1 : q$. L'équation différentielle approchée étant linéaire, il y a superposition pure et simple des effets des deux *causes* représentées par les deux termes périodiques.

La seconde approximation donne :

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} + by_2 + cy_1^2 = 0. \qquad (4)$$

Il faut introduire à la place de y_1 l'intégrale précédemment trouvée dont la partie permanente est de la forme :

$$y_1 = P'_1 \sin 2\pi px + Q'_1 \sin(2\pi qx + \delta).$$

Développons les carrés des sinus et leurs produits.

Nous aurons y_1^2 en fonction de :

$$\sin 2\pi(2p)x, \quad \sin 2\pi(2q)x, \quad \sin 2\pi(p - q)x, \quad \sin 2\pi(p + q)x.$$

Substituons dans (4) ; nous retombons sur une équation de la forme (2). Elle nous apprend que, *comme seconde approximation,* le mouvement est la somme de fonctions périodiques de fréquences $2p$, $2q$ (harmoniques des fréquences p et q), $p - q$, $p + q$ (fréquences des sons résultants différentiel et additionnel).

Naturellement si les *causes* sont faibles, les amplitudes des harmoniques et des sons résultants sont petites ; mais elles croissent vite quand les causes augmentent d'intensité.

La troisième approximation donne :

$$\frac{d^2y_3}{dx^2} + by_3 + 2ay_1y_2 = 0.$$

Nous n'avons qu'à répéter les raisonnements et les calculs précédents pour prouver l'existence, dans la partie permanente de l'intégrale, de fonctions périodiques de fréquences :

$$3p, \quad 3q, \quad 2p + q, \quad 2q + p, \quad 2p - q, \quad 2q - p.$$

Il va de soi que si P ou Q sont nuls, il ne reste que les harmoniques $2q$, $3q$, ..., ou $2p$, $3p$, ... de la cause qui subsiste.

Le phénomène qu'interprète cette théorie est celui des *sons résultants.* Quand deux sons d'intensités suffisantes agissent simultanément sur un résonateur *dyssymétrique* (par exemple, l'oreille), on entend non seulement ces sons, mais leurs harmoniques et leurs sons résultants. Le premier différentiel est particulièrement facile à distinguer.

289. Équation du second ordre où le coefficient de la dérivée première est variable. Remarques sur les résultats précédents.

Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

On vérifiera que l'intégrale générale est :

$$y = \frac{A \sin(\omega x + \varepsilon)}{x}, \quad \text{avec la condition} \quad b = \omega^2.$$

Montrons comment la nature de ce résultat et de quelques-uns des précédents pouvait être prévue. L'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + by = 0$$

est celle du pendule, pourvu que b soit positif. Si x représente le temps, y l'élongation, l'équation exprime en effet que l'accélération (négative) est proportionnelle à l'élongation ; autrement dit, que la force tend à ramener le mobile à sa position d'équilibre proportionnellement à la distance à cette position.

On trouve des oscillations *isochrones*, c'est-à-dire dont la période est indépendante de l'amplitude.

Ajouter un terme $-2a\frac{dy}{dx}$, où a est négatif, c'est introduire une force proportionnelle à la vitesse, *un frottement*. Les oscillations sont amorties ; elles peuvent même l'être à tel point que le mouvement cesse d'être périodique : l'intégrale *apériodique* s'exprime à l'aide d'exponentielles (§ 283, *3°*).

Introduire le terme $\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}$, c'est donc introduire un frottement *qui diminue avec le temps*. On s'explique alors comment le temps peut intervenir au dénominateur de l'amplitude et comment l'intégrale contient un facteur périodique.

Intégration par les séries.

290. Application des séries de Taylor ou de Maclaurin.

1°. — Considérons d'abord une équation du premier ordre :

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \qquad (1)$$

Il est clair que pour toute valeur de x et de y, nous connaissons $dy : dx$. Mais nous pouvons aussi calculer toutes les autres dérivées. On a, en effet :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y},$$

et ainsi de suite. Puisque l'intégrale comporte une constante arbitraire; autrement dit, puisque la seule condition à satisfaire est exprimée par l'équation (1), on peut choisir la valeur de y pour une valeur de x, par exemple pour $x=0$ (§ 275, *1°*).

2°. — Soit connue la fonction $y=\varphi(x)$, intégrale de l'équation (1). Développons-la par la formule de Maclaurin. On a :

$$y=(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1!}\varphi'(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\cdots$$

Or nous pouvons calculer toutes les dérivées de la fonction $\varphi(x)$, par suite leurs valeurs pour $x=0$; donc nous connaissons tous

les coefficients du développement en série. Il peut servir à calculer les valeurs de y pour toutes les valeurs de x qui laisseront la série convergente. La constante arbitraire est $\varphi(0)$.

3°. — Ce que nous venons de dire s'applique à une équation différentielle quelconque d'ordre quelconque. Soit :

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Par dérivations successives nous pouvons calculer les dérivées d'un ordre quelconque supérieur à n. Elles seront toutes connues, par exemple pour $x=0$, à la condition de choisir arbitrairement la valeur de y et de ses $n-1$ premières dérivées pour $x=0$; *ce sont les constantes arbitraires d'intégration.*

On pourra donc obtenir tous les coefficients de la série :

$$y=\varphi(0)+\frac{x}{1\,!}\varphi'(0)+\frac{x^2}{2\,!}\varphi''(0)+\ldots$$

sauf les n premiers qui, par leur indétermination, donnent à la solution la généralité nécessaire.

3°. — Si, pour $x=0$, les dérivées à partir d'un ordre quelconque deviennent infinies, on emploie le développement de Taylor (§ 254) en remplaçant h par $x-a$, x par a, conséquemment $x+h$ par x :

$$y=\varphi(x)=\varphi(a)+\frac{x-a}{1\,!}\varphi'(a)+\frac{(x-a)^2}{2\,!}\varphi''(a)+\ldots$$

D'après la façon même dont nous opérons, la série qu'on obtient est précisément celle qu'on obtiendrait en partant de l'intégrale générale supposée connue qu'on développerait par la formule de Taylor.

291. Exemples.

Retrouvons par développement en série quelques résultats connus.

1°. — Soit à intégrer l'équation : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$. (1)

On a : $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$, $y'''=\dfrac{1\,.\,2}{x^3}$, $y^{\text{IV}}=-\dfrac{1\,.\,2\,.\,3}{x^4}$, ...

Toutes les dérivées deviennent infinies pour $x=0$; développons donc à partir d'une autre valeur de x, par exemple $x=1$. On a :

$$\varphi(x)=\varphi(1)+\frac{x-1}{1\,!}-\frac{(x-1)^2}{2\,!}+\frac{2\,!\,(x-1)^3}{3\,!}-\frac{3\,!\,(x-1)^4}{4\,!}+\ldots$$

A la place de x, prenons $x-1$ comme nouvelle variable; remplaçons donc x par $x+1$. Posons $\varphi(1)$ *qui est arbitraire,* égal à 0. La fonction qui (dans ces conditions) satisfait à l'équation différentielle (1), est donc :

$$\varphi(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Il nous est loisible de l'appeler *logarithme naturel de* $1+x$ (§ 256).

2°. — Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0, \qquad y''=-y. \tag{2}$$

On a :

$$y'''=-y', \qquad y^{\text{IV}}=-y''=y, \qquad y^{\text{V}}=y', \qquad y^{\text{VI}}=y''=-y,$$

et ainsi de suite. Naturellement y et y' restent arbitraires pour *une* valeur arbitraire de x. Le développement en série est :

$$y=\varphi(0)+\frac{x}{1\,!}\varphi'(0)-\frac{x^2}{2\,!}\varphi(0)-\frac{x^3}{3\,!}\varphi'(0)+\frac{x^4}{4\,!}\varphi(0)+\cdots$$

Posons : $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. Je définis ainsi une fonction qui satisfait à l'équation (2) et qu'il m'est loisible d'appeler $\sin x$:

$$\sin x=\frac{x}{1\,!}-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\cdots$$

Posons : $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$. Je définis ainsi une fonction qui satisfait à l'équation (2) et qu'il m'est loisible d'appeler $\cos x$:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}-\cdots$$

Je retrouve les résultats connus (§ 257).

3°. — Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{dy}{dx}=y, \qquad y'=y; \tag{3}$$

$$y''=y'=y, \qquad y'''=y''=y, \ldots$$

Le développement est donc :

$$y=\varphi(0)\left[1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\cdots\right];$$

$\varphi(0)$ est arbitraire. Posons-le égal à 1. Je définis une fonction qu'il m'est loisible d'appeler *exponentielle :*

$$y=e^x=1+\frac{x}{1\,!}+\frac{x^2}{2\,!}+\cdots$$

292. Autres exemples.

1°. — Soit à intégrer :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-xy, \qquad y''=-xy. \tag{1}$$

$$y'''=-y-xy', \qquad y^{\text{IV}}=-2y'-xy''=-2y'+x^2y,$$

$$y^{\text{V}}=-2y''+2xy+x^2y'=4xy+x^2y', \qquad y^{\text{VI}}=4y+6xy'-x^3y,\ldots$$

D'où le développement :

$$y = \left[\varphi(0) + \varphi'(0)\frac{x}{1}\right] - \left[\varphi(0)\frac{x^3}{3!} + 2\varphi'(0)\frac{x^4}{4!}\right]$$
$$+ \left[4\varphi(0)\frac{x^6}{6!} + 10\varphi'(0)\frac{x^7}{7!}\right] - \cdots$$

Il reste à choisir les valeurs $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ de y et y' pour $x = 0$.

2°. — Soit à intégrer :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dy}{dx} + by = 0, \qquad (2)$$

dont nous avons rencontré un cas particulier au § 289. On a :

$$xy'' + my' + bxy = 0,$$
$$xy''' + (m+1)y'' + bxy' + by = 0,$$
$$xy^{\text{IV}} + (m+2)y''' + bxy'' + 2by' = 0;$$

la loi de récurrence est évidente.

Faisons $x = 0$, on trouve : $y' = 0$. Donc, par ce procédé, nous n'aboutissons pas à une intégrale générale, puisque la valeur de la dérivée première est imposée. Nous ne déterminons qu'une intégrale particulière autour de la valeur $x = 0$. On a :

$$y''_0 = -\frac{by_0}{m+1}, \qquad y'''_0 = 0, \qquad y^{\text{IV}}_0 = \frac{3b^2y_0}{(m+3)(m+1)}, \cdots$$

Substituant, on trouve :

$$y = y_0\left[1 - \frac{1.\,bx^2}{2!\,(m+1)} + \frac{1.\,3.\,b^2x^4}{4!\,(m+1)(m+3)} - \right.$$
$$\left. \frac{1.\,3.\,5.\,b^3x^6}{6!\,(m+1)(m+3)(m+5)} + \cdots\right.$$

Pour $m = 1$, $b = 1$:

$$y = y_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\,4^2} - \frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2} + \cdots\right).$$

L'équation ici étudiée est une des formes de l'*équation de Bessel*.

Pour $m = 2$, $b = 1$:

$$y = y_0\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right) = y_0\frac{\sin x}{x}.$$

C'est une intégrale particulière de l'intégrale générale trouvée au § 289.

293. Intégration des séries.

1°. — Soit une série dont les termes sont fonction d'une variable x et qui est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et x_1. Il s'agit de montrer que la série des intégrales de ses termes, prises entre les limites x_0 et x_1, est conver-

gente et a pour somme l'intégrale de la somme de la série proposée prise entre les mêmes limites.

Soit en effet : $f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n$.

Puisque la série est convergente entre les limites x_0 et x_1, le reste (§ 254) R_n est infiniment petit quand n croît indéfiniment.

Intégrons :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0\,dx + \ldots \qquad + \int_{x_0}^{x_1} R_n\,dx.$$

Tant que le nombre des termes reste fini, il n'y a pas de doute sur la légitimité de cette expression (§ 153, *4*°). Cherchons ce qui arrive quand on suppose le nombre des termes croissant indéfiniment.

L'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} R_n\,dx$ est égale au produit de $x_0 - x_1$ par la valeur moyenne de $R = R\left[(x_0 + \theta(x_0 - x_1.)\right]$ (§ 155) ; elle est, par suite, infiniment petite quand n croît indéfiniment : d'où la proposition énoncée.

2°. — La réciproque n'est pas vraie. Une série peut être convergente, et la série des dérivées de ses termes ne l'être pas.

Par exemple, la série :

$$1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots$$

est convergente pour toute valeur de x ; la série :

$$-(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \ldots)$$

n'est convergente pour aucune valeur de x.

Mais on démontre que *si la série des dérivées des termes du développement de $f(x)$ est convergente, elle a pour somme la dérivée $f'(x)$.* Nous n'insisterons pas sur la démonstration.

3°. — Il résulte du *1*° un procédé d'intégration. Soit à intégrer :

$$\int_0^x f(x)dx.$$

Développons $f(x)$ en une série convergente : nous obtiendrons l'intégrale en sommant les termes de la série entre les mêmes limites.

294. Exemples.

1°. — Soit à intégrer : $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, pour $x < 1$.

Développons par la formule du binôme (§ 258) :

$$(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} + \ldots$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^9}{9} + \ldots$$

2°. — Soit à intégrer : $\int_0^x e^{-x^2}\,dx.$

On a (§ 256) : $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots$

D'où : $\int_0^x e^{-x^2}\,dx=\frac{x}{1}-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\dots$

3°. — Soit à intégrer : $f(x)=\int\frac{dx}{\log x}.$

Prenons pour nouvelle variable : $t=\log x,\qquad x=e^t.$

$$f(x)=\int\frac{e^t}{t}\,dt=\int\left(\frac{1}{t}+1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\dots\right)dt.$$

$$f(x)=\left[C+\log t+t+\frac{t^2}{2!\,2}+\frac{t^3}{3!\,3}+\dots\right]$$

$$=\left[C+\log(\log x)+\log x+\frac{(\log x)^2}{2!\,2}+\frac{(\log x)^3}{3!\,3}+\dots\right].$$

295. Méthode des coefficients indéterminés.

1°. — Si la fonction définie par une équation différentielle peut se développer en une série suivant les puissances négatives ou fractionnaires de la variable, on obtient le développement par la *méthode des coefficients indéterminés,* plus commode que celle du § 290.

Elle consiste à substituer dans l'équation différentielle la série :

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\dots,\qquad(1)$$

et à déterminer les coefficients A, B,... et les exposants α, β,... de manière à rendre identique l'équation obtenue.

2°. — Prenons comme exemple l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=kx^ny,\qquad(n>0).\qquad(2)$$

La substitution donne :

$$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+\dots=kAx^{\alpha+n}+kBx^{\beta+n}+\dots$$

Nous supposons que les A,B,... ne sont pas nuls ; α *étant le plus petit exposant,* le terme de moindre degré est certainement le premier ; il est seul de son degré.

Il faut donc poser : $\alpha(\alpha-1)=0.\qquad(3)$

Deux solutions possibles :

$$\alpha=0,\qquad\alpha=1.$$

Prenons la première : $\alpha=0$. Le second terme ne peut pas être

seul de son degré ; sinon nous retomberions sur la condition (3). Nous devons donc poser :

$$\beta-2=\alpha+n, \qquad \beta=\alpha+n+2=n+2,$$

dans l'hypothèse $\alpha=0$; et aussi :

$$B\beta(\beta-1)=kA, \qquad B=\frac{kA}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour la même raison que plus haut, nous avons :

$$\gamma-2=\beta+n, \qquad \gamma=\beta+n+2=\alpha+2(n+2),$$

$$C\gamma(\gamma-1)=kB,$$

$$C=\frac{kB}{(2n+3)(2n+4)}=\frac{kA}{(n+1(n+2)(2n+3)(2n+4)}.$$

Et ainsi de suite, la loi est évidente. D'où la série :

$$y=A_1\left[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+\cdots\right].$$

Nous pouvons recommencer dans l'hypothèse : $\alpha=1$. On trouve :

$$x=A_2\left[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}+\cdots\right].$$

Nous obtenons ainsi deux solutions *particulières* de l'équation (2). Comme elle est du second ordre, nous avons l'intégrale générale en les additionnant : A_1 et A_2 sont les constantes arbitraires.

3°. — Si n est positif et entier, les développements suivant les puissances positives coïncident avec ceux que donnerait la formule de Maclaurin. Si n est entier et négatif, l'une au moins des séries n'est plus acceptable, puisque certains termes deviennent infinis. Pour $n=-1$ la première est inacceptable, la seconde subsiste ; donc la méthode ne fournit qu'une intégrale particulière.

Pour $n=1$, $k=-1$, on retrouve l'intégrale générale du *1°* du § 292. Pour $n=0$, $k=-1$, on retrouve $\sin x$ et $\cos x$.

296. Équation de Riccati et ses transformées.

1°. — On appelle *équation de Riccati* l'équation :

$$\frac{dy}{dx}+gy^2=hx^n. \qquad (1)$$

On peut lui donner une série de formes qui se rencontrent en Physique et en Mécanique. Posons :

$$\log u=g\int y\,dx, \qquad gy=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Calculons la dérivée $dy : dx$ et substituons dans (1). On trouve :

$$\frac{d^2u}{dx^2}=ghux^n. \qquad (2)$$

2°. — Considérons l'équation :

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{m(m-1)}{x^2}z = hz. \qquad (3)$$

Posons : $z = x^m v$. Nous obtenons comme transformée :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2m}{x}\frac{dv}{dx} = hv. \qquad (4)$$

Nous aboutissons à un cas particulier de *l'équation de Bessel.*

3°. — Mais nous pouvons ramener l'équation (2) à la forme (4), par suite l'équation de Riccati à l'équation de Bessel.

Dans (2) changeons la variable. Nous appliquerons donc les formules du § 20.

Soit t la nouvelle variable. On a :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left[\frac{d^2u}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{du}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right] : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

Posons : $t^2 = x^{n+2}$; on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(n+2)x^{n+1}}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-2n}{(n+2)^2}\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Substituons dans (2); il vient :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{n}{n+2}\frac{1}{t}\frac{du}{dt} = ghu\frac{4}{(n+2)^2}, \qquad (5)$$

qui, à la notation près, est l'équation (2) du § 292.

Équations différentielles simultanées.

297. Équations différentielles simultanées linéaires à coefficients constants.

Expliquons le problème sur des exemples simples.

1°. — Soit les équations :

$$\frac{dx}{dt} + ax + py = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + qx + by = 0,$$

où $a, b, p, q,$ sont des constantes. Il s'agit de trouver des fonctions $x(t)$, $y(t)$ qui, substituées dans ces équations, les transforment en des identités. Essayons la solution :

$$x = Ae^{rt}, \qquad y = Be^{rt}.$$

Nous obtenons les deux conditions :

$$Ar + aA + pB = 0, \qquad Br + qA + bB = 0. \qquad (1)$$

Éliminons r :

$$A(qA + bB) = B(aA + pB), \quad qA^2 + (b-a)AB - pB^2 = 0. \qquad (2)$$

Nous déterminons ainsi deux valeurs k_1 et k_2 du rapport $B : A$. Transportons-les successivement dans l'une ou l'autre des équations (1) qui sont assurément compatibles : nous tirons pour r deux valeurs correspondantes, r_1 et r_2.

L'intégrale générale prend la forme :

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t},$$
$$y = k_1 A_1 e^{r_1 t} + k_2 A_2 e^{r_2 t}.$$

Il y a *deux* constantes arbitraires A_1, A_2. Les paramètres k_1, k_2, r_1, r_2, sont complètement déterminés par les équations (1) et (2).

2°. — Reprenons sur un cas plus compliqué.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax + py = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qx + by = 0.$$

Essayons encore la solution :

$$x = Ae^{rt}, \qquad y = Be^{rt}.$$

Nous obtenons les deux conditions :

$$\left.\begin{aligned} Ar^2 + aA + pB = 0, \\ Br^2 + qA + bB = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Éliminons r, il vient :

$$A(qA + bB) = B(aA + pB), \qquad qA^2 + (b - a)AB - pB^2 = 0. \quad (2)$$

D'où deux valeurs k_1 et k_2 du rapport $B : A$. Transportons-les successivement dans l'une ou l'autre des équations (1) : nous déterminons pour r quatre valeurs $\pm r_1$, $\pm r_2$. L'intégrale générale prend la forme :

$$x = (A_1 e^{r_1 t} + A_1' e^{-r_1 t}) + (A_2 e^{r_2 t} + A_2' e^{-r_2 t}),$$
$$y = k_1(A_1 e^{r_1 t} + A_1' e^{-r_1 t}) + k_2(A_2 e^{r_2 t} + A_2' e^{-r_2 t}).$$

Il y a *quatre* constantes arbitraires qui sont A_1, A_1', A_2, A_2'.

Si les racines sont imaginaires, la solution s'écrit :

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \alpha_2).$$
$$y = k_1 A_1 \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + k_2 A_2 \sin(\omega_2 t - \alpha_2).$$

Les *quatre* constantes arbitraires sont maintenant A_1, A_2, α_1, α_2. Les paramètres ω_1, ω_2, k_1, k_2, sont complètement déterminés par les équations (1) et (2).

298. Séparation des variables.

1°. — Théoriquement il est toujours possible de séparer les variables. Soient données les équations :

$$f(t; x, x', x'', \ldots x^m; y, y', y'', \ldots y^n) = 0,$$

$$f(t; x, x', x'', \ldots x^\mu; y, y', y'', \ldots y^\nu) = 0.$$

Dérivons par rapport à t la première ν fois, la seconde n fois. Nous obtenons en tout $n+\nu+2$ équations où entrent les $n+\nu+1$ quantités $y, y', \dots y^{n+\nu}$. Leur élimination laisse une équation différentielle en x et t, dont l'ordre ne peut surpasser, mais égale généralement le plus grand des nombres $m+\nu$, $n+\mu$.

2°. — Appliquons aux exemples précédents. On a :

$$\frac{dx}{dt}+ax+py=0, \qquad \frac{dy}{dt}+qx+by=0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+p\frac{dy}{dt}=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}+q\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}=0.$$

On tire immédiatement des trois premières équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}-pqx-bpy=0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(a+b)\frac{dx}{dt}+(ab-pq)x=0.$$

L'intégrale générale de cette équation contient *deux* constantes arbitraires : pour une valeur arbitraire de la variable t, je peux choisir x et x'. Les valeurs de y, y', y'' sont alors complètement déterminées : y par la première équation, y' par la seconde ou la troisième, y'' par la quatrième. On peut aussi bien obtenir l'équation en y :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a+b)\frac{dy}{dt}+(ab-pq)y=0.$$

C'est la même, puisque l'équation caractéristique (§ 283) doit fournir les mêmes racines r_1 et r_2.

3°. — On a : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+ax+py=0, \qquad \dfrac{d^2y}{dt^2}+qx+by=0.$

Dérivons deux fois la première :

$$\frac{d^4x}{dt^4}+a\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Utilisons les deux premières pour éliminer la variable y :

$$\frac{d^4x}{dt^4}+(a+b)\frac{d^2x}{dt^2}+(ab-pq)x=0,$$

et aussi bien : $\dfrac{d^4y}{dt^4}+(a+b)\dfrac{d^2y}{dt^2}+(ab-pq)y=0.$

L'équation caractéristique est bicarrée ; elle donnera immédiatement les quatre racines $\pm r_1$, $\pm r_2$.

299. Remarques sur les équations différentielles simultanées.

1°. — Ainsi les intégrales du système de *deux* équations simultanées du premier ordre contiennent *deux* constantes arbitraires ; celles

du système de *deux* équations du second en contiennent *quatre*. On verra que les problèmes de Mécanique se ramènent généralement à *trois* équations simultanées du second ordre, reliant les composantes de l'accélération du mobile parallèlement aux axes à la somme des composantes des forces suivant les mêmes axes. En général, les intégrales contiennent *six* constantes arbitraires qui permettent d'imposer à une époque donnée la position du mobile et sa vitesse.

Nous ne démontrerons pas la proposition générale dont voici l'énoncé : *le nombre des constantes arbitraires est au plus égal à la somme des ordres les plus élevés de toutes les variables.*

2°. — Par exemple, considérons le système :

$$\frac{dx}{dt} + ax + py = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + by + qz = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + cz + sx = 0.$$

Essayons la solution : $x = Ae^{rt}$, $y = Be^{rt}$, $z = Ce^{rt}$.

On a pour conditions :

$$A(r+a) + pB = 0, \quad B(r+b) + qC = 0, \quad C(r+c) + sA = 0. \qquad (1)$$

Convenablement écrites et multipliées membre à membre, ces équations donnent :

$$(r+a)(r+b)(r+c) + pqs = 0, \qquad (2)$$

équation du troisième degré en r. A chacune des trois racines r_1, r_2, r_3, correspondent des rapports bien déterminés :

$$k_1, k_2, k_3 = B : A, \qquad g_1, g_2, g_3 = C : A.$$

Les intégrales générales sont :

$$x = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + A_3e^{r_3t},$$

$$y = k_1A_1e^{r_1t} + k_2A_2e^{r_2t} + k_3A_3e^{r_3t},$$

$$z = g_1A_1e^{r_1t} + g_2A_2e^{r_2t} + g_3A_3e^{r_3t}.$$

Il y a *trois* constantes arbitraires qui sont : A_1, A_2, A_3.

3°. — Ce nombre de constantes est un maximum. Il peut arriver qu'il ne soit pas atteint; par exemple, quand les équations ne sont compatibles que s'il existe une certaine relation *finie* entre les variables.

Soit le système : $f(x', y', x, y, t) = \varphi(x, y, t)$,

$$f(x', y', x, y, t) = \psi(x, y, t).$$

On doit avoir la relation *finie* : $\varphi(x, y, t) = \psi(x, y, t)$,

qui permet d'éliminer l'une des fonctions x ou y. Il ne reste plus qu'une équation différentielle du premier ordre et par suite une seule constante arbitraire.

4°. — Il est bien rare que les intégrales d'un système d'équations différentielles simultanées puissent s'exprimer avec les fonctions usuelles. On est amené à les développer en séries. Si remarquables que soient en Astronomie la forme de ces développements, le cadre de cet ouvrage nous empêche d'insister (voir Mécanique, §§ 351 et 582).

CHAPITRE XIV

INTÉGRALES DÉFINIES. INTÉGRALES DOUBLES

300. Intégrales indéfinies, intégrales définies. Puissances d'un sinus ou d'un cosinus.

1°. — On appelle *intégrale indéfinie* (§ 154, *2°*) :

$$\int f(x)dx,$$

celle dont on n'a pas encore spécifié les limites. Elle n'est déterminée qu'à une constante près *qui pour l'instant est absolument arbitraire.*

Elle devient *définie* quand on se donne ses limites :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

On peut déterminer exactement et directement la valeur de certaines intégrales pour des limites particulières, alors que pour des limites quelconques les expressions sont compliquées ou les résultats ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Voici quelques exemples.

2°. — Montrons d'abord que le calcul d'une intégrale définie peut être immédiat. Les deux intégrales :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx, \qquad I'_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx,$$

sont évidemment égales, puisque leurs éléments se correspondent deux à deux : $\sin x = \cos(\pi : 2 - x)$.

On a donc :

$$2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

3°. — On a :

$$\int \sin^m x \,.\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \,.\, \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x \,.\, dx.$$

En effet, la dérivation des deux membres de cette équation donne :

$$\sin^m x = -\frac{m-1}{m}\sin^{m-2}x \,.\, \cos^2 x + \frac{\sin^m x}{m} + \frac{m-1}{m}\sin^{m-2}x,$$

qui est une identité. On trouve de même :

$$\int \cos^m x \,.\, dx = \frac{\cos^{m-1}x \,.\, \sin x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}x \,.\, dx.$$

Intégrons entre des limites qui annulent les premiers termes des seconds membres, par exemple, 0 et $\pi : 2$; il vient :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \,.\, dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x \,.\, dx,$$

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \,.\, dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2}x \,.\, dx.$$

relations qui s'écrivent : $\quad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$

Supposons m pair et opérons de proche en proche; nous trouvons :

$$I_m = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6(m-2)m}\frac{\pi}{2}; \qquad \text{en particulier } I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Supposons m impair, ($m = 1$ excepté, pour lequel $I_1 = 1$); nous trouvons : $\quad I_m = \frac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots\quad m}.$

301. Fonction définie par une intégrale définie au moyen d'un paramètre variable sous le signe $\int$.

1°. — Nous avons maintes fois rencontré des faisceaux de courbes :

$$y = f(x,\ u).$$

Pour chaque courbe du faisceau, le paramètre u est constant; l'ordonnée y est fonction de x. On passe d'une courbe à l'autre en changeant la valeur du paramètre. Par exemple, des cercles de même centre et de rayons différents forment un faisceau : la grandeur du rayon est le paramètre variable.

Avec l'axe Ox et deux ordonnées *fixes* AA', BB', chaque courbe du faisceau délimite une certaine aire S, qui est fonction du paramètre u, puisqu'on la modifie en changeant la courbe et conséquemment le paramètre (fig. 193).

On a : $$S = \int_a^b f(x,\ u)dx = \varphi(u). \qquad (1)$$

2°. — Cherchons la dérivée de $S(u)$ par rapport à u; c'est

le taux de variation $dS : du$, quand u subit un accroissement infiniment petit à partir de sa valeur actuelle.

Si l'intégration (1) est possible avec les fonctions que nous connaissons, elle fournit une certaine fonction $\varphi(u)$ qu'il suffit de dériver pour obtenir le quotient demandé.

Mais cette intégration est généralement impossible ; il s'agit de trouver une expression qui ne la suppose pas.

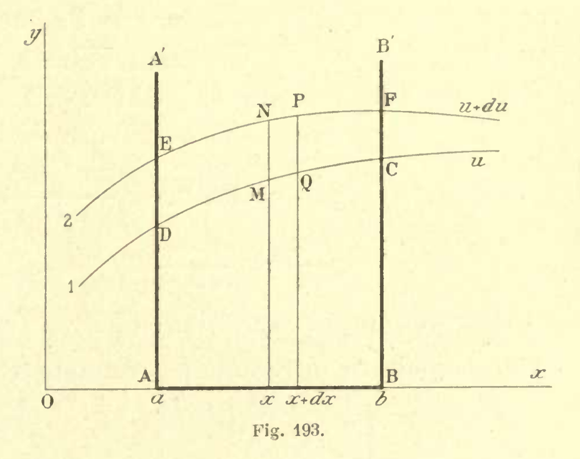


Fig. 193.

3°. — Reportons-nous à la figure 193.

Quand on remplace la courbe 1 (paramètre u) par la courbe voisine 2 (paramètre $u+du$), l'aire ADCB augmente de la bande DEFC. Celle-ci se décompose en une série de *parallélogrammes* tels que MNPQ (les courbes sont infiniment voisines) de base dx et de hauteur MN.

Or MN est ce dont croît l'ordonnée $f(x, u)$ quand u croît de du, x restant invariable. On a donc :

$$\text{aire MNPQ} = \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \,.\, du\, dx.$$

L'aire de la bande DEFC est la somme de ces aires quand x varie de a à b. D'où :

$$\frac{dS}{du} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \,.\, dx.$$

4°. — Inversement supposons que sous le signe $\int$ se rencontre la dérivée d'une fonction par rapport au paramètre u qu'elle contient.

On a : $$\psi(u) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} f(x, u)\, du\,;$$

par suite : $$\int_{u_0}^{u} \psi(u)\, du = \int_a^b \Big[f(x, u) - f(x, u_0) \Big] dx.$$

On vérifiera cette dernière relation en dérivant ses deux membres par rapport à u, ce que le *3°* apprend à faire.

Voici des exemples pour fixer les idées.

302. Premier exemple.

Une droite se déplace de manière que la portion $\overline{MN}$ interceptée par les axes soit constante et égale à $l = \overline{OP}$ (fig. 194).

Cherchons l'expression de l'aire $S = \overline{ADCB}$, qu'elle limite, aire comptée positivement au-dessus de Ox, négativement au-dessous. Posons : $\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b.$

L'équation de la droite est (§ 131) :

$$y = x \operatorname{tg} u + l \sin u \,; \qquad u \text{ varie de } \pi \text{ à } \pi : 2.$$

$$S(u) = \int_a^b (x \operatorname{tg} u + l \sin u)dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \operatorname{tg} u + (b-a)l \sin u \,;$$

$$\frac{dS}{du} = \frac{b^2 - a^2}{2 \cos^2 u} + (b-a)l \cos u.$$

On trouve la même expression en dérivant sous le signe $\int$ par rapport à u, puis en intégrant le résultat. Ici l'intégration est possible ; nous obtenons seulement une vérification du théorème. Mais quand elle ne l'est pas, il est souvent commode de discuter les variations de S, de chercher ses maximums et minimums sur l'intégrale de la fonction $f(x, u)$ dérivée par rapport à u.

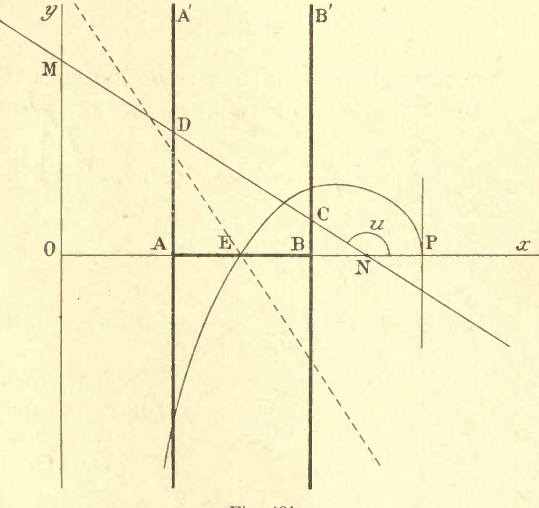


Fig. 194.

Revenons à notre exemple.

Pour $u = \pi$, la droite est couchée sur Ox ; l'aire S est nulle. Elle s'annule de nouveau quand la droite passe par le point E milieu de AB : l'aire positive est égale à l'aire négative. On a alors :

$$-2l \cos u = b + a.$$

Elle passe par un maximum pour l'angle u donné par l'équation :

$$-2l \cos^3 u = b + a.$$

Enfin elle devient négative et très grande quand u tend vers $\pi : 2$.

On pourrait aussi bien prendre comme variable l'abscisse $\xi = \overline{ON}$ du point N où la droite coupe Ox. On a :

$$\xi = -l \cos u, \qquad S(\xi) = (b-a)\sqrt{l^2 - \xi^2}\left[1 - \frac{b+a}{2\xi}\right].$$

La courbe de la figure 194 représente S en fonction de ξ. Le lecteur construira S en fonction de u et comparera les courbes obtenues.

303. Second exemple.

Prenons comme faisceau de courbes celui du § 203. Posons :

$$S(u) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^u}. \qquad (1)$$

L'aire est une fonction de la courbe choisie, définie par l'exposant u (bien entendu, supposé > 1). Ici encore l'intégration est possible; on a simplement :

$$S(u) = \frac{1}{u-1}. \qquad (2)$$

Prenons u et S comme coordonnées : l'équation (2) définit une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont l'axe des abscisses et l'ordonnée $u = 1$.

304. Troisième exemple.

1°. — Soit à calculer les intégrales indéfinies :

$$C = \int e^{ax} \cos bx \,.\, dx, \qquad S = \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

L'intégration par parties (§ 158) donne :

$$C = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{bS}{a}, \qquad S = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{bC}{a}.$$

Résolvons ces équations par rapport à C et à S, il vient :

$$C = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} \,.\, e^{ax} + \text{Constante}, \qquad (1)$$

$$S = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} \,.\, e^{ax} + \text{Constante}. \qquad (2)$$

2°. — Remplaçons a par $-a$; calculons les valeurs des intégrales définies :

$$C_1 = \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx \,.\, dx, \qquad S_1 = \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx \,.\, dx.$$

Pour la limite supérieure, les expressions (1) et (2) s'annulent; pour la limite inférieure, l'exponentielle devient l'unité.

On trouve en définitive :

$$C_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad S_1 = \frac{b}{a^2 + b^2}. \qquad (3)$$

3°. — Considérons C_1 et S_1 comme fonctions de a. Nous pouvons

donc multiplier les quantités qui sont sous les signes $\int$, par da et intégrer entre deux limites, a et c, par exemple. C'est effectuer l'opération étudiée au § 301, *4°*. Il vient :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cdot \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \log\left(\frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}\right), \qquad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cdot \sin bx\, dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} - \operatorname{arctg}\frac{c}{b}. \qquad (5)$$

On vérifiera ces identités, en considérant c comme une constante et en dérivant sous le signe $\int$ par rapport à a. De même, on dérivera les seconds membres par rapport à a.

4°. — Posons dans les équations précédentes $c = 0$, $a = \infty$. L'intégrale (4) est évidemment infinie. L'intégrale (5) devient :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 0 = \pm \frac{\pi}{2}. \qquad (6)$$

On doit prendre le signe $+$ si $b > 0$, le signe $-$ si $b < 0$. Cherchons à nous représenter le sens de ce résultat utilisé au § 270.

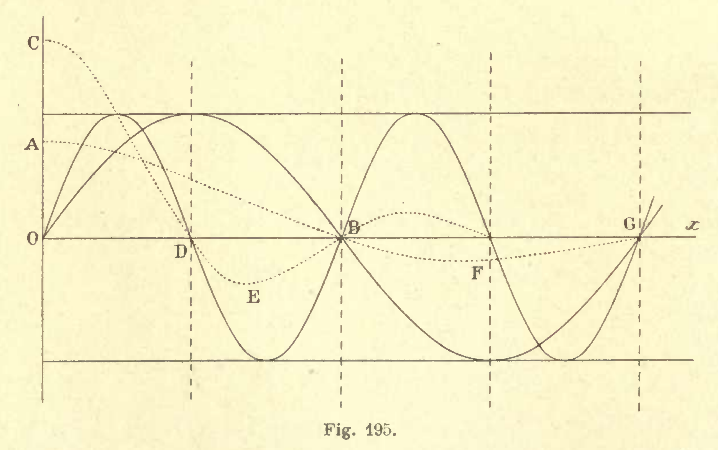


Fig. 195.

Remarquons d'abord que le résultat est indépendant de b. Si nous posons :

$$bx = u, \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u},$$

il vient :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du.$$

Nous avons étudié au § 62 la fonction $\sin x : x$. Construisons les fonctions $\sin bx : x$ pour deux valeurs de b, b et β. La figure 195 représente en traits pleins les sinusoïdes, en pointillé les courbes obtenues en divisant les ordonnées par les abscisses correspondantes.

On a, quel que soit a :

$$\int_0^a \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^{ab} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

et par suite :

$$\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{a}{\beta}} \frac{\sin \beta x}{x}\,dx. \qquad (7)$$

En particulier faisons $a = \pi$. La première et la troisième intégrales représentent les aires OAB, OCD ; l'équation (7) exprime qu'elles sont égales. On démontrerait de même l'égalité des aires BFG, DEB ; ... et ainsi de suite.

L'intégrale :
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

se compose donc d'une série infinie de termes décroissants OAB, BFG, ... alternativement positifs et négatifs, indépendants du nombre b. La série est convergente (§ 249, *3°*). L'équation (6) nous apprend que sa valeur est $\pi : 2$.

La figure 195 suppose $b > 0$. Si $b < 0$, tous les termes de la série changent de signes ; la valeur devient $-\pi : 2$.

Fig. 196.

5°. — Nous pouvons considérer l'intégrale :

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \varphi(b),$$

comme une fonction de b. La courbe représentative (fig. 196) se compose de deux droites AB, CD, qui s'arrêtent brusquement aux points où elles rencontrent l'axe des ordonnées. A l'abscisse $b = 0$, correspond la valeur $y = 0$, moyenne des valeurs $\pm \pi : 2$.

Intégrales doubles et triples.

305. Définition des intégrales doubles.

1°. — Soit à évaluer le volume du solide limité par le plan xOy, par un cylindre dont les génératrices, parallèles à Oz, s'appuient

sur une courbe ABCD ... A, enfin par une surface dont la distance des points au plan xOy est :

$$z = f(x, y).$$

Découpons le plan xOy en éléments *finis* ΔS au moyen de *deux faisceaux* de courbes (par exemple : des droites parallèles aux deux axes de coordonnées; des cercles concentriques ayant O pour centre et des droites passant par le point O; ...). Le volume de chaque élément est *approximativement* $z\Delta S$, où z est la hauteur qui correspond à un point de l'élément. Comme rien ne fixe le choix de ce point, l'approximation est d'autant meilleure que nous diminuons l'arbitraire, c'est-à-dire que nous prenons les éléments plus petits.

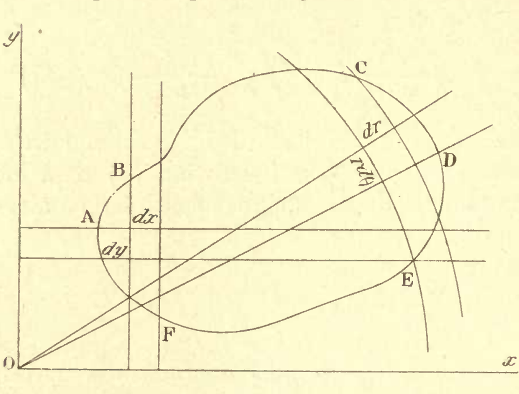


Fig. 197.

La valeur approchée du volume est :

$$V = \sum z\Delta S;$$

le symbole $\sum$ signifie qu'on prend tous les éléments ΔS du plan xOy qui se trouvent dans la courbe fermée ABC ... A.

L'approximation ne dépend pas de la forme des éléments, pourvu que dans les divers modes de décomposition ils soient d'aires du même ordre. Elle est meilleure si, au lieu de prendre au hasard dans l'élément le point où l'on mesure la hauteur z, on le choisit toujours au centre de figure : il y a chance pour qu'une compensation plus exacte s'opère entre les parties moins hautes et les parties plus hautes du volume élémentaire, à la condition que les variations de z soient suffisamment continues.

Quoi qu'il en soit, nous n'obtenons ainsi qu'une approximation.

2°. — Il s'agit d'obtenir une solution rigoureuse dans le cas où z s'exprime par une fonction continue des coordonnées : ici interviennent les *intégrales doubles*.

Si les deux faisceaux de courbes sont des droites parallèles aux axes de coordonnées (droites parallèles à Oy distantes de dx, droites parallèles à Ox distantes de dy), l'élément de surface est un rectangle $dS = dx\,dy$. La quantité à évaluer est :

$$V = \iint z\,dx\,dy. \tag{2}$$

Le symbole $\iint$ se lit *double somme de*. L'expression (2) diffère de (1) en ce que nous imaginons pouvoir prendre les éléments dS *infiniment petits*, c'est-à-dire inférieurs à toute aire donnée à l'avance. L'expression (2) est la *notation* d'une opération que nous apprendrons tout à l'heure à effectuer.

Si les deux faisceaux de courbes sont des cercles ayant l'origine O pour centre et des droites passant par l'origine, l'élément dS est à la limite un rectangle : $dS = r\,dr\,d\theta$.

La quantité à évaluer est :

$$V = \iint zr\,dr\,d\theta. \qquad (3)$$

Entre les coordonnées x, y, et les coordonnées r, θ, on a les relations :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\,; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y : x)\,;$$

z est, au choix, une fonction de x et de y, ou une fonction de r et de θ.

Nous pouvons découper le plan xOy d'une infinité d'autres manières. *Nous admettrons que le volume* V *calculé est toujours le même, quel que soit le découpage du plan, quelle que soit aussi la manière de grouper les éléments de volume une fois obtenus.*

Pour calculer l'intégrale, il faut précisément les grouper convenablement.

306. Intégration.

1°. — Considérons la tranche découpée dans le solide par les

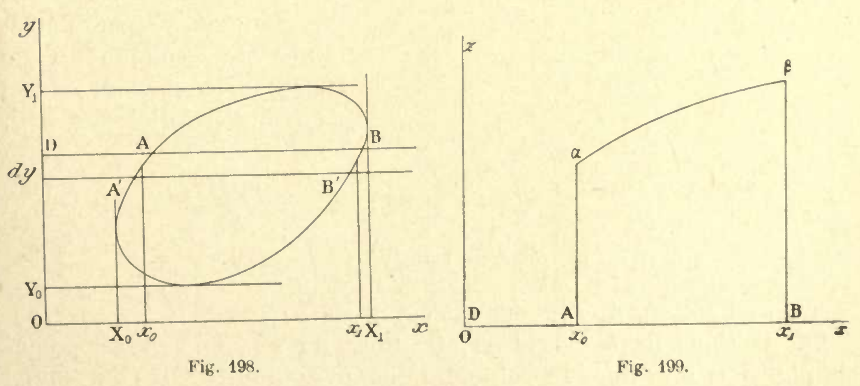


Fig. 198. Fig. 199.

plans, parallèles à xOz, dont les traces sur xOy sont les droites AB, A′B′, distantes de dy (fig. 198). Nous pouvons assimiler cette tranche à un cylindre plat de génératrices parallèles à Oy. Évidemment ce n'est rigoureux qu'à la limite (lorsque dy est infiniment petit), puisque AA′ et BB′ ne sont pas parallèles à Oy, et que la surface supé-

rieure qui limite le solide, n'est pas un cylindre de génératrices parallèles à Oy. Notre raisonnement est identique à celui de la Géométrie élémentaire qui, pour évaluer le volume d'une pyramide, la découpe en une série de plaques qu'elle assimile à des cylindres.

Calculons le volume dV de la tranche. Il est égal au produit par dy de l'aire $A\alpha\beta BA$ de la section du solide par l'un des plans AB, A'B', section représentée à part (fig. 199) :

$$dV = dy \int_{x_0}^{x_1} z dx = dy \left[F(x_1) - F(x_0) \right].$$

La quantité entre crochets est une certaine fonction de y ; nous pouvons écrire : $$dV = dy\, \Phi(y).$$

Pour avoir le volume total, il faut recommencer l'opération pour toutes les tranches dy, puis faire la somme. D'où le résultat :

$$V = \int_{Y_0}^{Y_1} \Phi(y)\, dy = \int_{Y_0}^{Y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} z dx.$$

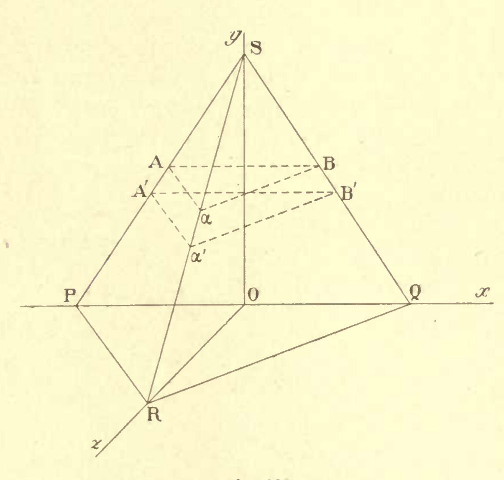


Fig. 200.

L'intégration double revient donc à deux intégrations simples *échelonnées ;* l'intégration par rapport à y ne peut être effectuée que lorsque l'intégration par rapport à x a déterminé la fonction $\Phi(y)$ sur laquelle elle porte.

2°. — Rien n'empêche de commencer par déterminer le volume d'une tranche découpée au moyen de plans parallèles à zOy. On a :

$$dV = dx \int_{y_0}^{y_1} z dy = \Psi(x)\, dx.$$

$$V = \int_{X_0}^{X_1} dx\, \Psi(x) = \int_{X_0}^{X_1} dx \int_{y_0}^{y_1} z dy.$$

Nous admettons que le résultat est le même.

3°. — Pour fixer les idées, traitons un exemple extrêmement simple. Soit à évaluer le volume d'une pyramide PQSR (fig. 200) :

$$V = \iint z\, dx\, dy = \int dy \int z\, dx.$$

$\int z\, dx$ est l'aire σ d'une section $AB\alpha$.

Appelons σ_1 l'aire PQR ; posons $\overline{OS} = h$.

Toutes les sections sont semblables ; par suite, leurs aires sont proportionnelles aux carrés des longueurs homologues.

On a : $\sigma = \sigma_1 (h - y)^2 : h^2.$

D'où : $$V = \int_0^h dy \,.\, \sigma_1 \left(\frac{h-y}{h}\right)^2 = \frac{\sigma_1}{h^2}\int_0^h (h-y)^2 dy =$$

$$- \frac{\sigma_1}{3h^2}\Big[(h-y)^3\Big]_0^h = \frac{\sigma_1 h}{3}.$$

C'est le résultat bien connu de la Géométrie élémentaire.

Reste à calculer σ_1 en utilisant les données : longueur $\overline{PQ}$, distance $\overline{OR}$.

307. Moments statiques, moments d'inertie.

Il faut choisir les axes de coordonnées et le mode de découpage du plan d'intégration, de manière que la première intégration soit immédiate. Donnons quelques exemples qui nous permettront de revenir sur les moments statiques et les moments d'inertie des aires planes (§§ 163 et 164).

1°. — Soit tracée dans un plan une courbe fermée. Découpons l'aire qu'elle limite en éléments dS ; appelons r la distance de chaque élément à une droite D *du plan*. Le moment statique M et le moment d'inertie I de la surface par rapport à cette droite sont définis par les intégrales :

$$M = \iint r dS, \qquad I = \iint r^2 dS.$$

Généralement les calculs seront simplifiés si la droite D est un des axes de coordonnées (Ox, par exemple), et si le découpage se fait au moyen de droites parallèles aux axes. Les intégrales deviennent :

$$M = \iint y\, dx\, dy, \qquad I = \iint y^2\, dx\, dy.$$

Une intégration est immédiatement possible. On obtient :

$$M = \frac{1}{2}\int_{X_0}^{X_1} (y_1^2 - y_0^2) dx, \qquad I = \frac{1}{3}\int_{X_0}^{X_1} (y_1^3 - y_0^3) dx.$$

Nous retrouvons ainsi les expressions des §§ 163 et 164.

2°. — Mais ce mode de découpage n'est plus convenable dans le cas où l'on voudrait calculer le *moment d'inertie* d'un cercle de rayon R par rapport à une droite D passant par son centre et *perpendiculaire à son plan*. Nous conservons la même définition du moment d'inertie que plus haut : somme des produits des aires élémentaires dS par le carré de leurs distances à la droite D.

Prenons-la pour axe Oz.

Nous découperons le cercle en couronnes par des circonférences de centre O, puis ces couronnes en rectangles curvilignes au moyen de

droites passant par le point O. Une intégration est immédiate, parce que tous les points de la couronne comprise entre les circonférences de rayon r et $r+dr$, sont à la même distance r de l'axe Oz. La couronne a donc pour moment d'inertie : son aire $2\pi r \,.\, dr$, multipliée par r^2, soit : $2\pi r^3 dr$.

Le moment d'inertie total est :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\mathrm{R}} 2\pi r^3 dr=\frac{\pi \mathrm{R}^4}{2}.$$

308. Cas particulier d'intégration double.

Voici un cas particulier d'intégration double dont les applications sont nombreuses.

1°. — Soit à évaluer *la masse* du solide dont nous avons considéré jusqu'ici *le volume ;* sa densité ρ est *par hypothèse* une fonction de x et de y ; elle est par conséquent la même sur toute droite parallèle à Oz. La masse totale est :

$$\mathrm{M}=\iint \rho(x, y) z(x, y)\, dx\, dy.$$

Le calcul se fait comme précédemment, puisque le produit de $\rho(x, y)$ par $z(x, y)$ est une fonction $\mathrm{Z}(x, y)$.

2°. — Posons maintenant que ρ n'est fonction que de y, que z n'est fonction que de x, enfin que l'aire d'intégration ABCD sur le plan xOy est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes (fig. 201) :

$$\mathrm{M}=\iint \rho(y) z(x)\, dx\, dy.$$

Fig. 201.

Puisque la hauteur z n'est fonction que de x, et puisque les limites d'intégration par rapport à x sont constantes, les sections du solide pas des plans parallèles à xOz (tels que AD, BC,...) sont identiques ; leur aire commune σ est *la constante :*

$$\sigma=\int_{x_0}^{x_1} z(x) dx.$$

La masse d'une tranche d'épaisseur dy et de densité $\rho(y)$ est par suite :

$$\sigma \,.\, \rho(y)\, dy.$$

La masse totale est donc :

$$\mathrm{M}=\sigma \int_{y_0}^{y_1} \rho(y)\, dy.$$

D'où l'identité :

$$\int_{x_0}^{x_1} z(x)\, dx \,.\, \int_{y_0}^{y_1} \rho(y)\, dy=\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} z(x) \rho(y)\, dx\, dy.$$

Lorsque les limites des intégrales simples :

$$\int_{x_0}^{x_1} z(x)\, dx, \qquad \int_{y_0}^{y_1} \rho(y)\, dy,$$

sont constantes, leur produit est égal à la somme des éléments qu'on obtient en multipliant chaque élément de la première par chaque élément de la seconde; c'est dire qu'il est égal à l'intégrale double :

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} z(x)\rho(y)\, dx\, dy.$$

Il revient encore au même de dire que, pour obtenir la masse, il faut multiplier le volume :

$$(y_1 - y_0)\sigma = (y_1 - y_0)\int_{x_0}^{x_1} z(x)\, dx,$$

par la densité moyenne (§ 155, 2°) :

$$\rho_m = \frac{1}{y_1 - y_0}\int_{y_0}^{y_1} \rho(y)\, dy.$$

309. Applications.

1°. — Soit à évaluer l'intégrale :

$$S = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy.$$

On a : $$S^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \,.\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy.$$

S^2 peut être considéré comme le quart du volume total d'un solide

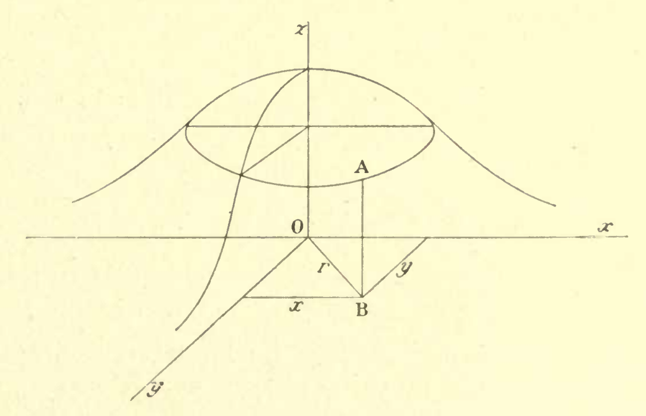


Fig. 202.

de révolution, dont la méridienne est : $z = e^{-x^2}$ (§ 205), ou dont la hauteur $z = \overline{AB}$, au-dessus de xOy, est : $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$; $dx\, dy$ est l'élément de surface du plan xOy pour un certain mode de découpage. L'intégration va de 0 à ∞ pour chacune des variables ; on a donc le volume du solide qui correspond à un quadrant.

Mais nous savons que le résultat est indépendant du mode de découpage.

Changeons donc de coordonnées. Découpons le plan xOy en couronnes ayant O pour centre et comprises entre les cercles de rayons r et $r+dr$; l'aire de la couronne est $2\pi r dr$.

On a donc l'intégrale immédiatement calculable :

$$4S^2 = \int_0^\infty e^{-r^2} 2\pi r dr = \Big[-\pi e^{-r^2}\Big]_0^\infty = \pi, \qquad S^2 = \frac{\pi}{4}, \qquad S = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

La fonction x^2 étant *paire*, on a évidemment (§ 205) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

2°. — Remplaçons x^2 par ax^2; l'intégrale conserve la même valeur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\sqrt{a}\, dx = \sqrt{\pi}, \qquad F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Nous définissons ainsi une fonction $F(a)$ d'une variable qui entre comme paramètre dans une intégrale définie (§ 301, *1°*).

Dérivons par rapport à a (§ 301, *3°*) :

$$\frac{dF}{da} = \int_{-\infty}^{+\infty} -x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}},$$

$$\frac{d^2F}{da^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{1.3}{2^2}\frac{\sqrt{\pi}}{a^2\sqrt{a}},$$

et ainsi de suite.

Pour $a = 1$, il vient la formule générale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}.$$

3°. — Dans la formule obtenue au *1°*, remplaçons x par $x+a$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2} e^{-x^2-2ax} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2ax} dx = e^{a^2}\sqrt{\pi}.$$

L'intégration allant de $-\infty$ à $+\infty$, on rencontre pour le même dx deux éléments qui correspondent aux valeurs $\pm x$ de la variable. Leurs valeurs sont :

$$e^{-x^2} e^{-2ax} dx, \qquad e^{-x^2} e^{2ax} dx.$$

Il revient au même d'intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$, ou d'écrire ces deux éléments et de n'intégrer qu'entre 0 et ∞. D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2ax} dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\left(e^{-2ax} + e^{2ax}\right) dx = e^{a^2}\sqrt{\pi}.$$

4°. — Posons $a = i\alpha$; on a (§ 230) :

$$e^{2i\alpha x} + e^{-2i\alpha x} = 2\cos 2\alpha x.$$

D'où la formule : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x \,.\, dx = e^{-\alpha^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

5°. — Reprenons la formule du 2° :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Posons $a = i\alpha$. On a (§ 230 et § 224) :

$$e^{-i\alpha x^2} = \cos\alpha x^2 - i\sin\alpha x^2, \qquad \frac{1}{\sqrt{i\alpha}} = \frac{1-i}{\sqrt{2\alpha}}.$$

D'où : $\displaystyle\int_0^\infty \cos\alpha x^2 \,.\, dx = \int_0^\infty \sin\alpha x^2 \,.\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}.$

Nous avons utilisé ce résultat (§§ 171 et 179) dans la discussion des Intégrales de Fresnel.

310. Intégrales triples.

1°. — Il est bien rare qu'on ait *à effectuer* une intégrale triple; mais l'intégrale triple se présente tout naturellement en Physique *comme la notation d'une opération pouvant être effectuée;* sa transformation en intégrale double (§ 488) conduit à des théorèmes de la plus grande importance pratique. Nous avons souvent fait observer qu'une des caractéristiques du Calcul différentiel et intégral est la représentation des opérations et l'étude de leurs propriétés, *alors même que, dans presque tous les cas, elles sont inabordables avec l'aide des fonctions actuellement considérées comme usuelles.*

2°. — L'intégrale triple a pour notation :

$$\iiint f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (1)$$

Elle s'énonce *triple somme de* dx, dy, dz. Nous découpons un solide en petits éléments de volume $dx\,dy\,dz$ par des plans parallèles aux plans xOy, yOz, zOx, supposés rectangulaires.

Nous multiplions chaque volume élémentaire par un facteur $f(x, y, z)$ qui dépend de sa position (il mesure, par exemple, la densité moyenne de l'élément); nous faisons la somme de tous les produits similaires pour tous les éléments de volume; dans l'hypothèse choisie, nous obtenons la masse totale du solide.

Le symbole (1) représente donc une opération parfaitement claire.

Il est loisible de varier le mode de découpage de l'espace. D'une manière générale, soit a, b, c, les coordonnées *quelconques* qui

servent à repérer un point de l'espace; soit dv l'élément de volume *de forme quelconque;* l'opération (1) peut aussi bien s'écrire :

$$\iiint f(a, b, c)\, dv.$$

Il est évident que le mode de découpage n'intervient pas sur le résultat.

Je suppose naturellement que les volumes sont pris assez petits; l'erreur diminue à mesure qu'ils sont plus petits; elle est nulle, si je les prends infiniment petits, c'est-à-dire plus petits que toute quantité donnée à l'avance.

Ainsi pas de difficulté sur la définition et le sens de l'intégrale triple. La plus simple exprime la grandeur du volume lui-même; on a :

$$v = \iiint dv = \iiint dx\, dy\, dz,$$

dans le cas où le découpage est obtenu par des plans parallèles aux plans coordonnés supposés rectangulaires.

3°. — Les difficultés (non théoriques, mais pratiques) surgissent quand on arrive au calcul. Nous allons montrer que l'intégration triple revient à trois intégrations simples *échelonnées;* c'est dire que la seconde n'est possible qu'une fois la première réalisée, la troisième qu'après la seconde effectuée.

Considérons en effet le tube de section rectangulaire découpé dans le volume par deux plans distants de dz parallèles à xOy, et deux plans distants de dy parallèles à xOz (voir fig. 311). Déterminons la valeur de l'intégrale :

$$dy\, dz \int f(x, y, z)\, dx$$

pour tout ce tube. Les variables y et z restant constantes, nous sommes ramenés à une intégrale simple par rapport à x, *intégrale dont les limites sont des fonctions de y et de z.* Cela signifie que la somme effectuée pour les volumes élémentaires qui remplissent le tube, est une fonction de la position du tube repérée par le point où son axe coupe le plan yOz; ce qui est évident.

Imaginons cette première opération effectuée, nous sommes ramenés à l'intégrale double :

$$\iint dy\, dz \int f(x, y, z)\, dx = \iint \Phi(y, z)\, dy\, dz,$$

qui implique (§ 306) deux intégrations simples échelonnées.

Nous admettons comme évident que le résultat est le même quel que soit l'ordre des intégrations; l'opération peut être effectuée de six manières différentes (xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx). L'indépendance du mode de groupement des éléments est une proposition connexe de l'indépendance du mode de découpage. Pourvu qu'en définitive on n'ait rien oublié, le résultat doit être le même.

Fonction Gamma.

311. Définition de la fonction Γ, intégrale eulérienne de seconde espèce.

1°. — Nous poserons :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

La fonction $x^{n-1}e^{-x}$ se réduit à x^{n-1} au voisinage de $x=0$, puisque e^{-x} est très approximativement égal à 1.

Si $n>1$, x^{n-1} s'annule pour $x=0$; pas de difficulté.

Si $n<1$, x^{n-1} augmente indéfiniment quand x tend vers 0. Mais il n'en résulte pas que l'intégrale devienne infinie : nous avons démontré (§ 203) qu'elle reste finie si $n>0$. *Nous supposerons donc qu'il en est ainsi; la fonction Γ n'est définie que pour des valeurs positives de l'argument n.*

Quand x est très grand, nous savons (§ 204) que $x^{n-1}e^{-x}$ tend vers 0, si grand que soit n; nous sommes même assurés qu'il diminue assez vite pour que l'intégrale reste finie. Cela résultera du reste de notre calcul.

2°. — On a : $d(x^n e^{-x})=(nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x})dx$;

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=-\Big[x^n e^{-x}\Big]_0^\infty+n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}.$$

Or $x^n e^{-x}$ s'annule pour $x=0$ et $x=\infty$. Il reste :

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n). \qquad (1)$$

Telle est la formule *de récurrence* qui nous permet de passer d'un nombre *quelconque* n au nombre suivant $n+1$.

Rien ne suppose n entier.

3°. — Si n est entier, la formule donne successivement :

$$\Gamma(n)=(n-1)\,\Gamma(n-1),$$
$$\Gamma(n-1)=(n-2)\,\Gamma(n-2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(2)=1\,\Gamma(1).$$

Multiplions toutes ces équations membre à membre :

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots(n-q)\,\Gamma(n-q),$$
$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots1\,.\,\Gamma(1).$$

Or : $$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1\,;$$

d'où enfin : $$\Gamma(n)=1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots(n-1)=(n-1)\,! \qquad (2)$$

Le symbole $(n-1)!$ s'énonce *factorielle* $n-1$. Le produit qu'il représente, intervient à tout instant dans les développements en série (§§ 12 et 254).

Voici les valeurs des premières factorielles :

2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!
2	6	24	120	720	5040	40320

4°. — Supposons n non entier.

S'il est supérieur à 2, posons $n-q=p$, où q est entier et p compris entre 1 et 2. On a :

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots(p+1)p.\Gamma(p). \quad (3)$$

$\Gamma(n)$ sera connue si nous pouvons calculer $\Gamma(p)$.

Si n est inférieur à 1, nous utiliserons la formule :

$$\Gamma(n)=\frac{1}{n}\Gamma(n+1).$$

Nous ramenons ainsi le calcul de $\Gamma(n)$ relatif à un argument n quelconque, mais positif, au calcul de $\Gamma(p)$, pour l'argument p compris entre 1 et 2.

312. Valeurs numériques de la fonction $\Gamma(n)$.

Le tableau ci-joint donne les valeurs de la fonction entre les valeurs 1 et 2 de la variable. Pour ces limites, on a :

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1.$$

Valeurs de $\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$,

entre $n=1$ et $n=2$, multipliées par 10^4.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	10000	9943	9889	9836	9784	9735	9688	9642	9597	9554
1,10	9513	9474	9436	9399	9364	9330	9298	9267	9237	9209
1,20	9181	9157	9131	9108	9085	9064	9044	9025	9007	8990
1,30	8975	8960	8947	8934	8922	8912	8902	8893	8886	8879
1,40	8873	8867	8864	8860	8858	8857	8856	8857	8858	8860
1,50	8862	8866	8870	8876	8882	8889	8896	8905	8914	8924
1,60	8935	8947	8960	8973	8987	9001	9017	9033	9050	9068
1,70	9086	9106	9126	9147	9168	9191	9214	9238	9262	9288
1,80	9314	9341	9369	9397	9426	9456	9487	9518	9551	9584
1,90	9618	9652	9688	9724	9761	9799	9837	9877	9917	9958

A partir de 1, la fonction décroît jusqu'à $n=1,4616$: elle vaut alors 0,8856. Puis elle recommence à croître.

La figure 203 représente l'allure générale de la fonction Γ.

On a évidemment : $\Gamma(0) = \infty$.

On peut se demander pourquoi la courbe croît constamment entre $n = 2$ et $n = 3$, alors qu'on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1),$$

et que $\Gamma(n-1)$ commence par décroître à partir de $n-1=1$. Cela tient à la croissance plus rapide du facteur $n-1$.

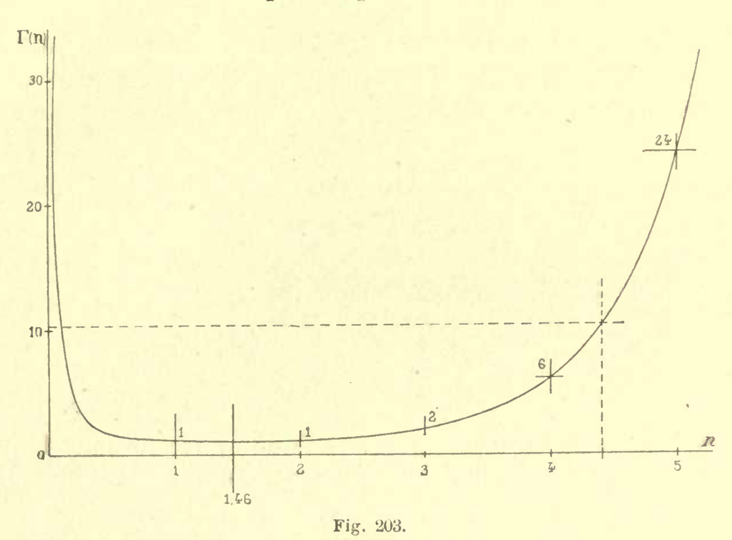


Fig. 203.

Ainsi pour $n = 2$, on a $\Gamma(2) = 1$; pour $n = 2{,}1$, on a $n - 1 = 1{,}1$,

$$\Gamma(1{,}1) = 0{,}9513, \qquad \Gamma(2{,}1) = 1{,}1 \times 0{,}9513 = 1{,}0464.$$

Même remarque pour les autres intervalles ; raisonnement analogue pour expliquer l'allure de la courbe entre 1 et 0.

La table précédente suffit à calculer les valeurs de Γ pour n quelconque. Soit par exemple $n = 4{,}4$ et $n = 4{,}8$. Nous avons :

$$\Gamma(4{,}4) = 3{,}4 \times 2{,}4 \times 1{,}4 \,.\, \Gamma(1{,}4) = 10{,}136,$$

$$\Gamma(4{,}8) = 3{,}8 \times 2{,}8 \times 1{,}8 \,.\, \Gamma(1{,}8) = 17{,}829.$$

313. Intégrale eulérienne de première espèce.

1°. — On appelle *intégrale eulérienne de première espèce* la fonction $B(p, q)$ de deux variables p, q, définie par l'intégrale :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (1)$$

La fonction est symétrique par rapport aux variables p et q ; elle reprend la même forme en changeant x en $1-x$; on a $B(p,q) = B(q,p)$.

On peut lui donner deux autres formes usuelles.

Posons : $x = \cos^2 \varphi, \quad 1 - x = \sin^2 \varphi, \quad dx = -2 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi;$

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi \,.\, \sin^{2q-2}\varphi \,.\, d\varphi.$$

Posons : $t = \frac{x}{1-x}, \quad x = \frac{t}{1+t}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t)^2};$

$$B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}.$$

2°. — On peut exprimer les intégrales de première espèce à l'aide de la fonction Γ. En effet, dans la fonction Γ prenons pour variable x^2 et y^2 à la place de x. On a :

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx, \tag{2}$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy.$$

En vertu du § 308, nous pouvons écrire :

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dx\, dy.$$

Posons : $r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$

D'après la définition de l'intégrale double, remplaçons l'élément d'aire $dx\,dy$ par $rd\varphi dr$, puisque c'est maintenant r et φ qui sont les variables indépendantes.

On trouve :

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi \,.\, \sin^{2q-1}\varphi \,.\, d\varphi.$$

D'où la formule fondamentale :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3°. — Dans la formule (2), faisons $2p - 1 = 0$.

Nous trouvons (§ 309) :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1{,}7724 = 2 \times 0{,}8862,$$

conformément au tableau et aux formules du § 311, *4°*.

314. Développement en série au moyen de la fonction Γ.

On rencontre, dans la théorie de l'arc-en-ciel et dans d'autres questions de diffraction, la fonction de z définie par l'intégrale :

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} \cos\frac{\pi}{2}(u^3 - zu)\, du.$$

Cette fonction et plusieurs autres analogues, également utilisées en diffraction, se développent au moyen des fonctions Γ. Montrons-le, en modifiant les notations pour simplifier l'écriture.

Soit l'intégrale : $\int_0^{\infty} \cos(x^3 + zx)\, dx.$

C'est la partie réelle de : $\int_0^{\infty} \exp(ix^3 + izx)\, dx.$

Développons en série, suivant les puissances croissantes de z.

$$\int \exp(ix^3)\, dx + \frac{iz}{1\,!} \int x \exp(ix^3)\, dx + \ldots + \frac{(iz)^n}{n\,!} \int x^n \exp(ix^3)\, dx.$$

Posons $ix^3 = -y$, $x^3 = iy$; $x = (iy)^{\frac{1}{3}}$, $dx = \dfrac{i^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}}{3}$.

$$\int x^n \exp(ix^3)\, dx = \frac{i^{\frac{n+1}{3}}}{3} \int e^{-y} y^{\frac{n-2}{3}}\, dy = \frac{1}{3}\, i^{\frac{n+1}{3}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right).$$

On se reportera au § 227 pour calculer les puissances de i. Nous sommes ainsi ramenés aux fonctions Γ. Il est inutile de pousser plus loin le calcul.

CHAPITRE XV

PLAN, LIGNE DROITE. CHANGEMENTS DE COORDONNÉES

315. Repérage des points dans l'espace.

Pour repérer les points dans l'espace, nous utiliserons principalement trois espèces de coordonnées.

1°. — Coordonnées cartésiennes.

Nous les connaissons déjà. Les coordonnées du point C sont (fig. 204) :

$$x = \overline{OA}, \qquad y = \overline{AB}, \qquad z = \overline{BC}.$$

Généralement, nous supposerons que les axes forment un trièdre trirectangle, sauf quand il s'agira de propriétés qui n'impliquent

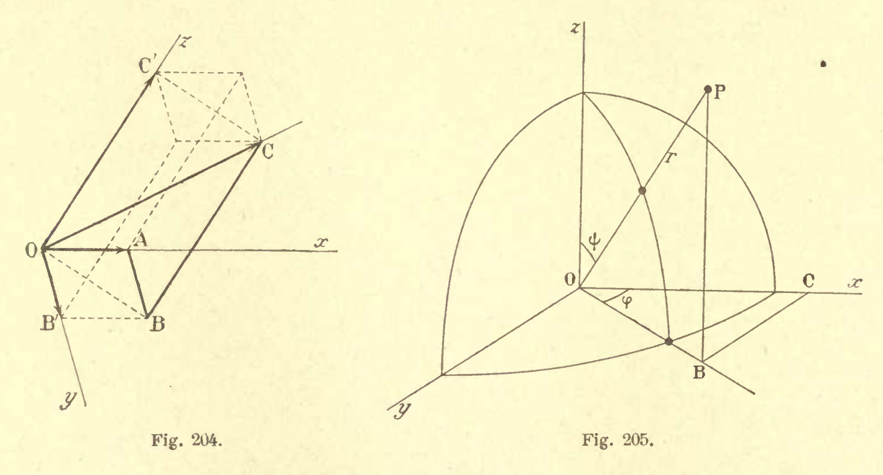


Fig. 204. Fig. 205.

aucune spécification d'angles et de distances. Dans le cas contraire, les formules en coordonnées obliques sont extrêmement compliquées.

2°. — Coordonnées sphériques ou géographiques.

Prenons le plan zOx pour origine des *méridiens*. Un plan quelconque zOB, passant par la *ligne des pôles* Oz, est défini par sa *longitude* φ ; c'est l'angle qu'il fait avec le plan méridien origine. La

longitude (angle plan du dièdre) est comptée sur l'équateur (de Ox vers Oy, quand on utilise simultanément les coordonnées cartésiennes).

Dans le méridien de longitude φ, un point P est repéré par sa *colatitude* ψ (complément de la latitude, angle avec la ligne des pôles), enfin par sa distance r à l'origine. On a :

$$x = r \sin\psi \cos\varphi, \quad y = r \sin\psi \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\psi. \qquad (1)$$

Additionnant les carrés :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (2)$$

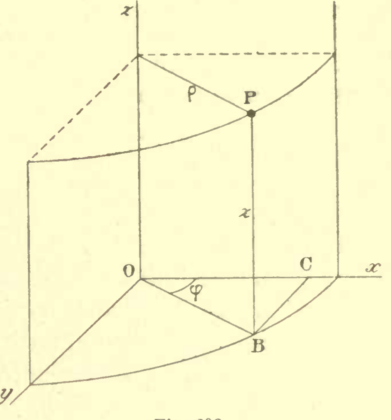


Fig. 206.

3°. — Coordonnées cylindriques.

Les points P sont encore repérés par leur méridien OBP, de longitude φ ; mais dans le méridien on utilise les coordonnées cartésiennes, z parallèlement à Oz, ρ perpendiculairement à Oz. On a :

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = z ; \qquad x^2 + y^2 = \rho^2.$$

4°. — Cosinus directeurs.

On peut encore fixer la position du point P par sa distance r à l'origine O et par les cosinus α, β, γ, des angles que fait la droite OP avec les axes (rectangulaires ; nous les supposerons toujours tels, à moins d'indication contraire). On a :

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad y = r\gamma.$$

Identifions avec les formules (1) et (2) :

$$\alpha = \sin\psi \cos\varphi,$$
$$\beta = \sin\psi \sin\varphi, \quad \gamma = \cos\psi ;$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

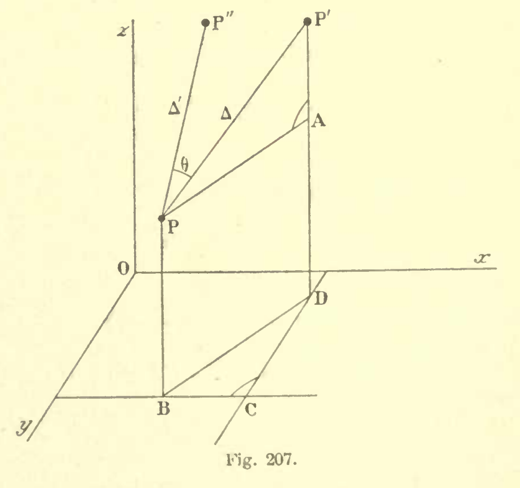


Fig. 207.

316. Distance de deux points. Angle de deux directions.

1°. — Soit $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ les deux points dont on demande la distance Δ (fig. 207).

Menons par PP' un plan parallèle à Oz ; il coupe xOy suivant BD. Menons PA parallèle à BD. Enfin par les points B et D menons des parallèles à Ox et à Oy.

Dans les triangles rectangles APP′ et CBD (dont les angles droits sont marqués), on a :

$$\Delta^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AP'}^2 = \overline{PA}^2 + (z'-z)^2.$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 = (y'-y)^2 + (x'-x)^2.$$

D'où : $$\Delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2. \qquad (1)$$

2°. — Les cosinus directeurs de la direction PP′ sont, en vertu de la définition du cosinus :

$$\alpha = \frac{x'-x}{\Delta}, \qquad \beta = \frac{y'-y}{\Delta}, \qquad \gamma = \frac{z'-z}{\Delta}. \qquad (2)$$

On prendra le radical Δ *positivement.* Les quantités α, β, γ, définissent donc la direction PP′, de P vers P′, et non la direction inverse. Pour définir la direction inverse, il faut intervertir les coordonnées : les cosinus sont changés de signes.

3°. — Soit une seconde direction PP″ définie par les cosinus directeurs α', β', γ', calculés comme ci-dessus au moyen des coordonnées des points P et P″. On a (§ 67, *3°*) :

$$\overline{P'P''}^2 = \Delta^2 + \Delta'^2 - 2\Delta\Delta'\cos\theta.$$

Mais on a aussi : $$\overline{P'P''}^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2.$$

Remplaçons Δ et Δ' par leurs valeurs, simplifions ; il vient :

$$\Delta\Delta'\cos\theta = (x'-x)(x''-x) + (y'-y)(y''-y) + (z'-z)(z''-z),$$

$$\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'. \qquad (3)$$

4°. — Nous utiliserons fréquemment l'identité :

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2) - (\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2.$$

Dans le cas actuel, on a :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1, \qquad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = 1 ;$$

d'où :

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (\beta\gamma'-\gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2. \qquad (4)$$

5°. — Deux directions sont rectangulaires si l'on a :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0. \qquad (5)$$

317. Changement d'axes de coordonnées : les deux systèmes sont rectangulaires.

1°. — On passe d'un système d'axes *rectangulaires* x, y, z, à un système d'axes *rectangulaires* X, Y, Z. Les nouveaux axes sont

définis par rapport aux anciens par leurs cosinus directeurs ; ce que résume le tableau suivant :

	X	Y	Z
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

Ainsi les cosinus des angles que OX fait avec Ox, Oy, Oz, sont α, β, γ. Inversement les cosinus des angles que Ox fait avec OX, OY, OZ, sont α, α', α''.

On a donc les six relations :

$$\begin{aligned} &\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ &\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, \qquad (1) \\ &\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\,; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1, \\ &\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1, \qquad (2) \\ &\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1. \end{aligned}$$

Mais les trois nouvelles directions OX, OY, OZ, forment un système trirectangle, de même que les anciennes.

D'où les six relations :

$$\begin{aligned} &\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0, \\ &\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0, \qquad (3) \\ &\alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0\,; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0, \\ &\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0, \qquad (4) \\ &\gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0. \end{aligned}$$

2°. — Ces douze relations entre neuf quantités ne sont évidemment pas toutes *distinctes*. Cherchons combien nous avons réellement d'arbitraires.

Choisir OX, c'est nous donner *deux* cosinus, α, β, par exemple, puisque alors γ est déterminé par la première équation (1). Ajouter OY, c'est nous donner *un* cosinus ; car OY devant être normal à OX, les quantités α', β', γ', doivent satisfaire à la seconde équation (1) et à la première équation (3). Enfin OZ se trouve alors complètement déterminé, puisque les cosinus α'', β'', γ'' doivent satisfaire à la troisième équation (1) et aux deux dernières équations (3). Donc le choix du système d'axes OX, OY, OZ dépend de trois quantités. Ces quantités choisies, les autres six sont calculables au moyen des équations (1) et (3). Par conséquent, sur les douze conditions (1), (2), (3), (4), six seulement sont distinctes.

3°. — Pour trouver les relations entre les anciennes et les nouvelles coordonnées, écrivons que la projection d'un côté AM d'un polygone sur une droite quelconque est égale à la somme des projections sur cette droite des autres côtés AB, BC, ..., LM, du polygone.

Plus généralement, *les projections sur une même droite de tous les chemins qui joignent deux points, sont égales.*

Nous avons immédiatement :

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z, \qquad x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad (5) \qquad y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \quad (6)$$
$$Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z; \qquad z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z.$$

Les formules du § 78 rentrent dans les précédentes. Les coordonnées z disparaissent ; il reste :

$$X = \alpha x + \beta y, \qquad x = \alpha X + \alpha' Y,$$
$$Y = \alpha' x + \beta' y; \qquad y = \beta X + \beta' Y.$$

On a de plus :

$$\alpha = \cos\theta, \quad \beta = \sin\theta; \quad \alpha' = \cos(\theta + \pi : 2) = -\sin\theta, \quad \beta' = \cos\theta.$$

318. Changement d'axes de coordonnées : l'un des systèmes est oblique.

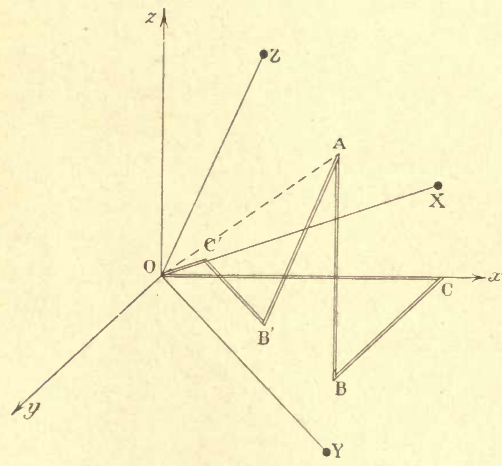


Fig. 208.

1°. — On passe d'un système d'axes *rectangulaires* x, y, z, à un système d'axes *obliques* X, Y, Z. Le tableau du paragraphe précédent définit les cosinus directeurs des trois directions OX, OY, OZ avec les axes de coordonnées *rectangulaires* Ox, Oy, Oz (fig. 208).

Appelons λ, μ, ν les angles XOY, YOZ, ZOX. On a les deux systèmes de relations (§ 315, *1°* et § 316, *3°*) :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos\lambda,$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad (1) \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \cos\mu, \quad (3)$$
$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1; \qquad \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = \cos\nu.$$

Les relations (2) du § 317 ne subsistent pas, puisque α, α', α'', sont les cosinus directeurs de la droite Ox par rapport à trois droites *qui ne sont pas rectangulaires.*

2°. — Relions les coordonnées entre elles. Appliquons le théorème que *les projections sur une même droite de tous les chemins qui joignent deux points sont égales :*

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \quad (6)$$
$$z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z.$$

En effet, quand nous projetons orthogonalement les chemins OCBA, OC'B'A sur Ox, $\overline{OC} = x$ se projette en vraie grandeur; $\overline{AB}$ et BC ont des projections nulles.

Les formules (5) ne subsistent plus ; elles sont remplacées par des formules plus compliquées qu'il est inutile d'écrire. Si nous résolvons (6) par rapport à X, Y, Z, nous trouvons des relations qui sont encore du premier degré en x, y, z. D'où ce corollaire important :

Une surface qui, rapportée à un système d'axes obliques, est du $n^{ième}$ degré, est encore du $n^{ième}$ degré quand on la rapporte à un système d'axes rectangulaires.

319. Plan ; direction de la normale au plan.

1°. — Le plan a pour équation : $ax + by + cz = d$. (1)

En effet, nous constatons d'abord que les intersections de la surface représentée par l'équation (1) avec les plans de coordonnées sont des droites :

$$by + cz = d, \quad \text{avec} \quad yOz;$$

$$ax + cz = d, \quad \text{avec} \quad zOx;$$

$$ax + by = d, \quad \text{avec} \quad xOy.$$

Changeons les axes de coordonnées ; l'équation de la surface (1) reste linéaire ; ses intersections avec les nouveaux plans de coordonnées sont encore des droites. Donc toutes les intersections de la surface avec des plans sont des droites. Donc c'est un plan.

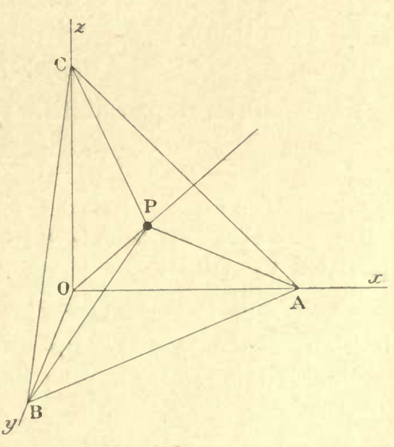


Fig. 209.

2°. — Le plan (1) coupe les axes à des distances de l'origine :

$$x = \overline{OA} = \frac{d}{a}, \quad (y = z = 0); \quad y = \overline{OB} = \frac{d}{b}, \quad (z = x = 0);$$

$$z = \overline{OC} = \frac{d}{c}, \quad (x = y = 0).$$

3°. — Menons la normale OP et joignons P aux points A, B, C. Posons $\Delta = \overline{OP}$. Évaluons les angles :

$$\widehat{POA} = \text{arc} \cos \alpha, \quad \widehat{POB} = \text{arc} \cos \beta, \quad \widehat{POC} = \text{arc} \cos \gamma.$$

Dans les triangles POA, POB, POC, rectangles en P, on a :

$$\overline{OP} = \Delta = \alpha \,.\, \overline{OA} = \beta \,.\, \overline{OB} = \gamma \,.\, \overline{OC}.$$

D'où : $$\alpha = \frac{\Delta a}{d}, \quad \beta = \frac{\Delta b}{d}, \quad \gamma = \frac{\Delta c}{d};$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1=\frac{\Delta^2}{d^2}(a^2+b^2+c^2),\quad \Delta=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \tag{2}$$

$$\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{3}$$

Il résulte de là que le plan peut se mettre sous la forme :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\Delta; \tag{4}$$

α, β, γ, sont les cosinus directeurs de la normale, Δ est la distance à l'origine.

320. Angle de deux plans.

Il est égal à l'angle de leurs normales. On a donc :

$$\cos\theta=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\frac{aa'+bb'+cc'}{\Delta\Delta'},$$

La condition de perpendicularité est :

$$aa'+bb'+cc'=0.$$

La condition de parallélisme est :

$$\alpha=\alpha',\quad \beta=\beta',\quad \gamma=\gamma';\quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

321. Plan passant par un point donné; distance d'un point à un plan.

1°. — Soit :

$$ax+by+cz=d, \tag{1}$$

le plan, et x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point donné.

Nous voulons que le plan passe par le point; la condition est :

$$ax_0+by_0+cz_0=d. \tag{2}$$

Retranchons (2) de (1) :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \tag{3}$$

Naturellement, a, b, c restent arbitraires.

Des trois paramètres qui définissent un plan, un seul est déterminé; les deux autres ($b:a$, $c:a$, par exemple) permettent d'imposer deux relations supplémentaires.

2°. — Cherchons la distance du point A (x_0, y_0, z_0), à un plan P :

$$ax+by+cz=d. \tag{4}$$

Par le point A, menons un plan P′ parallèle à P (§ 320) :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \tag{5}$$

La distance des plans P et P′ est la distance du point A au plan P. C'est aussi la différence des distances : $\overline{OP'}-\overline{OP}$, des plans à l'origine. On a :

$$\Delta=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^3}},\qquad \Delta'=\frac{ax_0+by_0+cz_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

D'où : $$\delta = \Delta' - \Delta = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Si l'équation du plan a la forme (4) du § 319, la distance cherchée est : $\delta = \alpha x + \beta y + \gamma z - \Delta$.

3°. — On peut dire (comme pour la droite tracée dans un plan, § 29, *3°*) que le plan divise l'espace en deux régions pour lesquelles δ a des signes contraires. Le plan sert de surface de séparation; il est défini par la condition $\delta = 0$.

322. Plan tangent à une surface au point X, Y, Z; normale à la surface en ce point.

1°. — Une surface est définie par une relation $f(x, y, z) = 0$, entre les coordonnées de ses points. Soit X, Y, Z, les coordonnées d'un point A; $x = X + dX$, $y = Y + dY$, $z = Z + dZ$, les coordonnées d'un point B voisin et *appartenant à la surface*. On a donc :

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad f(X + dX, Y + dY, Z + dZ) = 0, \qquad (1)$$

et par suite :

$$f(X + dX, Y + dY, Z + dZ) - f(X, Y, Z) = 0. \qquad (2)$$

Par définition, (2) est la différentielle df de la fonction $f(x, y, z)$ pour les valeurs X, Y, Z, de la variable. D'où :

$$\frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial x} dX + \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial y} dY + \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial z} dZ = 0 \qquad (3)$$

Telle est la relation à satisfaire entre les accroissements infiniment petits dX, dY, dZ, des coordonnées, pour que le point x, y, z, *voisin de* A ne cesse pas d'appartenir à la surface.

2°. — Remplaçons dX, dY, dZ, par $x - X$, $y - Y$, $z - Z$. L'équation (3) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - X) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - Y) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - Z) = 0. \qquad (4)$$

C'est l'équation d'un plan, puisque les dérivées partielles ont les valeurs relatives au point A de coordonnées invariables X, Y, Z, *et sont par suite des constantes;* x, y, z, sont les coordonnées courantes.

Si l'on suppose le point x, y, z, assez voisin de A, l'équation (4) se confond avec l'équation (3). *Donc* (4) *représente un plan qui passe par tous les points de la surface voisins de* A; *c'est le plan tangent à la surface au point* A.

3°. — La normale au plan (4) menée par le point de tangence A est par définition *la normale à la surface au point* A.

Ses cosinus directeurs sont (§ 319, *3°*) :

$$\alpha = k\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \beta = k\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \gamma = k\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$k = 1 : \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

323. Équations de la droite. Expression des cosinus directeurs.

1°. — Une droite AB est définie quand on se donne deux de ses points M et N. Soit x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1, leurs coordonnées. Cherchons les coordonnées x, y, z, d'un point P quelconque de la droite. Un théorème connu nous apprend que les projections orthogonales de MP et de MN sur une droite quelconque sont dans le rapport $\overline{MP} : \overline{MN}$. D'où les relations :

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \qquad (1)$$

Les deux équations (1) sont les équations de la droite. Nous les prendrons généralement sous la forme :

$$\frac{x - p}{l} = \frac{y - q}{m} = \frac{z - r}{n}. \qquad (2)$$

Il n'y a que *quatre* constantes indépendantes, comme on le voit en chassant les dénominateurs.

Fig. 210.

2°. — Nous pouvons définir la droite par ses projections sur deux des plans coordonnés. Ces projections sont arbitraires; leur choix impose la projection sur le troisième plan.

Soit en effet BF, CD, les projections sur xOz et yOz. Menons par ces droites des plans respectivement parallèles à Oy et à Ox. Ils se coupent suivant la droite cherchée AB. La troisième projection s'ensuit.

3°. — Menons par l'origine une parallèle à la droite (2). Soit x, y, z, les coordonnées du point à la distance R de l'origine; on a :

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}; \qquad nx = lz, \qquad ny = mz.$$

Soit α, β, γ, les cosinus directeurs de la droite. On a :

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{R}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

$$\alpha = \frac{x}{R} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \qquad \beta = \frac{y}{R} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\gamma = \frac{z}{R} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

4°. — Nous pouvons définir la droite au moyen d'une variable auxiliaire t. Les équations (2) s'écrivent :

$$x = p + lt, \qquad y = q + mt, \qquad z = r + nt.$$

A chaque valeur de t correspond un point de la droite.

En particulier, la valeur $t = 0$ définit le point M à partir duquel est comptée la variable t :

$$x_0 = p, \qquad y_0 = q, \qquad z_0 = r.$$

On a : $(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)t^2$,

$s = t\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ représente donc la distance MP du point P de la droite auquel correspond la valeur t de la variable, au point M origine des t.

En particulier, si l, m, n, sont les cosinus directeurs de la droite, on a :

$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1, \qquad s = t.$$

324. Droite normale à un plan et passant par un point donné; angle de deux droites.

1°. — Soit le plan : $ax + by + cz = d$; (1)

soit x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point. Les équations de la droite cherchée sont :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \qquad (2)$$

En effet, elles sont satisfaites pour le système de valeurs :

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

De plus, la droite a les mêmes cosinus qu'une droite quelconque normale au plan (§ 319).

2°. — Soit : $$\frac{x - p}{l} = \frac{y - q}{m} = \frac{z - r}{n}, \qquad (3)$$

$$\frac{x - p_1}{l_1} = \frac{y - q_1}{m_1} = \frac{z - r_1}{n_1},$$

les équations de deux droites. Le paragraphe précédent donne leurs cosinus directeurs. On a pour l'angle θ de ces droites (§ 316) :

$$\cos\theta = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}.$$

Les droites sont rectangulaires quand :

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

3°. — Soit à calculer l'angle de la droite (3) avec le plan (1). Cela revient à calculer l'angle de la droite avec la normale au plan (§ 319). On a donc :

$$\cos\theta = \frac{la + mb + nc}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

La droite est parallèle au plan quand elle est perpendiculaire à la normale au plan. D'où la condition :

$$la + mb + nc = 0. \qquad (4)$$

4°. — Cherchons à quelles conditions la droite (3) est tout entière dans le plan. Il faut d'abord que la condition (4) soit satisfaite. Résolvons des premières équations (3) par rapport à x et à y ; substituons dans (1) les valeurs trouvées. Il vient la seconde condition :

$$ap + bq + cr = d. \qquad (5)$$

325. Distance d'un point à une droite.

1°. — Déterminons d'abord la distance de la droite D à l'origine (fig. 211). Soit x, y, z, les coordonnées d'un point M quelconque de la droite. Abaissons la perpendiculaire OP. On a :

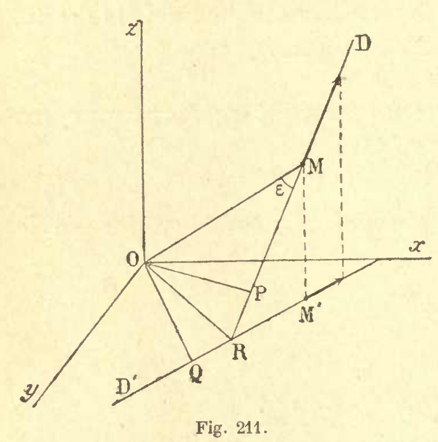


Fig. 211.

$$\mathrm{OP}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{MP}}^2$$
$$= \overline{\mathrm{OM}}^2(1 - \cos^2\varepsilon) = \overline{\mathrm{OM}}^2 \sin^2\varepsilon.$$

Soit α, β, γ, les cosinus directeurs de la droite D; posons $\overline{\mathrm{OM}} = r$. Projetons sur D d'une part la droite $\overline{\mathrm{OM}}$, d'autre part le polygone non représenté formé des coordonnées du point M placées bout à bout. On a :

$$r\cos\varepsilon = \alpha x + \beta y + \gamma z;$$
$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$
$$= (y\gamma - z\beta)^2 + (z\alpha - x\gamma)^2 + (x\beta - y\alpha)^2.$$

2°. — Ceci posé, prenons les équations de la droite sous la forme :

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n}. \qquad (1)$$

Substituons à x, y, z, et à α, β, γ (§ 323) leurs valeurs dans l'expression de $\overline{\mathrm{OP}}$.

Il vient :

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \frac{(nq - mr)^2 + (lr - np)^2 + (mp - lq)^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

3°. — Soit maintenant x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point dont nous voulons la distance à la droite. Ramener l'origine en ce point, c'est retrancher x_0 à tous les x, y_0 à tous les y, z_0 à tous les z.

Pour que les équations subsistent, il faut donc remplacer :

$$p \text{ par } p - x_0, \quad q \text{ par } q - y_0, \quad r \text{ par } r - y_0.$$

La distance cherchée est par suite :

$$\overline{OP}^2 = \frac{[n(q-y_0)-m(r-z_0)]^2+[l(r-z_0)-n(p-x_0)]^2+[m(p-x_0)-l(q-y_0)]^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

326. Moment d'un vecteur par rapport à un point; projections et représentation d'une aire plane.

1°. — A partir du point M menons sur OD le vecteur de longueur F, par suite de composantes :

$$X = F\alpha, \qquad Y = F\beta, \qquad Z = F\gamma.$$

Évaluons l'aire S du parallélogramme construit, dans le plan OMD, sur les deux vecteurs F et $\overline{OM}$. Elle est :

$$S = F \,.\, \overline{OM} \,.\, \sin \varepsilon = F \,.\, \overline{OP}.$$

Le paragraphe précédent donne immédiatement :

$$S^2 = (yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2. \qquad (1)$$

2°. — Considérons maintenant les projections S_x, S_y, S_z, du parallélogramme sur les plans normaux à Ox, Oy, Oz.

Sans qu'il soit nécessaire de refaire les calculs, nous pouvons écrire :

$$S_x = yZ - zY, \qquad S_y = zX - xZ, \qquad S_z = xY - yX.$$

S_z, par exemple, est construit sur la projection OM′ de OM, et sur la projection représentée du vecteur. On déduit immédiatement son expression de l'expression générale (1) en posant $Z = 0$, $z = 0$.

3°. — Voici enfin où nous voulons en venir.

Représentons une aire *plane* S par un vecteur normal à cette aire et dont la longueur lui soit proportionnelle. *Nous pouvons considérer ce vecteur comme la résultante de trois vecteurs dirigés suivant les axes* Ox, Oy, Oz, *et proportionnels aux projections de l'aire sur les plans* yOz, zOx, xOy.

Pour un parallélogramme et par suite pour un triangle, le théorème résulte de ce qui précède ; il est applicable à une aire plane quelconque, puisqu'on peut toujours la décomposer en triangles.

Cette proposition est fondamentale en Mécanique.

327. Plus courte distance de deux droites D et D_1.

Pour la calculer, menons par D_1 un plan P parallèle à D ; déterminons la distance d'un point *quelconque* A de D au plan P.

1°. — Les équations des droites sont :

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n}, \qquad \frac{x-p_1}{l_1} = \frac{y-q_1}{m_1} = \frac{z-r_1}{n_1}. \qquad (1)$$

Le plan : $\qquad ax + by + cz = d, \qquad (2)$

devant être parallèle aux deux droites, écrivons que sa normale leur est perpendiculaire (§ 324, *3°*) :

$$al + bm + cn = 0, \qquad al_1 + bm_1 + cn_1 = 0. \tag{3}$$

Écrivons qu'il contient la seconde droite (§ 324, *4°*) :

$$ap_1 + bq_1 + cr_1 = d. \tag{4}$$

En définitive, les constantes du plan (2) doivent satisfaire aux équations (3) et (4).

2°. — Supposons-les calculées ; pour avoir la distance cherchée, nous pouvons choisir arbitrairement le point A sur la droite D ; prenons celui de coordonnées p, q, r.

Sa distance au plan P est (§ 321, *2°*) :

$$\delta = \frac{ap + bq + cr - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer $a, b, c, d,$ entre (3), (4) et (5).

3°. — Des équations (3) on tire (§ 28) :

$$a = (mn_1 - nm_1)u = \mathrm{A}u,$$
$$b = (nl_1 - ln_1)u = \mathrm{B}u,$$
$$c = (lm_1 - ml_1)u = \mathrm{C}u,$$

où u est une variable auxiliaire qui disparaîtra par la suite.

Transportons dans (4) :

$$d = (p_1\mathrm{A} + q_1\mathrm{B} + r_1\mathrm{C})u.$$

Transportons dans (5) : $\delta = \dfrac{(p - p_1)\mathrm{A} + (q - q_1)\mathrm{B} + (r - r_1)\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}.$

Nous connaissons donc la distance des deux droites, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire commune ; il s'agit de déterminer sa position, c'est-à-dire les points de chaque droite auquel elle aboutit : c'est ce que nous ferons au paragraphe suivant.

328. Positions des points de deux droites dont la distance est minima.

Prenons les droites sous la forme :

$$x = p + lt, \qquad y = q + mt, \qquad z = r + nt;$$
$$x_1 = p_1 + l_1\tau, \qquad y_1 = q_1 + m_1\tau, \qquad z = r_1 + n_1\tau.$$

La distance de deux points est :

$$\delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \ldots = [p - p_1 + lt - l_1\tau]^2 + \ldots$$

Écrivons qu'elle est minima. Dérivons donc successivement cette expression par rapport à t et à τ, et annulons les dérivées. On a :

$$l[p - p_1 + lt - l_1\tau] + \ldots = 0, \qquad l_1[p - p_1 + lt - l_1\tau] + \ldots = 0.$$

Ordonnons par rapport à t et à τ. Il vient le système d'équations du premier degré à deux inconnues :

$$(l^2+m^2+n^2)t-(ll_1+mm_1+nn_1)\tau+l(p-p_1)+m(q-q_1)$$
$$+n(r-r_1)=0,$$
$$(ll_1+mm_1+nn_1)t-(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\tau+l_1(p-p_1)+m_1(q-q_1)$$
$$+n_1(r-r_1)=0.$$

Reste à résoudre par rapport à t et à τ.

Pour simplifier l'écriture, posons :

$$A=mn_1-nm_1 \qquad B=nl_1-ln_1, \qquad C=lm_1-ml_1.$$
$$P=m_1(r_1-r)-n_1(q_1-q), \qquad P_1=m(r_1-r)-n(q_1-q),$$
$$Q=n_1(p_1-p)-l_1(r_1-r), \qquad Q_1=n(p_1-p)-l(r_1-r),$$
$$R=l_1(q_1-q)-m_1(p_1-p); \qquad R_1=l(q_1-q)-m(p_1-p).$$

On trouve aisément :

$$t=\frac{AP+BQ+CR}{A^2+B^2+C^2}, \qquad \tau=\frac{AP_1+BQ_1+CR_1}{A^2+B^2+C^2}.$$

329. Variation de la distance des points de deux courbes gauches. Développée et développantes.

Soient deux courbes *gauches* (§ 402) OAB, $O_1A_1B_1$ (fig. 212), dont les points sont repérés par leurs distances respectives t, τ, à deux points O, O_1, pris pour origines. Ces distances sont comptées sur les courbes mêmes (§ 4).

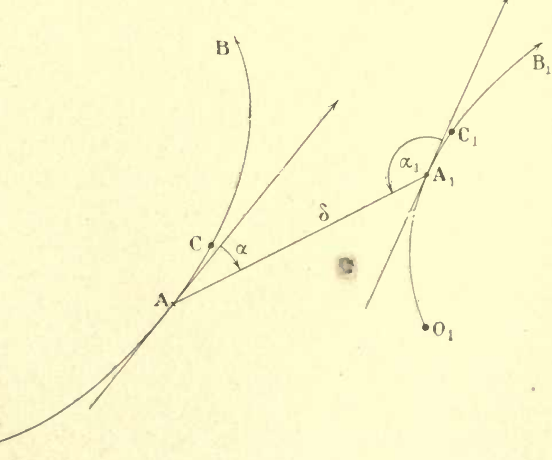


Fig. 212.

Nous demandons comment varie la distance $\delta=\overline{AA_1}$, de deux points pris respectivement sur ces courbes, quand ils se déplacent infiniment peu.

En vertu de la définition de la tangente à une courbe plane ou gauche (sa distance à la courbe est un infiniment petit du second ordre comparé à la distance au point de tangence), nous ramenons immédiatement ce

problème à celui des distances des points de deux droites. Soient donc les équations des tangentes en A et en A_1 :

$$x = p + lt, \qquad y = q + mt, \qquad z = r + nt;$$

$$x_1 = p_1 + l_1\tau, \qquad y_1 = q_1 + m_1\tau, \qquad z_1 = r_1 + n_1\tau. \qquad (1)$$

$$\delta^2 = (p - p_1 + lt - l_1\tau_1)^2 + \ldots$$

$$\delta d\delta = (p - p_1 + lt - l_1\tau_1)(l dt - l_1 d\tau) + \ldots \qquad (2)$$

Prenons respectivement pour l, m, n ; l_1, m_1, n_1, les cosinus directeurs des tangentes en A et en A_1 ; t et τ représentent alors (§ 323, *4°*) les arcs de tangente ou, si l'on veut, les arcs $\overline{AC}$, $\overline{A_1C_1}$, dont les points A et A_1 se déplacent sur leurs courbes respectives par suite du mouvement considéré.

Évaluons les cosinus des angles α, α_1, *comptés à partir de la tangente correspondante vers la droite* AA_1.

Au point A, les cosinus directeurs de AA_1 sont (§ 316, *2°*) :

$$\frac{x_1 - x}{\delta}, \qquad \frac{y_1 - y}{\delta}, \qquad \frac{z_1 - z}{\delta};$$

d'où (§ 316, *3°*) :

$$\delta \cos\alpha = l(x_1 - x) + m(y_1 - y) + n(z_1 - z). \qquad (3)$$

Au point A_1, les cosinus directeurs de A_1A sont :

$$\frac{x - x_1}{\delta}, \qquad \frac{y - y_1}{\delta}, \qquad \frac{z - z_1}{\delta};$$

d'où : $$\delta \cos\alpha_1 = l_1(x - x_1) + m_1(y - y_1) + n_1(z - z_1). \qquad (4)$$

Remplaçons dans (3) et (4) les coordonnées par leurs valeurs (1). Comparons à (2) ; on trouve la relation fondamentale :

$$d\delta = -\cos\alpha \,.\, dt - \cos\alpha_1 \,.\, d\tau. \qquad (5)$$

La figure 211 montre la raison d'être des signes —.

Par exemple, quand A vient en C ($dt > 0$), l'angle α étant aigu ($\cos\alpha > 0$), la distance $\overline{AA_1}$ diminue ($d\delta < 0$).

La formule (5) a de nombreux et intéressants corollaires. Étudions en particulier les diverses manières d'y satisfaire *identiquement*.

2°. — Sphère.

Soit une droite invariable ($d\delta = 0$), dont une des extrémités A est fixe ($dt = 0$). On a donc identiquement $\cos\alpha_1 . d\tau = 0$.

Si l'extrémité A_1 est mobile, il faut que le cosinus soit identiquement nul, d'où $\alpha_1 = \pi : 2$. Donc quel que soit le mouvement de rotation de la droite invariable autour de A, elle reste normale aux trajectoires de son extrémité mobile A′ qui décrit évidemment une sphère.

3°. — Tube.

Soit une droite invariable ($d\delta = 0$), dont une des extrémités A décrit une courbe C à laquelle elle reste normale ($\cos\alpha = 0$). On

a nécessairement $\cos \alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \pi : 2$. L'extrémité mobile décrit alors un *tube*, surface que nous retrouverons plus loin (§ 398) et dont on a une représentation concrète dans un tube à gaz contourné comme on voudra. La courbe C est l'*axe* du tube.

4°. — Développante d'une courbe gauche.

La droite est assujettie à rester tangente à l'une des courbes : $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$. On impose de plus la condition $d\mathfrak{s} = -dt$. On doit avoir identiquement $\cos \alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \pi : 2$.

On reconnaît dans cet énoncé la généralisation pour les courbes *gauches* de la définition des *développantes* (95, *3°*). Un fil est attaché au point Ω et s'enroule sur la courbe $\Omega C'D$, que nous appellerons *développée*. A partir du point C' où il quitte la courbe, il suit la direction de la tangente $C'C$.

Les développantes sont les trajectoires des divers points du fil.

Rien dans cette définition ne suppose que la développée est plane.

La condition $d\mathfrak{s} = -dt$, exprime le déroulement : la longueur de la tangente augmente d'une quantité précisément égale à celle dont diminue l'arc de développée touchée par le fil.

La condition $\alpha_1 = \pi : 2$ exprime que la tangente à la développée est normale aux développantes. Les développantes (en nombre infini) qui correspondent à la même développée, sont des *courbes parallèles;* elles ont des normales communes en nombre infini. Conformément à la formule (5), les longueurs interceptées sur ces normales par deux développantes sont constantes.

Nous reviendrons sur les développantes des courbes gauches au § 427.

CHAPITRE XVI

SURFACES DU SECOND DEGRÉ

Invariants et formes quadratiques.

330. Invariants.

1°. — Nous avons montré, au § 317, que par rapport à deux systèmes d'axes de même origine, tous deux rectangulaires, les coordonnées x, y, z, X, Y, Z, d'un même point sont liées par les relations *linéaires* (5) ou les relations équivalentes (6).

Soit une fonction entière $f(x, y, z, a, b, c, \ldots)$, contenant (outre les variables x, y, z) des paramètres a, b, c, ... qui sont les coefficients des différents termes du polynôme. Substituons à x, y, z, leurs valeurs (6) en fonction de X, Y, Z. Nous obtenons un nouveau polynôme F(X, Y, Z, A, B, C, ...), évidemment du même degré que f, contenant de nouveaux coefficients A, B, C, ...

Il peut arriver qu'une fonction $\varphi(a, b, c, \ldots)$ des coefficients a, b, c, ... conserve la même valeur, lorsqu'on substitue à a, b, c, ... les coefficients A, B, C, ... ; ou encore prenne une nouvelle valeur égale à l'ancienne multipliée par un facteur μ indépendant des coefficients a, b, c, ... et fonction seulement des coefficients de la *substitution linéaire* (6). On dit que la fonction :

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = \mu\varphi(a, b, c, \ldots),$$

est un *invariant;* μ est seulement fonction des coefficients de la substitution.

Les *substitutions linéaires* (5) et (6) du § 317 ne sont pas générales, puisqu'il existe entre les coefficients les relations (1) et (3). Mais la définition que nous venons de donner ne suppose pas l'existence de ces relations : les substitutions linéaires peuvent être quelconques; quelconque aussi le nombre des variables.

2°. — Pour préciser ces notions, revenons sur une question déjà traitée (§ 105). Soit la fonction homogène :

$$f(x, y, m, n, p) = mx^2 + ny^2 + 2pxy.$$

On l'appelle *forme quadratique binaire*, pour exprimer que le degré est 2 (quadratique) et qu'il y a deux variables (binaire).

Faisons la substitution :

$$x = \alpha X + \alpha' Y, \qquad y = \beta X + \beta' Y.$$

Nous obtenons une nouvelle forme quadratique :

$$MX^2 + NY^2 + 2PXY;$$

$$M = m\alpha^2 + n\beta^2 + 2p\alpha\beta, \qquad N = m\alpha'^2 + n\beta'^2 + 2p\alpha'\beta',$$

$$P = m\alpha\alpha' + n\beta\beta' + p(\alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

On vérifiera la relation :

$$(MN - P^2) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 (mn - p^2);$$

$mn - p^2$ est un *invariant.*

Le facteur $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ s'appelle *module de la transformation.*

En particulier, s'il s'agit du passage d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, on a (§§ 78 et 317) :

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta, \qquad \alpha' = -\sin\theta, \qquad \beta' = \cos\theta;$$

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad MN - P^2 = mn - p^2.$$

Le module de la transformation est l'unité; l'invariant est absolu.

331. Covariants.

La propriété d'invariance se généralise.

Il peut arriver que la fonction φ contienne les variables et les coefficients; elle prend alors le nom de *covariant :*

$$\varphi(X, Y, Z, \ldots A, B, C, \ldots) = \mu\varphi(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots).$$

Le mot covariant signifie que les deux membres de l'équation précédente varient simultanément, de manière à rester identiques, quand les variables varient.

Si la forme φ est *binaire* ou *ternaire*, égalée à zéro ou à une constante, elle représente une courbe ou une surface. Une substitution linéaire quelconque exprime un changement de coordonnées (passage d'un système d'axes généralement obliques à un autre système d'axes également obliques). Le covariant est l'expression d'une propriété indépendante du choix des axes.

Exemple : par rapport à deux systèmes d'axes de même origine *et rectangulaires :*

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

est un covariant. Chacun des termes de l'équation exprime la distance d'un point à l'origine, distance évidemment indépendante du système d'axes.

Autre exemple. La distance d'un point à une droite est évidemment indépendante du système d'axes. Soit x, y, d'une part, X, Y,

de l'autre les coordonnées d'un point pour deux systèmes d'axes rectangulaires de même origine. Soit :

$$ax + by = d, \qquad AX + BY = D,$$

les équations correspondantes des droites. On a identiquement (§ 29) :

$$\frac{ax + by - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{AX + BY - D}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

C'est un covariant.

332. Invariants de la forme quadratique ternaire.

1°. — Soit la forme *quadratique ternaire* F :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy. \qquad (1)$$

Supposons qu'il soit possible de la ramener par une certaine substitution linéaire à la forme Φ :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2. \qquad (2)$$

Sur la forme (2), effectuons la transformation (5) du § 317 que nous appellerons *rotation* pour abréger ; elle devient :

$$A(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + B[\alpha' x + \beta' y + \gamma' z]^2 + C[\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z]^2. \qquad (1')$$

Identifions avec (1) :

$$a = A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2, \qquad f = A\beta\gamma + B\beta'\gamma' + C\beta''\gamma'',$$
$$b = A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2, \qquad g = A\gamma\alpha + B\gamma'\alpha' + C\gamma''\alpha'',$$
$$c = A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2 ; \qquad h = A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta''.$$

En vertu des relations (1) et (4) du § 317, on trouve aisément :

$$I_1 = a + b + c = A + B + C,$$
$$I_2 = (bc + ca + ab) - (f^2 + g^2 + h^2) = BC + CA + AB, \qquad (3)$$
$$I_3 = abc + 2fgh - (af^2 + bg^2 + ch^2) = ABC.$$

2°. — Inversement, si les équations (3) résolues par rapport à A, B, C, donnent des racines réelles, il sera possible, par la substitution linéaire (6) du § 317, de ramener F à la forme Φ.

Nous démontrerons plus loin qu'il en est ainsi (§ 333).

3°. — Pour l'instant résolvons le problème posé. Je dis que les premiers membres des équations (3) sont des *invariants* de la forme quadratique F pour les rotations (5) ou (6) du § 317.

En effet, une rotation R appliquée à F donne une forme F' dont les coefficients sont a', b', c', ... Mais F' pourrait, tout comme F, se déduire de la forme Φ par une rotation ρ' convenable des axes. On trouverait les mêmes coefficients a', b', c', ... Les relations (3) seront donc encore valables, en remplaçant a, b, c, ... par a', b', c', ...

Donc les premiers membres de ces équations sont des invariants.

Notre raisonnement repose au fond sur cette proposition (voir Mécanique), qu'on peut toujours remplacer deux rotations par une

seule équivalente. Pour passer de Φ à F, puis de F à F', il faut appliquer aux axes deux rotations ρ et R; on peut passer directement de Φ à F' par une seule rotation ρ'.

333. Réalité des quantités A, B, C.

1°. — Démontrons que les quantités A, B, C sont réelles. En vertu du § 41, les quantités A, B, C sont les racines de l'équation du troisième degré :

$$S^3 - I_1 S^2 + I_2 S - I_3 = 0. \qquad (1)$$

La somme des racines est égale au coefficient de S^2 changé de signe; la somme des produits des racines prises deux à deux est égale au coefficient de S; le produit des racines est égal au terme connu changé de signe.

L'équation (1) peut s'écrire :

$$(S-a)(S-b)(S-c)-[f^2(S-a)+g^2(S-b)+h^2(S-c)]-2fgh=0;$$

Posons : $a' = a - \dfrac{gh}{f}, \quad b' = b - \dfrac{hf}{g}, \quad c' = a - \dfrac{fg}{h}.$

L'équation prend la forme suivante, ce qu'on vérifie en chassant les dénominateurs :

$$P = \frac{1}{f^2(S-a')} + \frac{1}{g^2(S-b')} + \frac{1}{h^2(S-c')} - \frac{1}{fgh} = 0. \qquad (2)$$

2°. — Montrons que (2) a ses racines réelles. Elles sont inégales quand les quantités a', b', c', ne sont pas égales entre elles.

En effet, lorsqu'en variant de $-\infty$ à $+\infty$, S traverse l'une des valeurs a', b', c', (supposées rangées dans l'ordre des grandeurs croissantes), P passe brusquement d'une valeur négative à une valeur positive très grande. Donc quand S varie de $a'+\varepsilon$ à $b'-\varepsilon$, P passe d'une valeur positive très grande à une valeur négative très grande. Comme P varie continûment, il s'annule dans l'intervalle. L'équation (2) a donc une racine entre a' et b'.

De même il en existe une entre b' et c'.

Suivant le signe du produit fgh, la troisième est supérieure à c' $(fgh > 0)$, ou inférieure à a' $(fgh < 0)$. En effet, P se réduit à $-1 : fgh$ quand S prend des valeurs très grandes positives ou négatives.

3°. — Nous supposons que les quantités a', b', c', sont différentes. Si deux d'entre elles sont égales, $a' = b'$ par exemple, les racines de l'équation (2) sont encore réelles et inégales. Il résulte à la limite du raisonnement précédent, et l'on vérifie immédiatement, en chassant les dénominateurs de l'équation (2), qu'une des racines vaut $a' = b'$.

4°. — Si $a' = b' = c'$, il existe une racine double égale à cette

quantité. La troisième est évidemment donnée par la condition (obtenue en chassant les dénominateurs) :

$$fgh(S-a') = f^2g^2 + g^2h^2 + h^2f^2.$$

5°. — Si l'une des quantités f, g, h, est nulle, la forme (2) cesse d'être commode pour la discussion. On reprendra donc l'équation en a, b, c. Soit $f=0$, il reste :

$$P' = (S-a)(S-b)(S-c) - [g^2(S-b) + h^2(S-c)] = 0.$$

Supposons $a < b < c$. On substituera à S les valeurs $-\infty, b, c, +\infty$. Elles donnent pour P′ les signes $-, +, -, +$.

Il existe donc trois racines réelles inégales.

6°. — Supposons $f = g = 0$: l'une des racines est égale à c. Les deux autres sont données par l'équation du second degré :

$$(S-a)(S-b) - h^2 = 0,$$

dont les racines sont réelles et nécessairement inégales.

L'équation du troisième degré peut cependant avoir une racine double si :

$$(c-a)(c-b) - h^2 = 0.$$

7°. — Enfin soit $f = g = h = 0$; les racines sont a, b, c.

Conclusion. — *Toute forme quadratique ternaire peut être considérée comme la somme algébrique de trois carrés réels.*

334. Généralisation pour des formes quadratiques d'un nombre quelconque de variables.

1°. — Reprenons la forme *quadratique binaire* :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy, \qquad (1)$$

et appliquons-lui la substitution (§ 330) :

$$x = \alpha X + \alpha' Y, \qquad y = \beta X + \beta' Y.$$

Nous pouvons ramener (1) à la forme : $MX^2 + NY^2$, d'une infinité de manières, puisqu'il suffit de poser :

$$P = m\alpha\alpha' + n\beta\beta' + p(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = 0.$$

Nous avons *une* condition à satisfaire et *quatre* constantes arbitraires $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Géométriquement, ramener l'équation d'une conique à centre à la forme :

$$MX^2 + NY^2 = Q, \qquad (2)$$

c'est prendre pour axes obliques deux diamètres conjugués. En effet, pour toute valeur de Y, nous avons deux valeurs égales et de signes contraires de X, et inversement. Les cordes parallèles à OX sont donc coupées en parties égales par OY, et inversement. Or il existe une infinité de couples de diamètres conjugués; donc on peut ramener l'équation de la conique d'une infinité de manières à la forme (2).

Pour ramener la forme $MX^2 + NY^2$, à la forme :

$$\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2,$$

il suffit de changer les échelles sur les axes, ce qui revient à poser :

$$\mathcal{X} = \sqrt{M}\,X, \qquad \mathcal{Y} = \sqrt{N}\,Y.$$

2°. — Nous venons de voir (§ 333) que la forme *quadratique ternaire* peut se ramener *d'une manière unique* à la forme :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2.$$

Cela tient à ce que nous avons imposé la condition que le système des axes resterait trirectangle. Mais, cette condition écartée, on peut par des substitutions linéaires ramener d'une infinité de manières la forme quadratique ternaire à la forme précédente *et même à la forme canonique :*

$$\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2.$$

La proposition est vraie quel que soit le nombre de variables.

3°. — Toutefois on démontre, et c'est une proposition fondamentale en Mécanique (voir notre *Mécanique ;* Dynamique, chapitre VIII), que si la réduction à une somme de carrés peut s'effectuer d'une infinité de manières, *le nombre des carrés positifs et des carrés négatifs est néanmoins déterminé.*

L'interprétation géométrique est immédiate pour les formes binaires.

L'équation : $X^2 + Y^2 = C^{te}$ représente une ellipse, quels que soient les axes et les échelles sur les axes. De même l'équation : $X^2 - Y^2 = C^{te}$ représente une hyperbole.

Il est clair que la forme générale :

$$mx^2 + ny^2 + 2pxy = C^{te},$$

ne peut être ramenée qu'à l'une *ou* l'autre des formes canoniques, une substitution linéaire ne pouvant envoyer à l'infini des points à distance finie, ni rapprocher à distance finie des points à l'infini.

Classification des quadriques.

335. Quadriques centrées et non centrées.

Soit la forme quadratique :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2lx + 2my + 2nz + d = 0.$$

Par un changement d'origine, cherchons à faire disparaître les termes du premier degré. Transportons l'origine au point de coordonnées ξ, η, ζ; remplaçons donc x, y, z, par $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$.

Les coefficients des nouveaux x, y, z, satisfont aux conditions (§ 34, 2°) :

$$l' = a\xi + h\eta + g\zeta + l,$$
$$m' = h\xi + b\eta + f\zeta + m,$$
$$n' = g\xi + f\eta + c\zeta + n.$$

Écrivons qu'ils sont nuls. Les coordonnées ξ, η, ζ, de la nouvelle origine sont déterminées par trois équations du premier degré, dont les racines ont pour dénominateur commun :

$$I_3 = abc + 2fgh - (af^2 + bg^2 + ch^2).$$

Deux cas à considérer :

1°. — $I_3 \gtrless 0$; le point ξ, η, ζ, est à distance finie : *la surface possède un centre.* Effectivement, les termes du premier degré disparaissant, si le point x, y, z, appartient à la surface, le point $-x$, $-y$, $-z$, lui appartient aussi : *l'origine est centre de symétrie.*

2°. — $I_3 = 0$; le point ξ, η, ζ, est rejeté à l'infini. Il est impossible de faire disparaître simultanément les trois termes du premier degré en x, y, z.

336. Quadriques centrées.

En vertu du § 332, nous pouvons remplacer par une somme de carrés la forme quadratique ternaire à laquelle les termes variables se réduisent; d'où l'équation :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

1°. — Ellipsoïdes. — Les quantités A, B, C, sont positives; l'équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Soit $a > b > c$. La surface est limitée dans tous les sens.

En particulier, x est toujours inférieur à a, y à b, z à c.

Soit α, β, γ, les cosinus directeurs d'un rayon vecteur passant par l'origine. On a :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2};$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\gamma^2,$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\alpha^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\beta^2.$$

Les parenthèses sont toutes positives. Donc ρ est nécessairement inférieur à a qui est un maximum, supérieur à c qui est un minimum.

2°. — Hyperboloïdes a une nappe. — Une des trois quantités A, B, C, est négative; l'équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \text{(II)}$$

L'axe des z ne rencontre pas la surface (fig. 213 à gauche). On a :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Pour que le rayon vecteur issu de l'origine rencontre la surface,

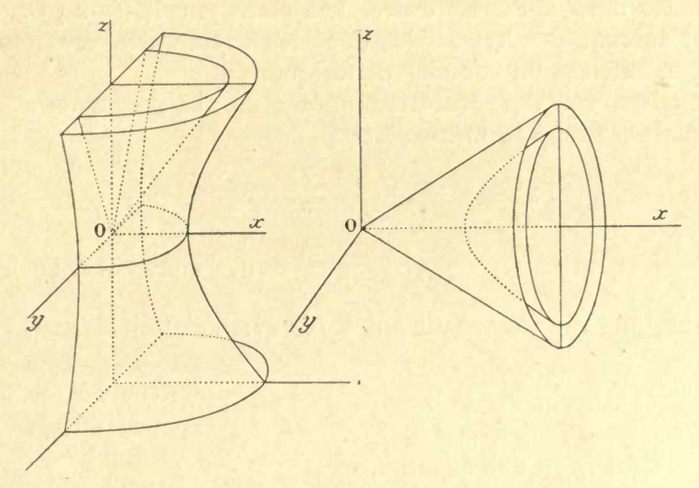


Fig. 213.

il faut que le second membre soit positif. Donc la surface :

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0, \quad \text{où :} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

sert de cloison entre les rayons vecteurs issus de l'origine qui rencontrent la surface et ceux qui ne la rencontrent pas.

C'est un *cône asymptotique,* dont l'origine est le sommet : sur ce cône même, les rayons vecteurs sont infinis.

Les plans parallèles à xOy coupent la surface suivant des ellipses *toujours réelles.* Les plans parallèles à xOz, yOz, coupent la surface suivant des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles à des génératrices du cône asymptotique.

La surface est de révolution autour de Oz si l'on a $a = b$.

Son équation est alors :

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3°. — Hyperboloïdes a deux nappes. — Deux des trois quantités A, B, C, sont négatives; l'équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \text{(III)}$$

Ni l'axe des z, ni l'axe des y ne rencontrent la surface.

Un cône asymptotique sert de cloison entre les vecteurs issus de l'origine qui rencontrent la surface et les vecteurs qui ne la rencontrent pas. La figure 213 à droite ne représente qu'une des nappes.

Les plans parallèles à yOz, *et dont la distance à l'origine est supérieure à* a, coupent la surface suivant des ellipses *réelles;* elles sont imaginaires dans le cas contraire. Les plans parallèles à yOx et zOx coupent suivant des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles à des génératrices du cône asymptotique.

La surface est de révolution autour de Ox quand on a $b = c$. Son équation prend la forme alors :

$$y^2 + z^2 = \rho^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{b^2} = 1.$$

4°. — L'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, convient à l'origine; si l'on veut, elle représente un ellipsoïde évanouissant.

L'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, ne convient à aucun point réel.

5°. — Cônes. — Les équations :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad \text{(IV)}$$

représentent des *cônes;* nous les avons utilisés plus haut sous le nom de *cônes asymptotiques.*

Coupons les surfaces (IV) par un plan passant par l'origine :

$$x = my + nz. \qquad (1)$$

Éliminons x entre (1) et l'une des équations (IV); nous obtenons une équation *homogène* du second degré en y et z. Résolvons par rapport à $y : z$; nous obtenons deux racines k_1 et k_2 :

$$y = k_1 z, \qquad y = k_2 z. \qquad (2)$$

Chacune des équations (2) associée à (1) définit une droite. Donc l'intersection de (IV) par un plan passant par le *sommet* (centre de symétrie, origine des coordonnées), se compose de deux droites; elles sont réelles ou imaginaires suivant le choix du plan (1).

L'intersection par des plans parallèles aux plans de coordonnées traite les cônes comme les hyperboloïdes dont ils sont asympto-

tiques; à la différence avec les hyperboloïdes à deux nappes, que les ellipses du second cône (IV) sont toujours réelles.

Nous reviendrons sur les cônes aux §§ 420 et suivants.

337. Quadriques non centrées.

1°. — Reprenons l'équation quadratique générale et, sans chercher à supprimer les termes du premier degré, ramenons les termes du second à la forme : $Ax^2 + By^2 + Cz^2.$

Comme par hypothèse $I_3 = 0$, l'équation (1) du § 333 a une racine nulle. La forme précédente se simplifie; elle se réduit par exemple à : $Ax^2 + By^2.$

Le changement des axes de coordonnées laisse du premier degré les termes qui l'étaient. Nous ramenons donc l'équation générale à la forme : $Ax^2 + By^2 + 2lx + 2my + 2nz + d = 0.$

Les nouveaux l, m, n, ne sont pas identiques aux anciens. Déplaçons maintenant l'origine dans le plan xOy; grâce aux deux arbitraires dont nous disposons, nous pouvons faire disparaître les termes en x et y.

En définitive, l'équation prend la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} + 2nz + d = 0. \qquad (1)$$

2°. — CYLINDRES. — Soit $n = 0$. L'équation représente une ellipse ou une hyperbole dans le plan xOy; elle représente aussi bien un *cylindre elliptique ou hyperbolique* de génératrices parallèles à l'axe Oz *qui est l'axe du cylindre.*

Le cylindre possède comme centres de symétrie tous les points de Oz, ce qui est géométriquement évident. On vérifiera que les équations donnant le centre deviennent indéterminées.

Nous étudierons les cylindres aux §§ 418 et suivants.

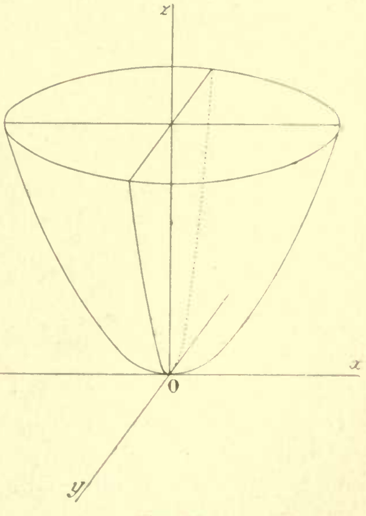


Fig. 214.

3°. — PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE. — Soit $n \gtreqless 0$, < 0 pour préciser; posons-le égal à -1, ce qui ne diminue pas la généralité de la solution. Un glissement de l'origine le long de Oz fait disparaître le terme constant.

Prenons positif le double signe de l'équation (1); il vient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \qquad (V)$$

C'est l'équation d'un *paraboloïde elliptique* (fig. 214).

Les plans parallèles à xOy coupent la surface suivant les ellipses, réelles pour $z > 0$, imaginaires pour $z < 0$: elle s'étend donc à l'infini au-dessus du plan xOy.

Les plans parallèles à yOz et xOz la coupent suivant des paraboles dont les axes sont parallèles à Oz, et les sommets sont dans les plans de coordonnées.

Si $a = b$, la surface est de révolution autour de Oz :

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad \frac{\rho^2}{a^2} = 2z.$$

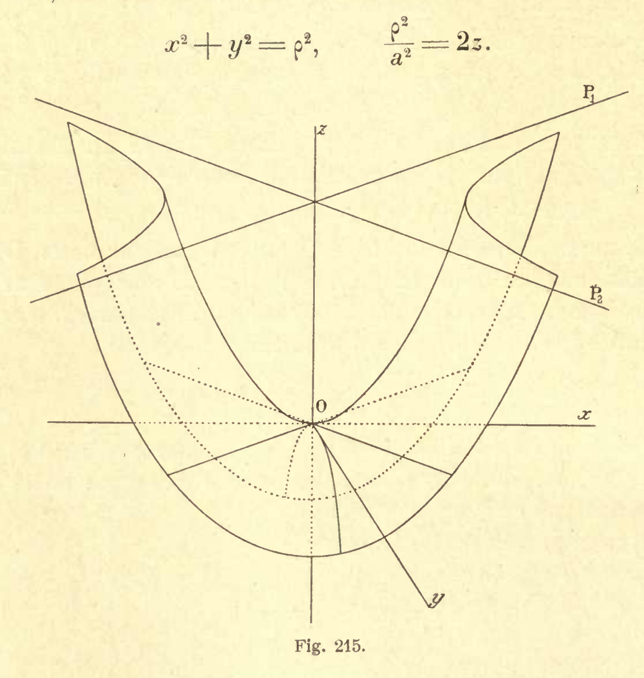


Fig. 215.

4°. — Paraboloïde hyperbolique. — Prenons négatif le double signe de l'équation (1) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

L'intersection par le plan xOy $(z = 0)$ se compose des droites (fig. 215) :

$$x : a = \pm y : b.$$

Les plans parallèles à xOy coupent suivant des hyperboles : pour $z > 0$, leurs axes réels sont parallèles à Ox ; pour $z < 0$, ils sont parallèles à Oy. Les sections planes parallèles à xOz et yOz sont des paraboles. La surface ressemble à une selle ou à un col de montagne.

Nous reviendrons longuement sur son étude à propos des conoïdes (§§ 441 et suivants).

5°. — Si la quadrique se réduit à : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, elle représente deux plans qui se coupent suivant Oz.

Quand a ou b sont infinis, on a l'un des cylindres paraboliques :

$$-y^2 = 2b^2z, \qquad x^2 = 2a^2z.$$

338. Propriétés générales des quadriques ; sections planes.

1°. — L'intersection d'une quadrique par un plan quelconque est une conique.

Reprenons l'équation sous sa forme générale. Les intersections *par les plans de coordonnées* sont évidemment des coniques, puisqu'on obtient leurs équations en annulant l'une des variables. Or ces plans sont quelconques : ce qui démontre le théorème.

2°. — Les intersections par les plans parallèles sont des coniques semblables.

Nous disons que deux *coniques à centre* sont semblables quand les termes du second degré sont les mêmes, ou respectivement proportionnels (§ 365, *2°*). La question de similitude ne se pose pas pour les paraboles qui sont toutes semblables (§ 365, *1°*) ; elles sont *égales* lorsqu'elles ont le même paramètre.

Supposons les axes choisis de manière que les plans parallèles du système considéré comprennent un des plans de coordonnées, xOy par exemple. Nous obtiendrons successivement les sections par tous les plans du système en donnant à z des valeurs différentes. Nous ne modifions pas ainsi les termes du second degré en x et y. Donc les coniques d'intersection sont semblables.

Ellipsoïde.

339. Propriétés générales de la surface. Sections planes.

Étudions les propriétés générales de la surface (fig. 216) :

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$

Nous posons $a > b > c$.

L'origine est *centre de symétrie ;* les plans de coordonnées Π, Π', Π'', sont *plans de symétrie ;* les axes sont *axes binaires de symétrie.* Ces propositions résultent de ce que x, y, z, intervenant seulement par leurs carrés, on peut remplacer les valeurs d'une, de deux, ou des trois coordonnées par les valeurs égales et de signes contraires sans que l'équation cesse d'être satisfaite.

La symétrie de l'ellipsoïde est donc représentée par le symbole :

$$L_2, L_2', L_2'', C, \Pi, \Pi', \Pi''.$$

Pour que les éléments de symétrie soient plus nombreux, il faut que l'ellipsoïde devienne de révolution autour de l'un des axes, qui est alors d'ordre infini. Tous les plans qui passent par lui sont de symétrie ; toutes les droites menées par le centre perpendiculairement à lui, sont axes binaires de symétrie.

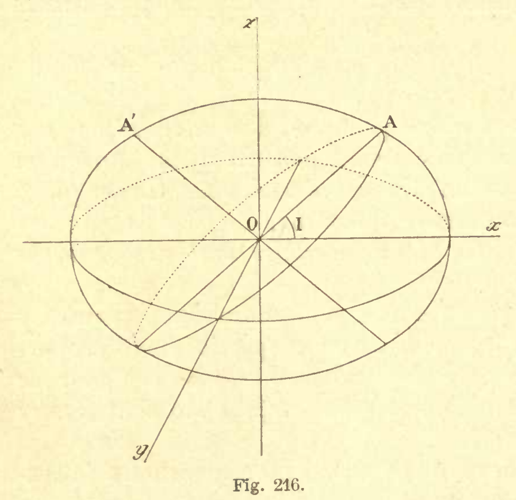


Fig. 216.

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de deux droites, il l'est autour d'une infinité : c'est une sphère.

L'intersection de l'ellipsoïde par un plan P quelconque est une ellipse, puisque c'est une conique (§ 338) qui n'a pas de points à l'infini.

Si le plan P est normal à l'un des plans Π de symétrie, la symétrie exige que l'un des axes de l'ellipse soit dans ce plan Π ; par suite, l'autre se trouve dans le plan de symétrie Π' normal à Π.

Si le plan P passe par l'un des axes L (qui est axe binaire pour la surface), L est l'axe de la conique d'intersection ; car il est axe binaire pour cette conique.

Tout plan passant par le grand axe (de longueur a) donne des ellipses allongées suivant cet axe. Tout plan passant par le petit axe (de longueur c) donne des ellipses aplaties suivant cet axe.

Étudions de plus près les sections par les plans passant par l'axe moyen.

340. Sections circulaires.

Puisque les sections par des plans parallèles sont semblables, pour déterminer s'il existe des sections circulaires, limitons-nous aux sections par des plans passant par le centre O.

Soit r le rayon du cercle d'intersection dont l'existence est supposée. Il est sur sa sphère :

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \qquad S=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}-1=0.$$

Par hypothèse, il est aussi sur l'ellipsoïde :

$$E=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Tout système de valeurs x, y, z, qui annule simultanément S et

E, annule S — E (Conf. § 88). Donc le cercle cherché est aussi sur le cône :

$$C = x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0.$$

Par hypothèse, il est sur un plan (d'intersection). Donc le cône C doit se décomposer en deux plans ; par suite, il faut que le coefficient de l'une des variables s'annule, autrement dit que *les* plans qui donnent des cercles (il résulte de ce qui précède qu'ils sont deux, à les supposer réels) passent par l'un des axes. D'après le paragraphe précédent, ce ne peut être que par l'axe moyen.

Faisons donc $r = b$; il vient :

$$\operatorname{tg} I = \frac{z}{x} = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Les sections circulaires forment donc deux systèmes de plans, parallèles aux plans P_1, P_2, que nous venons de déterminer. Ceux-ci passent par l'axe moyen de l'ellipsoïde et respectivement par deux droites OA, OA′, de longueur b, situées dans le plan xOz et symétriques par rapport à Oz.

Supposons que le plan d'intersection parallèle à P_1 s'éloigne du centre. Pour une certaine position, il est tangent à la surface : *un peu avant*, il la coupe suivant un cercle infiniment petit. Les points de contact jouissant de ces propriétés s'appellent *ombilics* (§ 460). L'ellipsoïde a donc quatre ombilics réels.

341. Plans diamétraux et diamètres.

1°. — Coupons l'ellipsoïde par la droite :

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n}. \qquad (1)$$

Déterminons le milieu de la corde d'intersection. Éliminons x et y entre (1) et l'équation de l'ellipsoïde $E = 0$.

Nous obtenons une équation du second degré en z :

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{l}{n}(z-r)+p\right]^2 + \frac{1}{b^2}\left[\frac{m}{n}(z-r)+q\right]^2 + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad (2)$$

Les racines z_1 et z_2 de cette équation correspondent aux extrémités de la corde. Le z du point milieu est $(z_1 + z_2) : 2$.

Ceci posé, soit l'équation :

$$Az^2 + Bz + C = 0; \qquad \text{on a (§ 41) :}$$

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{B}{2A}, \qquad 2Az + B = 0.$$

Appliquons ce résultat à l'équation (2) ; on trouve la condition :

$$\left(\frac{l^2}{n^2a^2} + \frac{m^2}{n^2b^2} + \frac{1}{c^2}\right)z + \frac{l}{na^2}\left[p - \frac{lr}{n}\right] + \frac{m}{nb^2}\left[q - \frac{mr}{n}\right] = 0, \quad (3)$$

qui, jointe aux équations (1), résout le problème posé.

2°. — Imaginons maintenant que la droite (1) conserve une direction invariable (l, m, n, constants), mais se déplace (p, q, r, variables). *Nous demandons le lieu des milieux des cordes.*

Pour le trouver, éliminons p, q, r, entre les équations (1) et (3).

On tire de (1) : $$p - \frac{rl}{n} = x - \frac{lz}{n}, \qquad q - \frac{rm}{n} = y - \frac{mz}{n}.$$

Multiplions les deux membres de (3) par n^2. Substituons les valeurs précédentes ; il vient :

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)z + \frac{l}{a^2}(nx - lz) + \frac{m}{b^2}(ny - mz) = 0,$$

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0. \qquad (4)$$

C'est un plan, passant par le centre, qu'on appelle plan diamétral conjugué de la direction l, m, n.

3°. — Inversement, coupons l'ellipsoïde par des plans parallèles à (4). Je dis que les centres des ellipses ainsi déterminées sont sur la droite :

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}, \qquad (5)$$

qui sera le diamètre conjugué des plans dont la normale a les cosinus directeurs proportionnels à $l : a^2$, $m : b^2$, $n : c^2$.

Pour démontrer ce théorème, coupons l'ellipsoïde par le plan :

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = d.$$

La projection de l'intersection sur le plan yOz est :

$$\left(\frac{ad}{l} - \frac{am}{lb^2}y - \frac{an}{lc^2}z\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (6)$$

Nous avons déterminé au § 103, 2° les coordonnées du centre d'une conique. Remplaçons les petites lettres par de grandes pour éviter la confusion. On trouve que pour la conique :

$$My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qy + 2Sz + T = 0,$$

les coordonnées y_0 et z_0 du centre sont :

$$y_0 = \frac{NQ - PS}{P^2 - MN}, \qquad z_0 = \frac{MS - PQ}{P^2 - MN}; \qquad \frac{z_0}{y_0} = \frac{MS - PQ}{NQ - PS}.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de calculer M, N, P, Q, S, pour la conique (6), et de vérifier qu'on a :

$$\frac{n}{m} = \frac{MS - PQ}{NQ - PS}.$$

Ce qui ne présente aucune difficulté.

342. Plans conjugués et diamètres conjugués.

Nous venons de définir une double relation géométrique entre la droite :

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}, \quad \text{et le plan :} \quad \frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}=0. \qquad (1)$$

1°. — Soit un second système :

$$\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}, \qquad \frac{l_1x}{a^2}+\frac{m_1y}{b^2}+\frac{n_1z}{c^2}=0. \qquad (2)$$

Écrivons (§ 324, *1°*) que la droite (2) est dans le plan (1) :

$$\frac{ll_1}{a^2}+\frac{mm_1}{b^2}+\frac{nn_1}{c^2}=0. \qquad (3)$$

Cette condition exprime aussi que le plan (2) contient la droite (1). *Donc toutes les droites d'un plan ont des plans conjugués qui passent par la droite conjuguée de ce plan.*

2°. — Choisissons d'abord le plan P_1 et déterminons sa droite conjuguée D_1. Prenons *arbitrairement* dans P_1 une droite D_2 ; le plan conjugué P_2 passe par D_1. Déterminons l'intersection D_3 de P_2 avec P_1. Naturellement elle est à la fois dans les plans P_1 et P_2 ; donc son plan conjugué passe par D_1 et par D_2 ; il est complètement déterminé.

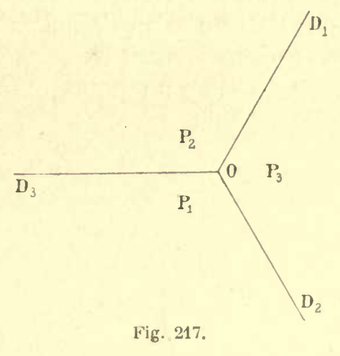


Fig. 217.

Nous définissons ainsi un trièdre dont chaque arête est conjuguée du plan des deux autres, dont chaque face est conjuguée de l'intersection des deux autres.

On remarquera qu'un plan P_1 fait partie d'une infinité de systèmes de plans conjugués, puisque D_2 est choisie arbitrairement parmi les droites qui sont dans P_1.

De même une droite D_2 fait partie d'une infinité de systèmes de diamètres conjugués, puisque P_1 peut être choisi arbitrairement parmi les plans qui passent par D_2.

3°. — Rapportons l'ellipsoïde à trois diamètres conjugués ; l'équation prend la forme : $Ax^2+By^2+Cz^2=1$.

On le montre immédiatement en écrivant que l'axe Ox, par exemple, est le lieu des centres des intersections de l'ellipsoïde par les plans parallèles au plan conjugué qui est yOz.

343. Plan tangent ; plan polaire. Méthode des polaires réciproques.

1°. — Différentions l'équation de l'ellipsoïde :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{XdX}{a^2}+\frac{YdY}{b^2}+\frac{ZdZ}{c^2}=0.$$

Soit X, Y, Z, les coordonnées du point de contact A ; x, y, z, les coordonnées courantes. Le plan tangent a pour équations équivalentes (§ 322) :

$$\frac{X(x-X)}{a^2}+\frac{Y(y-Y)}{b^2}+\frac{Z(z-Z)}{c^2}=0,$$

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1. \qquad (1)$$

2°. — La droite qui va du centre au point X, Y, Z, a pour équations :

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}. \qquad (2)$$

Comparons l'équation (1) à celle du plan diamétral conjugué de la droite (2). Nous concluons que *le plan tangent en un point* A *est parallèle au plan diamétral conjugué du rayon vecteur* OA *issu du centre qui aboutit en ce point.*

3°. — Par un point extérieur B de coordonnées x, y, z, menons

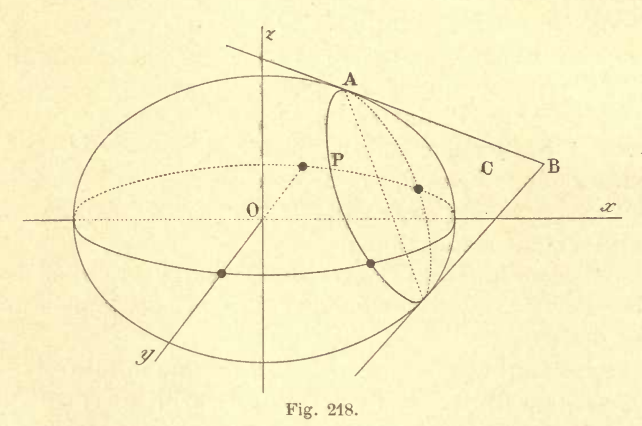


Fig. 218.

des plans tangents à la surface (fig. 218). Les coordonnées des points A de contact X, Y, Z, doivent satisfaire aux équations :

$$T=\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0, \qquad \text{du plan tangent,}$$

$$E=\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0, \qquad \text{de l'ellipsoïde.}$$

Mais l'équation $T=0$, en y regardant X, Y, Z, comme des coordonnées courantes, est celle d'un plan. Donc les points de contact des plans tangents qui passent par le point B, sont sur un plan P qu'on appelle *plan polaire* du point B ; celui-ci prend le nom de *pôle.* Le plan polaire a la même équation que le plan tangent.

Tous les plans tangents qui passent par le *pôle* B ont pour *enveloppe* (§ 397) un cône C qu'on appelle *cône tangent* ou *cône circonscrit.*

4°. — Rien, dans l'équation $T = 0$, ne suppose que le point B est extérieur à l'ellipsoïde. On définit donc même le plan polaire d'un point par lequel on ne peut mener aucun plan tangent *réel*.

Si le plan polaire P_1 de B_1 passe par B_2, réciproquement le plan polaire P_2 de B_2 passe par B_1 (fig. 219).

En effet, la condition est la même dans les deux cas :

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 1.$$

Considérons un point E de l'intersection des plans P_1 et P_2. Puisqu'il appartient à la fois aux deux plans, son plan polaire passe par les pôles de ces plans. Donc il passe par la droite B_1B_2.

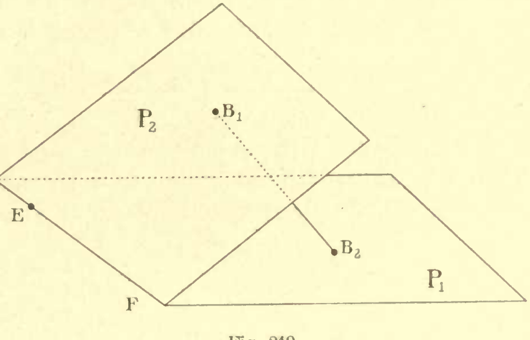


Fig. 219.

Déplaçons le point E sur l'intersection des plans P_1 et P_2 : son plan polaire tourne autour de la droite B_1B_2 qu'il contient toujours. La droite EF s'appelle *droite polaire* de la droite B_1B_2 par rapport à l'ellipsoïde considéré.

Réciproquement B_1B_2 est la droite polaire de EF ; cela signifie que les plans polaires de tous les points de B_1B_2 passent par EF ; ce qu'on vérifiera aisément.

Les propriétés précédentes permettent donc de conjuguer :

1° un point à un plan, une suite de points à une suite de plans ; 2° inversement, un plan à un point, une suite de plans à une suite de points ; 3° une droite à une droite, une suite de droites à une suite de droites. On conçoit que tout théorème démontré pour une suite de points entraînera un théorème démontré *ipso facto* pour une suite de plans, et réciproquement. C'est à ce doublement remarquable du nombre des théorèmes qu'on donne le nom de *principe de dualité*.

5°. — Pour fixer les idées, prenons comme quadrique une sphère de rayon R. Soit x, y, z, les coordonnées d'un point B. L'équation du plan polaire est :

$$Xx + Yy + Zz = R^2,$$

dont la distance à l'origine D est (§ 319, 3°) :

$$\Delta = \frac{R^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad \text{d'où :} \qquad \Delta \,.\, \overline{OB} = R^2.$$

Le plan polaire du plan B est normal à OB ; le produit de sa distance au centre de la sphère par la distance du pôle au même point est constante. On vérifiera aisément que deux droites polaires l'une de l'autre sont normales l'une sur l'autre.

Quadriques homofocales.

344. Définition.

1°. — Deux quadriques sont *homofocales* quand leurs sections principales ont respectivement les mêmes foyers (§ 240).

Les quadriques homofocales rentrent dans l'équation générale :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1, \qquad (1)$$

où λ est le paramètre variable. En effet, la distance des foyers d'une conique à son centre est égale à la différence des carrés des longueurs des axes. Or, quelle que soit la valeur de λ, les coniques :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,$$

par exemple, ont mêmes foyers, puisque :

$$(a^2+\lambda)-(b^2+\lambda)=a^2-b^2.$$

Supposons $a>b>c$. L'équation (1) représente :

des ellipsoïdes, si $\infty>\lambda>-c^2$,

des hyperboloïdes à une nappe, si $-c^2>\lambda>-b^2$,

des hyperboloïdes à deux nappes, si $-b^2>\lambda>-a^2$.

Le paramètre λ ne peut descendre au-dessous de $-a^2$.

2°. — *Les trois surfaces homofocales du même faisceau qui passent par un point, appartiennent respectivement aux trois espèces possibles.*

En effet, x, y, z, étant donnés, λ est fourni par une équation du troisième degré qu'on tire de (1) en chassant les dénominateurs :

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)-x^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)-y^2(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)$$
$$-z^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)=0.$$

Substituant à λ les valeurs :

	$+\infty$	λ_1	$-c^2$	λ_2	$-b^2$	λ_3	$-a^2$
on trouve :	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

pour les signes du premier membre. Donc λ_1 convient à un ellipsoïde, λ_2 à un hyperboloïde à une nappe, λ_3 à un hyperboloïde à deux nappes disposés comme dans la fig. 213, d'après l'hypothèse $a>b>c$.

345. Deux surfaces homofocales se coupent partout à angle droit.

1°. — Deux surfaces se coupent à angle droit en un point A de leur courbe d'intersection, quand les plans tangents au point A sont normaux, ou, ce qui revient au même, quand les normales au point A sont rectangulaires.

Le plan tangent en un point X, Y, Z, de la surface (1) a pour équation (§ 343) : $$\frac{xX}{a^2+\lambda}+\frac{yY}{b^2+\lambda}+\frac{zZ}{c^2+\lambda}=1.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à :

$$\frac{X}{a^2+\lambda}, \quad \frac{Y}{b^2+\lambda}, \quad \frac{Z}{c^2+\lambda}.$$

Donnons à λ deux valeurs égales à deux des racines λ_1, λ_2, λ_3, de l'équation qui exprime que les quadriques passent par le point X, Y, Z. Écrivons que les deux normales aux surfaces ainsi déterminées sont rectangulaires (§ 316) :

$$\frac{X^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{Y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{Z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}=0. \quad (1)$$

Mais nous avons :

$$\frac{X^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda_1}=1, \quad (2)$$

$$\frac{X^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda_2}=1. \quad (3)$$

Retranchons (2) et (3) membre à membre ; nous retrouvons (1).

2°. — Comme cas particulier, nous avons le théorème du § 240. Pour $\lambda=-c^2$, la surface *qui est à volonté un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe évanouissants,* se réduit à *tout* le plan $z=0$. Pour $\lambda=-b^2$, *la surface qui est à volonté l'un ou l'autre hyperboloïde* se réduit à *tout* le plan $y=0$. Enfin, pour $\lambda=-a^2$, l'hyperboloïde à deux nappes se confond avec le plan $x=0$. Les autres valeurs de λ sont fournies par une équation du second degré.

3°. — Coordonnées elliptiques.

Un point quelconque de l'espace peut être défini par les paramètres λ_1, λ_2, λ_3, qui constituent ce qu'on appelle les *coordonnées elliptiques* du point. Les valeurs x^2, y^2, z^2, correspondantes, s'en déduisent par trois équations du premier degré de la forme (2).

Ces coordonnées sont employées dans un grand nombre de problèmes des théories de l'Élasticité, de la Conductibilité électrique ou calorifique.

CHAPITRE XVII

CORRESPONDANCE POINT PAR POINT

Homographie linéaire et involution.

346. Correspondance homographique des points de deux droites.

1°. — Prenons une origine sur chacune des droites D, D′ (fig. 220) : O pour la première, O′ pour la seconde. Appelons x, x', les distances

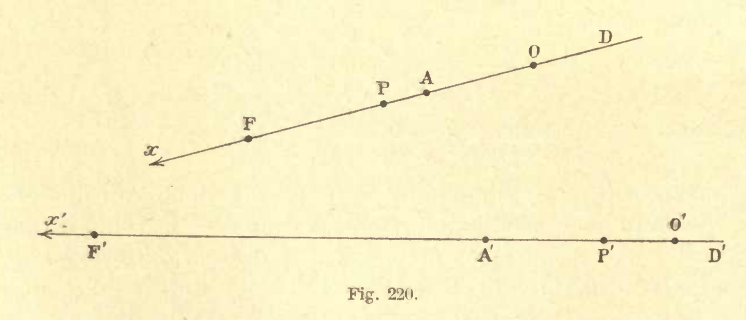


Fig. 220.

respectives des points P, P′, aux origines correspondantes, distances comptées positivement dans un sens, négativement en sens contraire.

On dit que les points P, P′, des deux droites sont *conjugués homographiquement*, quand on a :

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0, \qquad (1)$$

où A, B, C, D, sont des constantes.

Le point P étant donné par sa distance $(\overline{OP} = x)$, à l'origine O, l'équation (1) linéaire en x' fournit une valeur de x' et une seule. Elle détermine sans ambiguïté le point P′ conjugué de P. Inversement, si P′ est donné, l'équation (1) fournit le point P conjugué.

2°. — Choisissons pour nouvelles origines A et A′ deux points conjugués définis par les distances a et a' aux origines O et O′. Posons donc :

$$y = x - a, \qquad y' = x' - a'.$$

Transportons dans (1), il vient :

$$Ayy' + (B - Aa')y + (C - Aa)y' + Aaa' + Ba + Ca' + D = 0,$$

qui se réduit à :

$$Ayy' + (B - Aa')\,y + (C - Aa)\,y' = 0, \qquad (2)$$

en vertu de l'hypothèse que A et A' sont conjugués.

Ce résultat était à prévoir, puisqu'on doit trouver :

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad y' = 0.$$

Divisons par Ayy' ; l'équation (2) prend la forme :

$$\frac{f}{y} + \frac{f'}{y'} = 1,$$

en posant : $\quad f = \dfrac{Aa - C}{A}, \qquad f' = \dfrac{Aa' - B}{A}.$

3°. — Si les points de la droite D sont conjugués homographiquement, d'une part des points de la droite D', de l'autre des points de la droite D'', les points de D' et de D'' sont eux-mêmes conjugués homographiquement. En effet, par un choix convenable des origines, nos hypothèses s'expriment par les relations :

$$\frac{f}{y} + \frac{f'}{y'} = 1, \qquad \frac{\varphi}{y} + \frac{\varphi'}{y''} = 1.$$

D'où :

$$\frac{\varphi f'}{y'} - \frac{\varphi' f}{y''} = \varphi - f,$$

qui renferme la proposition énoncée.

347. Foyers.

1°. — On appelle *foyer* de la droite D le point F de cette droite qui correspond à l'infini sur la droite D' ; inversement, le *foyer* de la droite D' est le point F' qui correspond à l'infini sur la droite D.

Faisons successivement $x' = \infty$, $x = \infty$, dans l'équation :

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 ; \qquad (3)$$

il vient : $\quad \overline{AF} = f, \qquad \overline{A'F'} = f'.$

2°. — Foyers comme origines.

Faisons : $\quad x = \xi + f, \qquad x' = \xi' + f'.$

Il vient l'équation : $\quad \xi\xi' = ff'. \qquad (4)$

Pour $\xi = 0$, on a $\xi' = \infty$, et inversement.

3°. — *En définitive, la correspondance homographique des points des droites D et D' est complètement déterminée quand on se donne les foyers F et F' et la constante ff'*. A deux valeurs égales et de signes contraires de ξ, correspondent deux valeur égales et des signes contraires de ξ'. Changer le signe de ff' revient à changer sur l'une des droites le sens dans lequel on compte positivement les distances aux foyers.

348. Systèmes afocaux.

Il peut arriver que la constante A des équations (1) et (2) soit nulle. La forme (3) devient illusoire. Prenons deux points correspondants pour origines ; la relation homographique (1) se réduit à :

$$x = kx'.$$

Les points de l'infini sur les deux droites se correspondent ; autrement dit, les foyers sont à l'infini.

Le système des points conjugués est dit *afocal*.

Superposons les droites D et D' confondues, et faisons coïncider les points conjugués O, O', que nous avons pris pour origines. Nous pouvons construire aisément un nombre quelconque de points conjugués (fig. 220 *bis*).

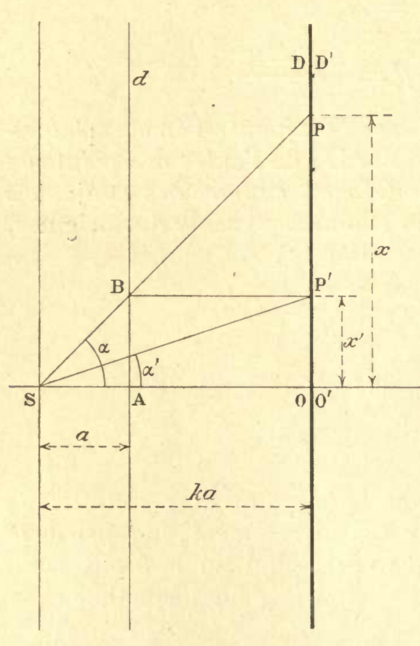


Fig. 220 *bis*.

En effet, menons par O une perpendiculaire à la droite D. Prenons dessus deux points S et A tels que les distances $\overline{SA}$ et $\overline{SO}$ soient dans le rapport $1 : k$. Enfin menons par A une parallèle à D. Pour trouver le point P conjugué du point P', traçons P'B parallèle à SO, joignons SB et prolongeons jusqu'à la rencontre avec D.

La figure permet de discuter aisément la relation :

$$\operatorname{tg}\alpha = k \operatorname{tg}\alpha',$$

qu'on rencontre souvent en Physique. Pour de petites valeurs de α et de α', la droite SP tourne k fois plus vite que SP'. Les deux droites tournent avec la même vitesse pour des angles α et α' complémentaires donnés par les formules :

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{k}, \qquad \operatorname{tg}\alpha' = 1 : \sqrt{k}.$$

Enfin pour des angles voisins de $\pi : 2$, c'est SP' qui tourne k fois plus vite que SP.

349. Droites D et D' superposées ; points doubles.

1°. — Superposons les droites D et D'. Le système des points conjugués est complètement défini si l'on donne la distance $\overline{FF'} = 2\Delta$, la constante ff', enfin les sens dans lesquels on compte positivement ξ et ξ'. Admettons que c'est vers la droite pour les deux divisions.

Un point D_1 quelconque est à une distance (fig. 221) :

$$\xi \text{ de } F, \qquad \xi - 2\Delta \text{ de } F'.$$

2°. — Écrivons qu'il coïncide avec son conjugué, qu'il est *point double*. Il faut poser :

$$\xi' = \xi - 2\Delta, \qquad \xi(\xi - 2\Delta) = ff', \qquad \xi = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + ff'}.$$

Nous aurions pu écrire :

$$\xi = \xi' + 2\Delta, \qquad \xi'(\xi' + 2\Delta) = ff', \qquad \xi' = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + ff'}.$$

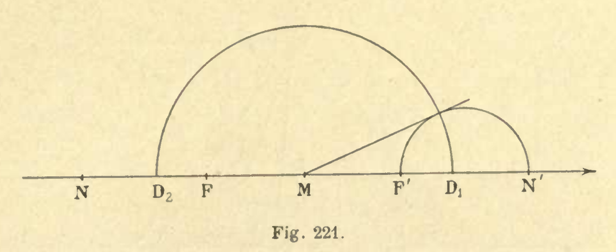


Fig. 221.

On détermine ainsi deux points D_1 et D_2; réels, ils sont symétriquement placés par rapport à F et à F'.

3°. — Cherchons à quelle condition les points doubles sont réels.

Dans les deux systèmes de points, prenons les conjugués N' et N du milieu M de $\overline{FF'}$. La distance $\xi' = \overline{F'N'}$ est donnée par la formule :

$$\xi = \Delta, \qquad \xi'\Delta = ff'.$$

La distance $\xi = \overline{FN}$, est donnée par la formule :

$$\xi' = -\Delta, \qquad -\xi\Delta = ff'.$$

Vérifions qu'on a : $\quad \overline{MD_1}^2 = \overline{MF'} \,.\, \overline{MN'}$.

$$\overline{MD_1} = \overline{FD_1} - \Delta = +\sqrt{\Delta^2 + ff'}, \qquad MF' = \Delta,$$

$$\overline{MN'} = \overline{MF'} + \overline{F'N'} = \Delta + \xi';$$

$$[\sqrt{\Delta^2 + ff'}]^2 = \Delta(\Delta + \xi') = \Delta^2 + ff'.$$

Donc on obtient les points doubles en traçant une circonférence sur F'N' comme diamètre, en menant la tangente par le point M, enfin en décrivant de ce point M comme centre la circonférence qui passe par le point de tangence. Pour que les points doubles soient réels, il faut donc que N' et F' soient du même côté de M, ou, ce qui est connexe, que la même condition soit réalisée pour N et F.

350. Établissement d'une correspondance homographique.

Une droite qui passe par un point fixe C, coupe deux droites D

et D′ en des points qui sont conjugués homographiquement (fig. 222).

Prenons les droites D, D′, comme axes de coordonnées obliques (§ 315). Soit :

$$y - y_0 = a(x - x_0),$$

l'équation d'une droite CAA′ qui passe par le point C (x_0, y_0).

On a pour coordonnées :

de l'intersection A avec D $\quad x = 0, \quad Y = y_0 - ax_0\,;$

A′ avec D′ $\quad y = 0, \quad X = x_0 - y_0 : a.$

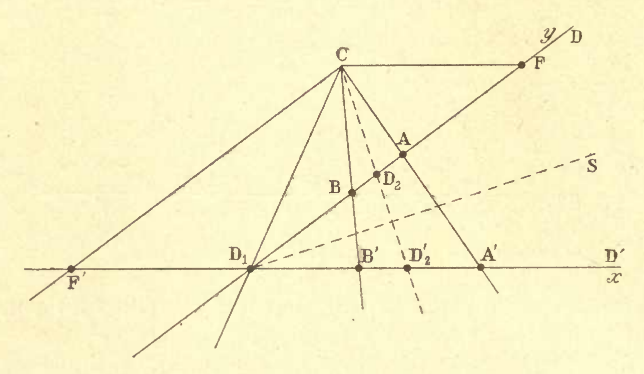


Fig. 222.

Éliminons a entre les équations :

$$Y = y_0 - ax_0, \qquad X = x_0 - y_0 : a.$$

Il vient :

$$\frac{x_0}{X} + \frac{y_0}{Y} = 1.$$

On pouvait prévoir cette forme : les foyers F et F′ sont obtenus en menant par C des parallèles aux droites D et D′.

Leurs coordonnées sont donc :

pour F : $x = 0, \quad Y = y_0\,;$ pour F′ : $y = 0, \quad X = x_0.$

Rabattons la droite D sur la droite D′. Les points doubles sont D_1 et D'_2. Pour obtenir D'_2, menons la bissectrice D_1S et abaissons sur elle une perpendiculaire du point C. On a $\overline{D_1D_2} = \overline{D_1D'_2}$: les points conjugués D_2 et D'_2 se superposent donc après le rabattement.

Remarque.

On réalise bien ainsi une correspondance homographique sur les droites D et D′, la plus générale possible par rapport aux droites considérées indépendamment de leur situation dans le plan, mais non la plus générale par rapport au plan. Pour obtenir une correspondance plus générale, on fera glisser arbitrairement une des droites sur elle-même, de sorte que le point d'intersection des deux droites, considéré comme appartenant à l'une d'elles, ne soit plus son propre conjugué sur l'autre.

351. Rotation d'un angle constant autour de son sommet.

Quand on a fait tourner autour du sommet C un angle constant θ, ses côtés déterminent sur une droite D deux divisions homographiques.

Prenons des axes rectangulaires passant par le point C; Cy est parallèle à D. Soit BCB' une position de l'angle; écrivons que BCB' est égal à θ. On a :

$$\text{tg}\theta = \text{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\text{tg}\alpha' - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\alpha'};$$

$$y = \overline{OB} = x_0 \text{tg}\alpha,$$

$$y' = \overline{OB'} = x_0 \text{tg}\alpha';$$

$$yy' + (y' - y)\,x_0 \cot\text{g}\,\theta + x_0^2 = 0.$$

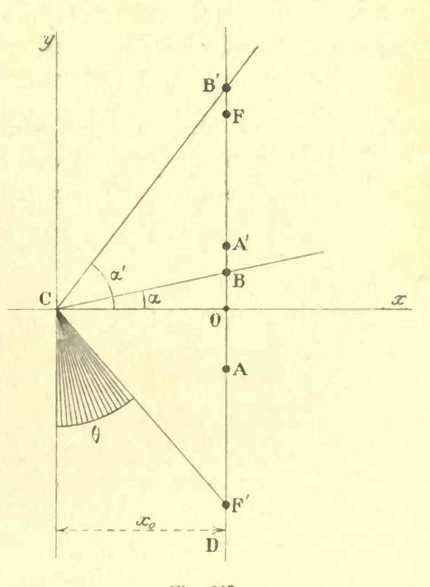


Fig. 223.

Les points doubles des divisions homographiques sont imaginaires.

En effet, posons $y = y'$; il reste :

$$y^2 + x_0^2 = 0, \quad y : x_0 = \pm i.$$

Réciproquement, pour qu'on puisse considérer les divisions homographiques comme obtenues par la rotation d'un angle constant, il faut que les points doubles soient imaginaires.

352. Involution.

1°. — Les divisions homographiques *de deux droites superposées* sont *en involution*, lorsque les *foyers* coïncident : $\Delta = 0$ (§ 349). Les distances ξ, ξ', de la formule :

$$\xi\xi' = ff',$$

ont alors même origine. Il résulte de là qu'un point P considéré successivement comme appartenant aux deux droites superposées D et D', a dans les deux cas le même conjugué.

Dans le cas général, s'il appartient à la droite D, on a :

$$\overline{FP} \,.\, \overline{F'P'_1} = ff';$$

s'il appartient à la droite D', on a :

$$\overline{FP_1} \,.\, \overline{F'P} = ff'.$$

Nous définissons ainsi généralement deux points différents P'_1 et P_1. Ils ne sont *confondus* que si F coïncide avec F'; on a alors :

$$\overline{FP} = \overline{F'P}, \qquad \overline{FP_1} = \overline{F'P'_1} = \overline{FP'_1}.$$

2°. — Construction des deux systèmes de points.

Soit A et A′, B et B′, quatre points deux à deux correspondants ; menons par un point P deux circonférences passant respectivement par ces points. Elles se coupent en Q. Joignons P et Q ; la droite PQ détermine sur D le point F qui est le *foyer de l'involution*. En effet, d'après les propriétés des sécantes et tangentes au cercle (§ 327), on a :

$$\overline{FA} \, . \, \overline{FA'} = \overline{FB} \, . \, \overline{FB'} = \overline{FT}^2.$$

Donc D_1 et D_2 sont les points doubles. Ils sont imaginaires si P et Q sont de part et d'autre de la droite D.

3°. — Élevons une perpendiculaire à la droite D au point F. Joi-

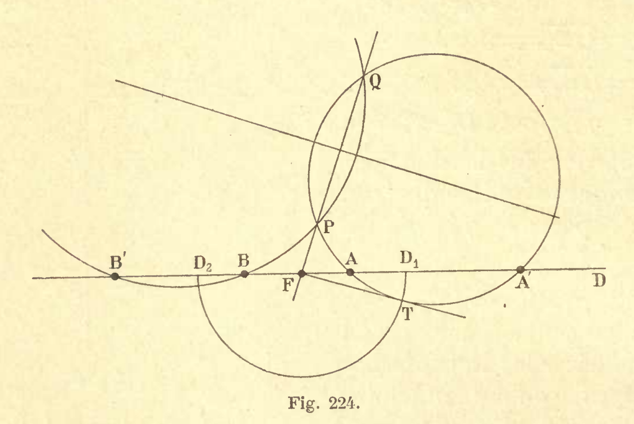


Fig. 224.

gnons un de ses points à deux points conjugués quelconques de l'involution. Les droites ainsi obtenues font avec elles des angles α et α' satisfaisant à l'équation :

$$\text{tg}\alpha \, . \, \text{tg}\alpha' = \text{Constante}. \qquad (1)$$

Nous savons (§ 120) qu'ainsi sont reliées entre elles les pentes des diamètres conjugués de l'hyperbole et, au signe de la constante près, ceux de l'ellipse.

Grâce à l'involution, nous pouvons discuter aisément la manière dont tournent, l'une par rapport à l'autre, deux droites dont les pentes sont liées par la condition (1).

353. Remarque sur l'homographie et l'involution.

1°. — Il résulte de la construction du § 350 que, pour déterminer une correspondance homographique, il faut connaître les homologues sur D′ de trois points donnés sur D. On en amène un groupe en coïncidence ; les deux autres groupes déterminent deux droites qui par leur intersection donnent le point C. D'où ensuite un nombre quelconque de groupes de points homologues.

Pour fixer la correspondance homographique, il revient au même de choisir un foyer sur chaque droite et d'imposer la constante ff'.

Les points doubles sont accessoires ; ils existent par ce qu'on superpose les droites ; leurs positions et leur réalité même tiennent aux positions relatives des foyers lors de la superposition.

Une correspondance homographique établie entre deux droites D et D′ possède donc à volonté des points doubles réels ou imaginaires ; en particulier, elle peut devenir une involution. Établissons, par le procédé du § 350, une correspondance homographique à partir de trois points pris sur D et de leurs homologues donnés sur D′ ; superposons les droites D et D′ en ayant soin de faire coïncider les foyers ; nous avons une involution.

2°. — Nous savons (§ 351) qu'une correspondance homographique à points doubles imaginaires sur deux droites D et D′ *superposées,* peut être établie par la rotation d'un angle constant tournant autour de son sommet. Le procédé s'applique donc *à toute correspondance homographique,* puisque, pour rétablir la réalité des points doubles, il suffit de faire glisser les droites l'une par rapport à l'autre, au besoin d'en faire tourner une de 180° autour de son foyer.

Lorsqu'on fait coïncider les foyers, l'angle constant devient droit : ce qui est évident d'après la figure 223. Le procédé s'applique à toute correspondance homographique. Au besoin, pour rendre les points doubles imaginaires, on fera tourner l'une des droites de 180° autour du foyer commun.

3°. — Nous avons vu que toute correspondance homographique peut se mettre sous la forme :

$$\frac{f}{y}+\frac{f'}{y'}=1, \qquad (1)$$

les origines étant deux points conjugués quelconques ; f et f' sont les distances de ces points aux foyers correspondants.

On peut toujours ramener cette équation à la forme :

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y'}=\frac{1}{f};$$

il suffit de prendre des sens positifs convenables et de choisir pour origines les points conjugués qui sont à la même distance f des foyers.

Il en existe évidemment toujours deux *réels*, en vertu de la relation : $\xi\xi'=$ constante.

Suivant le signe de la constante, ils sont du même côté des foyers ou de côtés opposés ; mais cela n'a pas d'importance. Sous ce rapport, aucune simplification ne s'introduit dans le cas de l'involution : l'égalité des constantes de la forme (1) ne se produit que pour un choix convenable des points correspondants origines.

354. Rapport anharmonique, rapport harmonique.

On présente souvent les notions précédentes sous une forme qu'il est utile de connaître.

1°. — RAPPORTS ANHARMONIQUES.

On appelle *rapport anharmonique* de quatre points A,B,C,D, le rapport (fig. 225) :

$$\rho = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}. \qquad (1)$$

On appelle *rapport anharmoique* de quatre droites concourantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le rapport :

$$\rho_1 = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\alpha\delta)} : \frac{\sin(\beta\gamma)}{\sin(\beta\delta)}. \qquad (2)$$

Il est facile de voir que ces rapports sont égaux si les droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, passent par les points A,B,C,D, quel que soit le point de concours S.

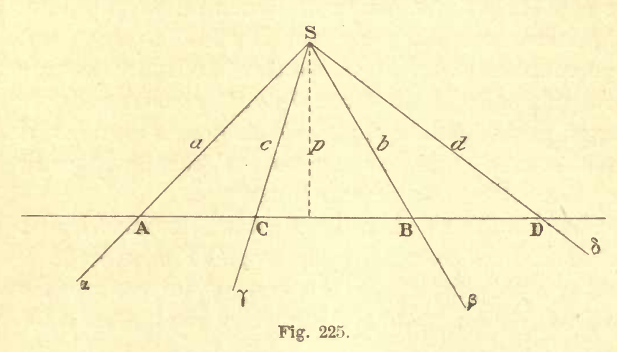


Fig. 225.

En effet, les triangles de sommet S qui ont même hauteur p, ont des aires proportionnelles à leurs bases.

On a de plus (§ 68) :

deux fois l'aire du triangle $SAC = ac \sin(\alpha\gamma)$, et ainsi de suite.

Substituons dans (1) les aires aux bases correspondantes; il vient :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{ac\sin(\alpha\gamma)}{ad\sin(\alpha\delta)} : \frac{bc\sin(\beta\gamma)}{bd\sin(\beta\delta)} = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\alpha\delta)} : \frac{\sin(\beta\gamma)}{\sin(\beta\delta)}.$$

Il résulte de cette équation que le rapport anharmonique déterminé par quatre droites α, β, γ, δ, sur une transversale ACBD, est constant et indépendant de la transversale choisie.

2°. — Quand deux systèmes de points sont conjugués homographiquement, le rapport anharmonique de quatre points du premier système est égal au rapport anharmonique des conjugués dans le second.

Pour démontrer commodément cette proposition, on prendra les foyers pour origines (§ 347).

3°. — Réciproquement, soit trois points fixes sur une droite D, et trois points conjugués sur une droite D'. Conjuguons deux points mobiles P et P' de manière que les rapports anharmoniques des quatre points (trois fixes, un mobile) pris sur chaque droite soient égaux entre eux pour toutes les positions de P et P' (ce qui ne signifie pas qu'ils restent invariables) : les points P et P' sont conjugués homographiquement.

4°. — RAPPORT HARMONIQUE.

Le rapport anharmonique devient *harmonique* lorsqu'il est égal à -1 (§ 86).

Soit A et B deux points fixes sur une droite ; conjuguons deux autres points C et D mobiles de manière que le rapport soit constamment harmonique ; nous obtenons une involution dont A et B sont les points doubles.

355. Théorème sur les transversales.

Nous démontrerons ici un théorème célèbre reliant les segments que détermine une transversale sur les côtés d'un triangle. On a :

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} \,. \tag{1}$$

En effet, dans les triangles Abc, Bca, Cab (§ 67) :

$$\frac{\overline{Ab}}{\overline{Ac}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}, \quad \frac{\overline{Bc}}{\overline{Ba}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{\overline{Ca}}{\overline{Cb}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

puisque les angles supplémentaires ont même sinus. Multiplions membre à membre ces trois équations; il reste la relation (1).

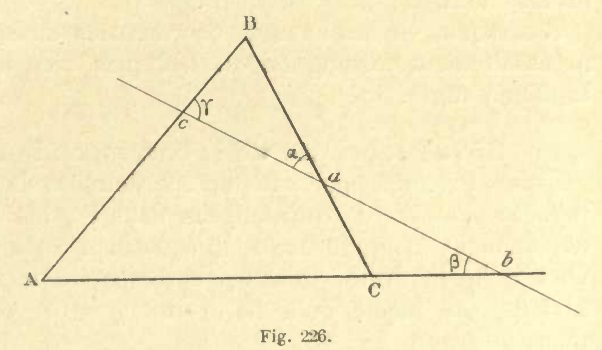


Fig. 226.

Ce théorème est utilisé pour démontrer que trois points a, b, c, sont en ligne droite. Les segments qu'ils déterminent sur trois droites non concourantes doivent satisfaire à la relation (1).

Homographie dans le plan, homologie.

356. Homographie dans le plan.

1°. — On dit que les points de deux plans P et P′ se correspondent homographiquement quand les coordonnées x, y, du point A de P, sont reliées aux cordonnées x', y', du point conjugué A′ de P′ par les formules :

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + d_1}{ax + by + d}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + d_2}{ax + by + d}. \tag{1}$$

A la différence près qu'elles renferment deux variables, elles sont de la forme de l'équation (1) du § 346. Résolues par rapport à x et à y, elles sont encore de la même forme : les seconds membres sont respectivement les quotients de deux fonctions linéaires, *le dénominateur étant le même pour les deux quotients.*

2°. — A une droite de P correspond une droite de P′, et inversement. Soit en effet :

$$Ax' + By' + C = 0,$$

une droite de P′. Substituons à x' et à y' leurs valeurs (1). Grâce à l'identité des dénominateurs, on obtient une fonction linéaire en x et y.

3°. — A toutes les droites qui passent par le point A de P, correspondent dans P′ des droites qui passent par le point A′ conjugué de A. D'où résulte qu'à des droites parallèles de P (droites se coupant en un point à l'infini dans P) correspondent dans P′ des droites passant par un point qui n'est généralement pas à l'infini, comme nous le verrons.

4°. — A une conique dans P correspond une conique dans P′, et inversement.

Remarque. — Les axes de coordonnées dans P et P′ ne sont pas nécessairement rectangulaires. Obliques, rien ne suppose qu'ils font le même angle.

357. Propriétés de la correspondance homographique.

1°. — Prenons pour axes de coordonnées dans P′, les droites conjuguées des axes de coordonnées dans P ; les origines O et O′ sont évidemment conjuguées. Les équations se simplifient ; il faut en effet qu'à la droite $x = 0$, corresponde identiquement la droite $x' = 0$; de même qu'à la droite $y = 0$, corresponde identiquement la droite $y' = 0$.

Les équations prennent la forme :

$$x' = \frac{\alpha x}{ax + by + d}, \quad y' = \frac{\beta y}{ax + by + d}.$$

Résolvons par rapport à x et à y :

$$x = -\frac{d\beta x'}{a\beta x' + \alpha b y' - \alpha\beta}, \quad y = -\frac{d\alpha y'}{a\beta x' + \alpha b y' - \alpha\beta}.$$

Posons : $p = \dfrac{y}{x}$, $p' = \dfrac{y'}{x'}$; il vient : $p' = \dfrac{\beta}{\alpha} p$.

2°. — Aux points de la droite : $\Phi = ax + by + d = 0$, du plan P correspondent les points de l'infini du plan P′.

Aux points de la droite : $\Phi' = a\beta x' + \alpha b y' - \alpha\beta = 0$, du plan P′ correspondent les points de l'infini du plan P.

La correspondance homographique générale n'a pas grand intérêt ; bornons-nous à en étudier des cas particuliers.

358. Homologie.

1°. — L'*homologie* en est un. On suppose qu'il existe deux systèmes conjugués d'axes de coordonnées, faisant le même angle (ce

qui ne change pas la forme des relations) ; on suppose de plus $\alpha = \beta$, d'où : $p = p'$. Les équations deviennent :

$$x' = \frac{x}{ax + by + d}, \qquad y' = \frac{y}{ax + by + d},$$

car nous pouvons poser $\alpha = \beta = 1$, sans diminuer la généralité de la solution. Corrélativement :

$$x = -\frac{dx'}{ax' + by' - 1}, \qquad y = -\frac{dy'}{ax' + by' - 1}.$$

Les points conjugués des plans P et P', appliqués l'un sur l'autre de manière à faire coïncider les axes, sont simultanément en ligne droite avec le point qui nous sert d'origine des coordonnées.

2°. — Droites de l'infini ; axe d'homologie.

Les points du plan P' qui sont à l'infini, correspondent dans le plan P à la droite Φ :

$$ax + by + d = 0.$$

Les points du plan P qui sont à l'infini, correspondent dans le plan P' à la droite Φ' parallèle à Φ :

$$ax' + by' - 1 = 0.$$

Les points conjugués qui coïncident, sont définis par les relation : $x = x'$, $y = y'$. Ils sont donc sur la droite H :

$$ax + by + d - 1 = 0,$$

qu'on appelle *axe d'homologie*. Les droites Φ, Φ', H, sont parallèles. Elles sont disposées de manière qu'on ait (fig. 227) :

$$\overline{OF} + \overline{OF'} = \overline{O\eta},$$

$$\overline{OF} = \overline{F'\eta}.$$

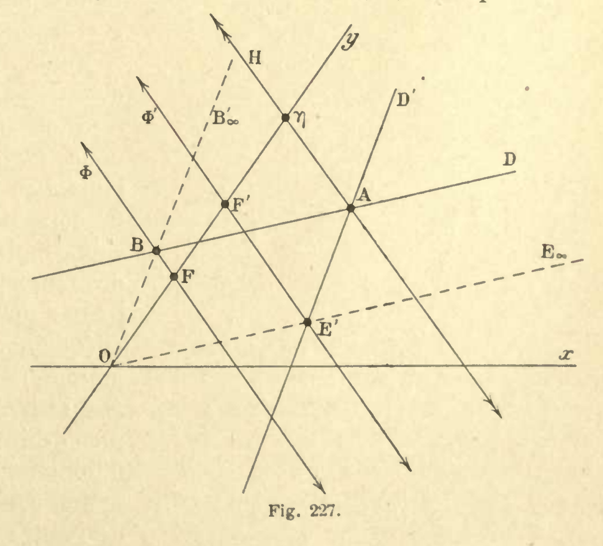


Fig. 227.

359. Propriétés de l'axe d'homologie.

1°. — Une correspondance homologique est définie par les trois droites Φ, Φ', H, et le point O. Soit donnée une droite D ; on demande de construire sa conjuguée D' (fig. 227).

D rencontre la droite Φ au point B. Menons OB ; le conjugué de

B est à l'infini dans la direction OB. Donc D', menée par A (qui est point double) parallèlement à OB, est la droite cherchée.

Inversement, D' rencontre Φ' en E'. Menons OE'; le conjugué de E' est à l'infini, dans la direction OE. Donc D menée par A parallèlement à OE' est la droite conjuguée de D'.

Corrélativement on vérifiera que OBAE' est un parallélogramme : cela résulte de la relation énoncée à la fin du paragraphe précédent.

2°. — A toute droite D du plan P parallèle à H correspond dans le plan P' (superposé à P) une droite D' également parallèle à H.

En effet, ces droites doivent se couper sur H, et D ne coupe H qu'à l'infini.

3°. — Si nous avons déterminé deux points conjugués sur une droite quelconque passant par O, nous obtiendrons deux points conjugués sur une autre droite passant par O, en menant par les premiers des parallèles à H.

4°. — Sur les axes, Oy par exemple, les points conjugués forment deux divisions homographiques dont les points doubles sont O, η.

En effet, on a généralement :

$$x = x' = 0, \qquad byy' + dy' - y = 0;$$

pour les points doubles :

$$y = y', \qquad y(by + d - 1) = 0.$$

Il résulte de là et du *3°* que, sur toutes les droites passant par O, les points conjugués forment deux divisions homographiques.

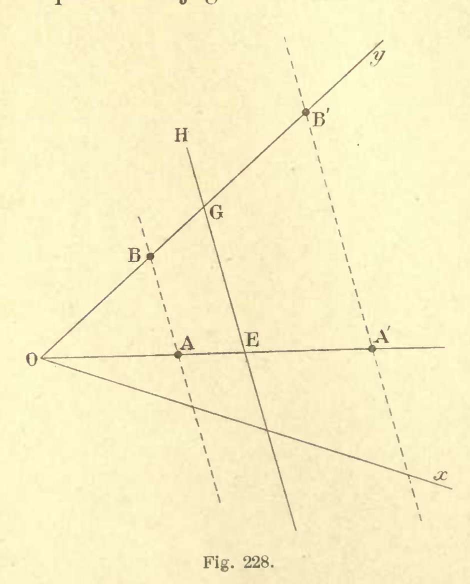


Fig. 228.

5°. — Nous comprenons maintenant en quoi consiste la correspondance homologique.

Nous avons un faisceau de droites passant par un point O. Sur chacune de ces droites nous établissons une correspondance homographique avec la condition que le point O soit double pour toutes les droites et que le lieu des seconds points doubles soit une droite H (que nous appelons *axe d'homologie*). Nous posons de plus que le lieu d'un des foyers est une droite Φ parallèle à l'axe d'homologie, ce qui entraîne la même condition pour le lieu Φ' de l'autre foyer.

Naturellement si, sur chacune des droites passant par O, nous rapportons les points conjugués aux foyers, les équations prennent

la forme (4) du § 347 ; la valeur de la constante dépend de la droite choisie. Par exemple, sur les axes, on a :

$$\xi\xi' = -\frac{d}{a^2}, \qquad \eta\eta' = -\frac{d}{b^2}.$$

6°. — On définit parfois l'homologie en disant que le quotient des rapports (fig. 228) : $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} : \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EA'}}$, est constant.

En vertu du *3°*, il suffit de démontrer cette propriété pour les axes. On a :

$$\overline{OG} = Y = (1-d)\,b, \qquad \overline{GB'} = y' - Y, \qquad \overline{GB} = y - Y.$$

On vérifiera aisément la relation :

$$\frac{y-Y}{y'-Y} : \frac{y}{y'} = \frac{1}{d} = \text{constante}.$$

360. Relations entre l'homologie et la perspective.
Quand deux figures situées dans les plans P et P′ (fig. 229) sont

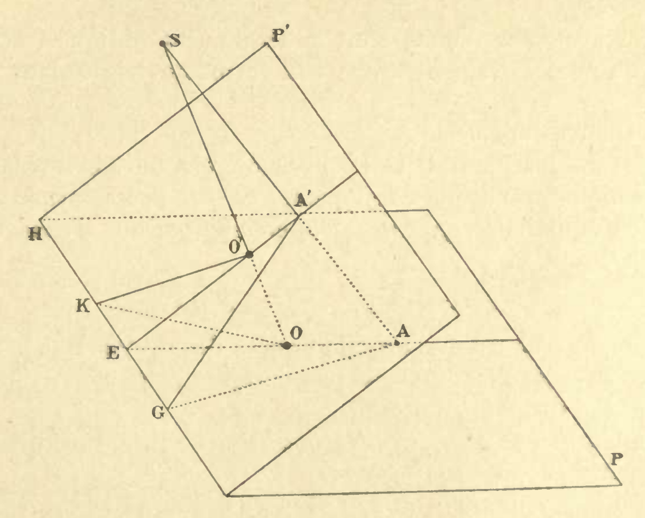


Fig. 229.

la perspective l'une de l'autre par rapport au point de vue S, le rabattement de P sur P′ en fait des figures homologiques. L'intersection des plans P et P′ est l'axe d'homologie ; le centre d'homologie est l'une ou l'autre trace O′, O, de la perpendiculaire SO′O abaissée de S sur le plan bissecteur du dièdre (comparer à la figure 222). Après rabattement, le centre d'homologie est en O.

On vérifie immédiatement ces propositions en faisant passer par SOO′ des plans tels que SO′OK.

Leurs traces sur P et P′ sont des droites. En vertu du § 350, les

droites issues de S déterminent sur OK et O'K une correspondance homographique dont l'un des points doubles est en K et l'autre (après rabattement) en O.

Les droites de l'infini Φ et Φ' s'obtiennent en menant par S des plans parallèles à P' et à P. Les traces de ces plans sur P' et P sont évidemment parallèles à H.

On déduit de là que *la perspective d'une conique est une conique* (§ 356, *4°*) ; en particulier, que l'intersection par un plan d'un cône à base circulaire est une conique (§ 421).

361. Transformation homogène.

1°. — On dit que la transformation est *homogène* lorsque les équations de l'homographie deviennent :

$$x' = a_1x + b_1y + d_1, \qquad y' = a_2x + b_2y + d_2. \qquad (1)$$

Les droites Φ et Φ' sont allées à l'infini. Si dans les plans P et P', nous prenons comme axes de coordonnées deux systèmes de droites conjuguées, les équations se simplifient et deviennent (§ 357) :

$$x' = \alpha x, \qquad y' = \beta y. \qquad (2)$$

Mais ces systèmes d'axes sont généralement obliques, et les axes ne font pas nécessairement entre eux le même angle dans les deux plans.

2°. — Droites doubles.

Superposons les plans P et P' de manière à faire coïncider les origines que nous prendrons conjuguées, *ce qui laisse encore une arbitraire*. Les équations *rapportées au même système d'axes d'ailleurs quelconque*, sont :

$$x' = a_1x + b_1y, \qquad y' = a_2x + b_2y. \qquad (3)$$

Remarquons d'abord que les conjuguées des droites qui passent par l'origine, passent elles-mêmes par l'origine : en effet, l'origine est par hypothèse un *point double*.

Je dis qu'il existe deux *droites doubles*, c'est-à-dire deux droites qui sont leurs propres conjuguées.

La condition pour qu'il en soit ainsi, est :

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{a_1x + b_1y}{x} = \frac{a_2x + b_2y}{y}.$$

$$a_2x^2 - b_1y^2 + (b_2 - a_1)xy = 0,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2b_1}\left[(b_2 - a_1) \pm \sqrt{(b_2 - a_1)^2 + 4a_2b_1}\right]. \qquad (4)$$

Ces droites sont toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires. Elles sont généralement obliques. Prenons-les pour les axes de coordonnées ; nous pouvons ramener les équations à la forme :

$$x' = \alpha x, \qquad y' = \beta y.$$

Il a fallu choisir nos axes de coordonnées parmi l'infinité de systèmes de droites conjuguées passant par l'origine; *mais maintenant les axes se correspondent à eux-mêmes.*

Il est important de remarquer que la position des droites doubles dépend, *pour une origine commune choisie,* de la façon dont nous avons superposé les plans P et P′, *ce qui peut se faire d'une infinité de manières.*

362. Transformation homogène symétrique.

1°. — Un cas fondamental est celui où, les équations (3) étant toutes deux rapportées à un système d'axes rectangulaires, on a la condition :

$$b_1 = a_2 = m.$$

Dans l'équation (4), les coefficients de x^2 et de y^2 deviennent égaux et de signes contraires. Le produit des racines de l'équation résolue par rapport à $y : x$ est égal à -1. *Donc les droites doubles sont rectangulaires.* Il existe donc deux droites rectangulaires, qui sont leurs propres conjuguées. En les prenant pour axes, les formules de transformation ont naturellement la forme simple :

$$x' = \alpha x, \qquad y' = \beta y.$$

2°. — Interprétation géométrique.

Insistons sur l'interprétation géométrique de ce résultat.

Transformons le cercle : $x'^2 + y'^2 = R^2$.

Il devient l'ellipse (nous supprimons les indices inutiles) :

$$(ax + my)^2 + (mx + by)^2 = R^2,$$

$$x^2(a^2 + m^2) + y^2(b^2 + m^2) + 2m(a + b)xy = R^2.$$

Montrons que deux diamètres *rectangulaires* du cercle se transforment en deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Soit p_1 et p_2 les pentes des premiers diamètres; on a : $p_1 p_2 = -1$.

Soit x'_1, y'_1 ; x'_2, y'_2, les coordonnées de leurs extrémités. Entre les coordonnées des points conjugués de l'ellipse, on a les relations :

$$\frac{y'_1}{x'_1} = p_1 = \frac{mx_1 + by_1}{ax_1 + my_1}, \qquad \frac{y'_2}{x'_2} = p_2 = \frac{mx_2 + by_2}{ax_2 + my_2}.$$

D'où la condition :

$$(mx_1 + by_1)(mx_2 + by_2) + (ax_1 + my_1)(ax_2 + my_2) = 0. \quad (1)$$

Posons : $$q_1 = \frac{y_1}{x_1}, \qquad q_2 = \frac{y_2}{x_2}.$$

La condition (1) devient :

$$(b^2 + m^2)q_1 q_2 + m(a + b)(q_1 + q_2) + (a^2 + m^2) = 0,$$

qui est précisément la relation générale existant entre les pentes des deux diamètres conjugués (§ 113).

Or il existe deux diamètres conjugués de l'ellipse qui sont rectangulaires : ce sont les axes. *Ils correspondent aux deux diamètres rectangulaires du cercle qui leur sont superposés.*

Si nous les prenons pour axes de coordonnées, le cercle :

$$x'^2 + y'^2 = R^2, \qquad \text{devient l'ellipse :} \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = R^2.$$

363. Pure rotation.

Un autre cas particulier de la transformation homogène est la *pure rotation.* Proposons-nous d'établir directement les formules de transformation. Soit A,A', deux points correspondants (fig. 230).

On a : $\overline{OA} = \overline{OA'} = r, \qquad \alpha' - \alpha = \theta =$ constante.

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta, \\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= r\sin\alpha' = r\sin(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta, \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les coefficients des formules (3) du § 361, rapportées à des axes rectangulaires, doivent satisfaire aux relations :

$$a_1 = b_2, \qquad a_2 = -b_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1.$$

On comparera les formules (1) et les formules relatives aux changements d'axes de coordonnées avec conservation de l'origine (§ 78).

Le problème est effectivement le même.

Fig. 230.

364. Homothétie.

L'*homothétie* peut être dérivée soit de la *transformation homogène,* soit de l'*homologie.* Lorsque l'axe d'homologie va à l'infini, on a l'homothétie. Les équations se réduisent à (§ 29) :

$$x = x'd, \quad y = y'd,$$

qui apparaissent aussi bien comme des cas particuliers de la transformation homogène. Les droites Φ et Φ' vont naturellement à l'infini.

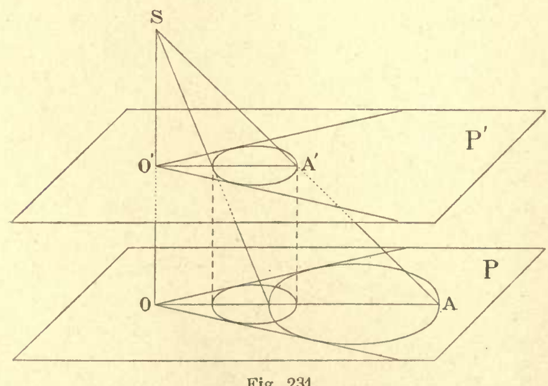


Fig. 231.

Une figure homothétique est donc obtenue en multipliant par un nombre constant tous

les rayons vecteurs issus d'un point fixe (*centre d'homothétie*) et aboutissant aux points de la figure donnée. Soit (§ 80) r, θ, les coordonnées polaires d'une courbe ; rd, θ, seront les coordonnées d'une courbe homothétique.

L'homothétie s'obtient par perspective quand les plans P et P′ sont parallèles (fig. 231). La droite SO′O de la figure 229 devient la perpendiculaire abaissée du point S sur l'un ou l'autre plan. Le rabattement consiste en une translation parallèle à SO′O.

Les droites issues du centre O et tangentes à la courbe C sont évidemment tangentes aux courbes homothétiques.

365. Similitude.

Soit deux figures *homothétiques*. Déplaçons-les arbitrairement dans leur plan ; elles deviennent *semblables*. Il n'y a entre l'homothétie et la similitude d'autre différence que la position accidentelle des figures. Ainsi deux triangles sont semblables quand ils ont leurs angles respectivement égaux. Cela ne suffit pas pour l'homothétie ; il faut encore que les droites joignant les sommets homologues passent par le même point.

Applications.

1°. — Toutes les paraboles sont semblables. En effet, convenablement orientées et déplacées, elles rentrent toutes dans la forme :

$$y^2 = 2px, \qquad r\cos^2\theta = 2p\sin\theta.$$

Modifier le paramètre p revient, pour toutes les valeurs de θ, à multiplier le vecteur r par un certain nombre invariable.

2°. — Pour que les coniques à centre soient semblables, il faut évidemment qu'elles soient du même genre, ellipses ou hyperboles.

Il faut ensuite que leurs axes soient proportionnels.

Après translation et rotation, les coniques semblables d'un faisceau peuvent donc être mises sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = k^2; \qquad (1)$$

a et b sont les mêmes constantes pour toutes les courbes du faisceau : k varie d'une conique à l'autre.

Le signe $+$ convient aux ellipses, le signe $-$ aux hyperboles.

3°. — Supposons les coniques *semblables*. Pour qu'elles soient *homothétiques*, on vérifiera facilement sur l'équation polaire que leurs axes homologues doivent être parallèles. La communauté de centre que suppose l'équation (1), est un cas particulier : dans la perspective de la fig. 231, les centres se trouvent alors sur la perpendiculaire menée de S aux plans P et P′.

Homographie dans l'espace.

366. Homographie dans l'espace.

1°. — On dit que les points de deux espaces E et E′ se correspondent homographiquement quand les coordonnées x, y, z, des points de l'espace E sont reliées aux coordonnées x', y', z', des points de l'espace E′, par les formules :

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d}, \qquad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d}.$$

$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d}.$$

Résolues par rapport à x, y, z, elles ont la même forme : les seconds membres sont respectivement les quotients de deux fonctions linéaires, *le dénominateur restant le même pour les trois quotients*.

Les axes sont généralement obliques et ne font pas nécessairement les mêmes angles pour les deux espaces.

On vérifiera immédiatement qu'un plan correspond à un plan, une droite à une droite, une quadrique à une quadrique, une conique à une conique.

Nous ne nous attarderons pas à démontrer pour l'homographie dans l'espace des théorèmes analogues à ceux de l'homographie dans le plan.

2°. — La théorie géométrique des appareils optiques *centrés* suppose une correspondance homographique entre deux espaces *qui admettent l'un et l'autre un axe de révolution*. Il est clair que ces axes sont conjugués : prenons-les pour axes des x. Aux plans de l'espace E normaux à Ox (*plans de front*) correspondent les plans de l'espace E′ normaux à $O'x'$. Aux plans passant par Ox dans l'espace E correspondent, par raison de symétrie, des plans passant par $O'x'$ et faisant entre eux les mêmes angles que les conjugués.

Les équations se simplifient et deviennent :

$$x' = \frac{a_1x + d}{ax + d}, \qquad y' = \frac{by}{ax + d}, \qquad z' = \frac{bz}{ax + d}.$$

La première exprime la correspondance des plans de front.

Les deux dernières donnent :

$$y' : z' = y : z;$$

elles expriment la correspondance des plans méridiens de même longitude.

Les points des axes Ox et $O'x'$ (par suite, les plans de front dans les deux espaces) se correspondent suivant une homographie linéaire.

Tout ce que nous avons dit aux §§ 346 et suivants est donc applicable.

Nous n'insisterons pas : cela reviendrait à exposer la Théorie complète des appareils optiques centrés (Cours de Physique, tome IV).

367. Transformation homogène.

La transformation est *homogène* quand on a :

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Pour intéressante que soit l'étude de cette substitution, nous n'en dirons rien. Cela reviendrait à étudier la Théorie géométrique de la Déformation petite, qui est mieux à sa place au début de la Théorie de l'Élasticité ou dans la Théorie des Symétries (voir les Tomes I et VI de notre Cours de Physique).

Abaques.

Nous étudierons ici les *abaques dits à alignement,* dont M. d'Ocagne a tiré un très heureux parti. Nous allons expliquer la méthode sur les cas les plus simples. Nous reviendrons sur les abaques *topographiques* au § 520.

368. Points alignés sur trois droites parallèles.

1°. — Soit trois droites parallèles que nous prendrons pour axes des u, v, w. Traçons une droite quelconque DEF ; déterminons les relations entre les distances $\overline{AD} = u$, $\overline{BE} = w$, $\overline{CF} = v$ (fig. 232).

Nous avons immédiatement :

$$\frac{w - u}{m} = \frac{v - w}{1 - m};$$

$$w = mv + (1 - m)\,u. \quad (1)$$

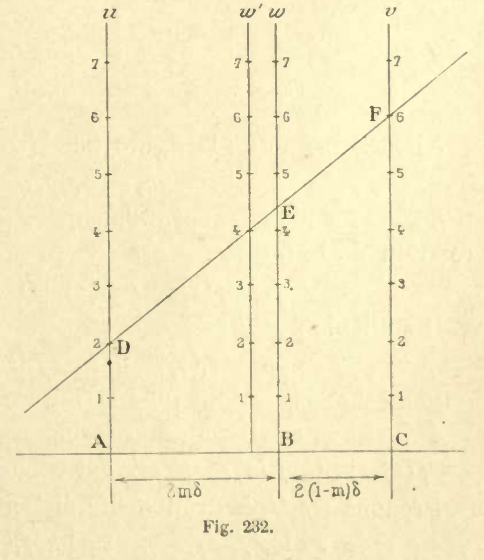


Fig. 232.

Nous construisons ainsi un abaque qui donne *à vue* les résultats de l'opération (1) ; u et v sont connus, w est à déterminer. A chaque valeur de m, correspond une droite w particulière. Par exemple, la droite w', située à égale distance des axes u et v, permet de calculer la demi-somme $(u + v) : 2$.

Dans la pratique, on construit les échelles de manière que les

traits soient suffisamment espacés, et l'on utilise un fil à coudre comme droite de construction.

2°. — Rien ne force à utiliser des échelles égales sur les trois axes. Posons :

$$u = \varepsilon' u_1, \qquad v = \varepsilon'' v_1, \qquad w = \varepsilon' w_1.$$

Le nouvel abaque permet de résoudre à vue la relation :

$$\varepsilon w_1 = m\varepsilon'' v_1 + (1 - m)\, \Xi' u_1.$$

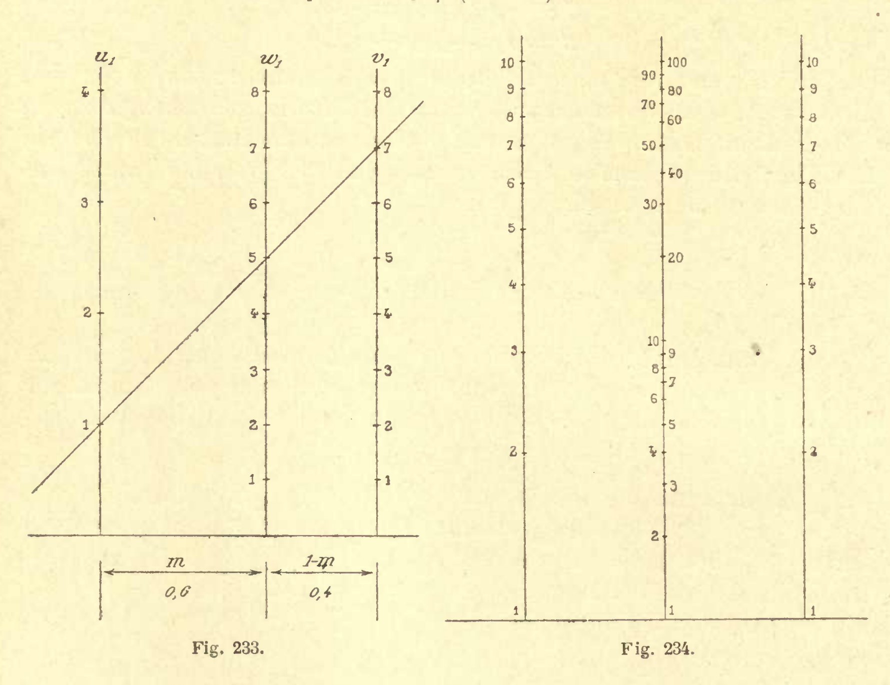


Fig. 233. Fig. 234.

Ainsi l'abaque de la figure 233 $(\varepsilon' = 2, \quad \varepsilon = \varepsilon'' = 1)$ donne :

$$w_1 = 0{,}6 v_1 + 0{,}8 u_1.$$

3°. — Le même genre d'abaques permet de résoudre à vue toute relation de la forme :

$$f(z) = m f_2(z) + (1 - m) f_1(z).$$

Il suffit de poser :

$$u = f_1(z), \qquad v = f_2(z), \qquad w = f(z).$$

Les échelles ne sont plus à traits équidistants.

4°. — Les relations de la forme :

$$f(z) = f_1(z) f_2(z), \quad \text{s'écrivent :} \quad \log f(z) = \log f_1(z) + \log f_2(z).$$

Prenons les trois droites équidistantes $(m = 0{,}5)$; posons :

$$u = \log f_1(z), \qquad v = \log f_2(z), \qquad 2w = \log f(z).$$

Nous obtenons l'*abaque de multiplication* de la figure 234, capable de résoudre à vue la relation : $z = z_1 z_2$.

369. Points alignés sur trois droites concourantes. Prenons comme axes obliques Ox, Oy, les droites sur lesquelles sont alignés les points de cotes u et v (fig. 235).

La droite AB a pour équation :

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=1.$$

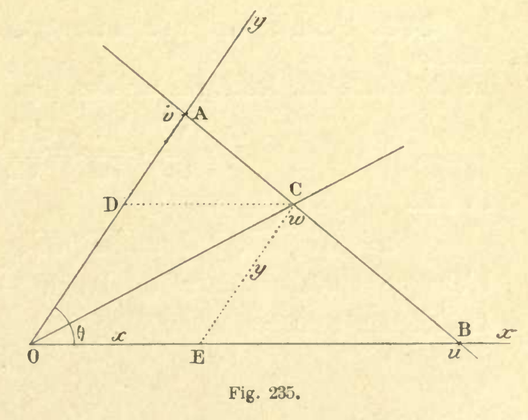


Fig. 235.

Son intersection C avec la droite OC d'équation

$$y=kx,$$

a pour coordonnées :

$$x=\frac{uv}{v+ku},$$

$$y=\frac{kuv}{v+ku}.$$

Dans le triangle OEC, on a :

$$\overline{OC}=w=\frac{uv}{v+ku}\sqrt{1+2k\cos\theta+k^2}.$$

On prend généralement $k=1$; la droite OC est bissectrice des axes ; on a :

$$\frac{2}{w}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}.$$

Pour $\theta=120°$, $$\frac{1}{w}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}.$$

Pour $\theta=90°$, $$\frac{1{,}414}{w}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}.$$

La figure 236 correspond au premier cas. Un tel abaque peut

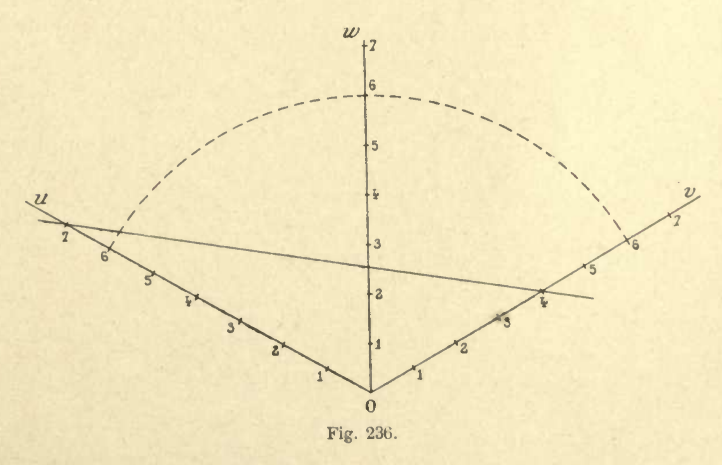


Fig. 236.

servir à représenter les positions des foyers conjugués pour des

miroirs ou des lentilles (§ 353). Le faisceau des droites de construction qui correspond à un appareil déterminé (distance focale donnée), passe par un point fixe de la droite Ow.

370. Points alignés sur trois droites non concourantes.

Le théorème sur les transversales (fig. 226) donne :

$$\frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}} \cdot \frac{\overline{Ba}}{\overline{Ca}} = \frac{\overline{Ab}}{\overline{Cb}}.$$

Posons :

$$u = \overline{Ac} : \overline{Bc}, \qquad v = \overline{Ba} : \overline{Ca}, \qquad w = \overline{Ab} : \overline{Cb}.$$

L'abaque représente donc la relation : $uv = w$.

Le lecteur construira sur ce principe les abaques de la multiplication, et des produits :

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\gamma,$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma.$$

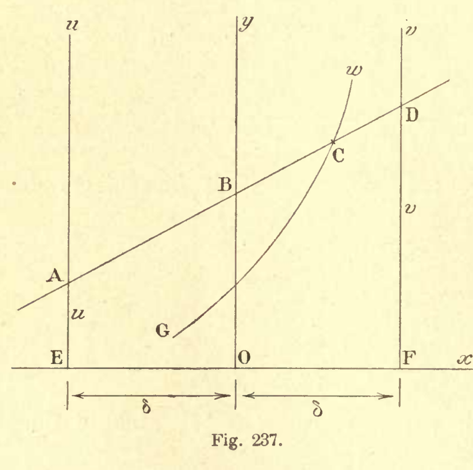


Fig. 237.

371. Points alignés sur deux droites et une courbe.

1°. — Prenons comme axe Oy une droite équidistante des droites u et v dont la distance est 2δ. Écrivons que la droite ABCD définie par les longueurs $\overline{EA} = u$, $\overline{FD} = v$, passe par le point C de coordonnées x, y. On trouve immédiatement la condition :

$$\frac{y-u}{\delta+x} = \frac{v-y}{\delta-x}, \qquad y - u\frac{\delta-x}{2\delta} - v\frac{\delta+x}{2\delta} = 0. \qquad (1)$$

Ceci posé, définissons chaque point de la courbe GC par une valeur de la variable auxiliaire w. Posons donc :

$$x = \varphi(w), \qquad y = \psi(w).$$

L'abaque permet de résoudre à vue la relation :

$$\psi(w) - u\frac{\delta - \varphi(w)}{2\delta} - v\frac{\delta + \varphi(w)}{2\delta} = 0. \qquad (2)$$

2°. — Abaque de l'équation du second degré :

$$w^2 + uw + v = 0. \qquad (3)$$

Posons : $$x = \delta\frac{1-w}{1+w}, \qquad y = \frac{-w^2}{1+w}. \qquad (4)$$

Substituons dans (1) ; nous retrouvons la forme (3). Pour résoudre à vue l'équation (3), il suffit donc de construire la courbe *unicursale* (4); une courbe est *unicursale* lorsque les coordonnées de ses points s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre.

On vérifie aisément que c'est une hyperbole.

Elle est tangente à Ox au point F pour $w=0$, $x=\delta$, $y=0$; elle est asymptote à la droite $x=-\delta$ $(w=\infty,\ y=-\infty)$.

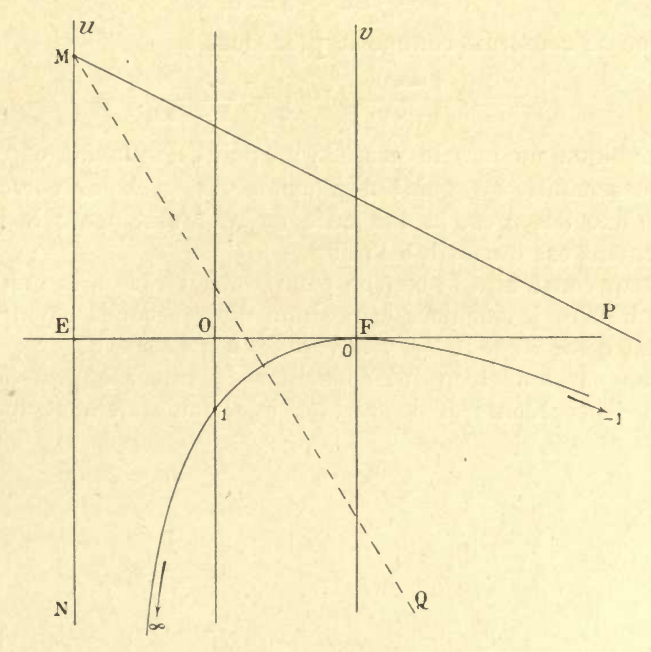


Fig. 238.

Pour déterminer l'autre asymptote, remarquons que le rapport :

$$\frac{y}{x}=-\frac{1}{\delta}\frac{w^2}{1-w}, \quad \text{vaut} \quad -\frac{1}{2\delta},$$

quand w est égal à -1, c'est-à-dire quand x et y deviennent simultanément infinis. Connaissant la direction de l'asymptote, calculons ce que devient : $y+\dfrac{x}{2\delta}$, quand $w=-1$. On trouve :

$$y+\frac{x}{2\delta}=\frac{-2w^2-w+1}{2(1+w)}=\frac{1-2w}{2}=\frac{3}{2}.$$

L'hyperbole est ainsi complètement déterminée. Nous laissons au lecteur le soin d'achever la discussion.

La figure 238 représente la moitié de la courbe; on a inscrit dessus les valeurs w qui servent de cotes à ses points.

3°. — Abaque de l'équation trinôme du troisième degré.

Soit l'équation complète mise sous la forme :

$$z^3 + 3Az^2 + Bz + C = 0.$$

Posons : $w = z + A, \qquad z = w - A.$

Le terme en w^2 disparaît. On ramène donc immédiatement à la forme (comparer au § 226) :

$$w^3 + uw + v = 0.$$

L'abaque se construit comme le précédent :

$$x = \delta \frac{1 - w}{1 + w}, \qquad y = \frac{-w^3}{1 + w}.$$

Cette cubique unicursale possède un point d'inflexion et un point de rebroussement. Le point d'inflexion est en F et correspond à $w = 0$. L'axe des u est la tangente de rebroussement; le point de rebroussement est du reste à l'infini.

Le lecteur construira la courbe par points. Grâce à la méthode ci-dessus indiquée, il calculera la position de la seconde asymptote qui correspond à $w = -1$. Il trouvera : $2\delta y = x - 5\delta$.

Nous ne saurions trop lui conseiller de tracer à grande échelle les abaques précédents et de vérifier expérimentalement leurs propriétés.

CHAPITRE XVIII

SURFACES. COURBES TRACEES SUR LES SURFACES

372. Définition analytique des surfaces.

Nous supposerons les points rapportés à des axes de coordonnées rectangulaires (fig. 239).

1°. — L'équation d'une surface peut être mise sous la forme :

$$z = f(x, y). \qquad (1)$$

Elle signifie qu'en tout point B du plan xOy, nous élevons une perpendiculaire ; nous prenons dessus une longueur $\overline{BB'}$ égale à z ; nous déterminons ainsi un point B : l'ensemble de ces points est une surface.

Si pour chaque point B', l'équation (1) fournit plusieurs valeurs de z, nous portons ces valeurs $\overline{BB'}$, $\overline{BB''}$,... sur la normale élevée en B au plan xOy.

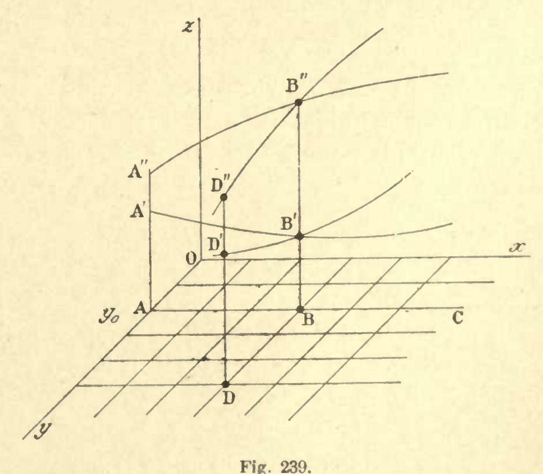


Fig. 239.

Nous pouvons systématiser la manière de prendre les points du plan xOy. Donnons à y la valeur constante $\overline{OA} = y_0$, et faisons varier x. A la droite ABC du plan xOy correspondent une ou plusieurs courbes :

$$z = f(x, y_0).$$

Recommençons pour d'autres valeurs de y suffisamment rapprochées. Nous découpons le plan xOy en bandes par des droites parallèles à Ox ; corrélativement nous déterminons la surface par un faisceau de courbes qui se trouvent respectivement dans des plans

parallèles à xOz : elles sont les intersections de la surface par ces plans.

Opérons de la même manière au moyen de droites parallèles à Oy, d'équations $x = x_0$.

Nous traçons maintenant le faisceau des courbes :

$$z = f(x_0, y),$$

qui sont les intersections de la surface par des plans parallèles à yOz.

Nous sommes tout naturellement conduits à considérer les pentes et les courbures de ces courbes. Nous utiliserons donc fréquemment les dérivées partielles de z par rapport à x et à y.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

2°. — Généralisons ce qui précède. Soit le système :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

où u et v sont deux *paramètres* auxiliaires variables.

Donnons à v la valeur v_0 et faisons varier u. Les équations :

$$x = \varphi(u, v_0), \qquad y = \chi(u, v_0), \qquad (2)$$

représentent une courbe dans le plan xOy. Chaque point de cette courbe est caractérisé par une certaine valeur du paramètre u, d'où résultent pour z une ou plusieurs valeurs :

$$z = \psi(u, v_0).$$

Nous traçons donc l'intersection de la surface avec le cylindre dont les génératrices, parallèles à Oz, s'appuient sur la courbe (2). Recommençons pour diverses valeurs de v : nous déterminons sur xOy un faisceau de courbes, et nous considérons la surface comme engendrée par les courbes dont les précédentes sont les projections orthogonales sur xOy.

Nous aurions pu choisir v comme la variable et u comme le paramètre définissant chaque courbe d'un nouveau faisceau :

$$x = \varphi(u_0, v), \qquad y = \chi(u_0, v). \qquad (3)$$

Le plan xOy est alors quadrillé par les faisceaux (2) et (3); la surface est déterminée par les courbes correspondantes.

373. Exemple ; sphère.

1°. — L'équation d'une sphère de rayon r dont le centre est à l'origine des coordonnées, est (§ 316) :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Posons $y = y_0$; à toute droite du plan xOy parallèle à Ox, correspond le cercle :

$$z = \pm\sqrt{(R^2 - y_0^2) - x^2},$$

de rayon $\sqrt{R^2 - y_0^2}$. Ce premier faisceau de courbes détermine la sphère au moyen des cercles qui sont ses intersections par les plans parallèles à xOz.

Posons $x = x_0$; à toute droite du plan xOy parallèle à Oy, correspond le cercle :

$$z = \pm\sqrt{(R^2 - x_0^2) - y^2},$$

de rayon $\sqrt{R^2 - x_0^2}$. D'où détermination de la sphère au moyen des cercles qui sont ses intersections par les plans parallèles à yOz.

2°. — Prenons pour paramètres auxiliaires *la longitude* u et *la latitude* v (§ 315).

Nous avons :

$$x = r \cos v \cos u,$$
$$y = r \cos v \sin u,$$
$$z = r \sin v.$$

Laissons u constant; faisons v variable; nous déterminons sur le plan xOy des droites passant par l'origine; sur la sphère, nous traçons des méridiennes. Laissons v constant, faisons u variable : nous déterminons sur le plan xOy des cercles ayant l'origine pour centre; sur la sphère, nous traçons des parallèles.

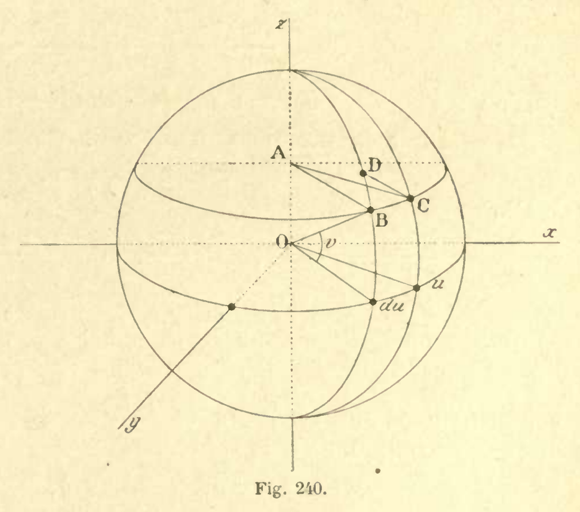


Fig. 240.

374. Arc de courbe tracée sur la surface.

1° — Cherchons l'expression de la longueur ds d'un arc de courbe tracée sur la surface. Les coordonnées de deux points voisins sont :

$$x, \ y, \ z; \qquad x + dx, \qquad y + dy, \qquad z + dz.$$

Leur distance est donc (§ 316) :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (1)$$

On a (§ 9) :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = p dx + q dy.$$

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

2°. — Cherchons l'expression de la longueur ds dans le cas où la surface est donnée par les paramètres u et v. On a :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Substituons dans (1) et posons :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

D'où : $$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

3°. — Dans la première manière de repérer la surface, on pose :

$$x = u, \quad y = v.$$

D'où :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{dx}{dx} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} = p;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dy} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2,$$

conformément aux résultats du *1°*.

4°. — Appliquons à la sphère

$$E = r^2 \cos^2 v, \qquad G = r^2, \qquad F = 0.$$

$$ds^2 = r^2 dv^2 + r^2 \cos^2 v . du^2.$$

On retrouve aisément cette formule sur la figure :

$$\overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = r^2 dv^2 + \overline{AB}^2 . du^2 = r^2 dv^2 + r^2 \cos^2 v . du^2.$$

375. Plan tangent. Normale.

1°. — Différentions l'équation : $z = f(x, y)$. Nous obtenons :

$$dz = p dx + q dy.$$

L'équation du plan tangent à la surface est donc (§ 322) :

$$z - Z = p(x - X) + q(y - Y). \tag{1}$$

p et q sont les valeurs que prennent les fonctions p et q au point de contact X, Y, Z; les coordonnées courantes du plan sont x, y, z.

La normale est la droite perpendiculaire au plan tangent qui passe par le point de contact. D'où ses équations (§ 319) :

$$\frac{x - X}{p} = \frac{y - Y}{q} = -(z - Z). \tag{2}$$

Ses cosinus directeurs α, β, γ, ont pour valeurs :

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \qquad (3)$$

2°. — Écrivons que le plan :

$$a(x-X)+b(y-Y)+c(z-Z)=0,$$

contient les points de la surface voisins du point de contact.

Nous devons donc avoir identiquement :

$$a dx + b dy + c dz = 0, \qquad (4)$$

au voisinage du point de contact.

Exprimons cette condition au moyen des paramètres u et v. Écrivons donc qu'elle est identiquement satisfaite pour des valeurs quelconques de du et de dv, à partir d'un système donné u, v.

Cela revient à substituer à dx, dy, dz, leurs expressions ci-dessus données (374, 2°) en fonction de du et de dv, puis à annuler les coefficients de du et de dv dans la condition obtenue. On trouve :

$$a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial v} + b\frac{\partial y}{\partial v} + c\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Nous devons donc poser (§ 28) :

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C},$$

en écrivant pour simplifier :

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

L'équation du plan tangent est par suite :

$$A(x-X)+B(y-Y)+C(z-Z)=0.$$

Posons : $\quad D^2 = A^2+B^2+C^2 = EG - F^2.$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\alpha = \frac{A}{D}, \qquad \beta = \frac{B}{D}, \qquad \gamma = \frac{C}{D}.$$

Les équations de la normale sont :

$$\frac{x-X}{A} = \frac{y-Y}{B} = \frac{z-Z}{C}.$$

Pour utiliser ces équations, nous substituons à u et à v dans A, B, C, les valeurs des paramètres qui correspondent au point de contact X, Y, Z.

376. Angles des courbes $u =$ Constante, $v =$ Constante, **tracées sur la surface. Élément d'aire.**

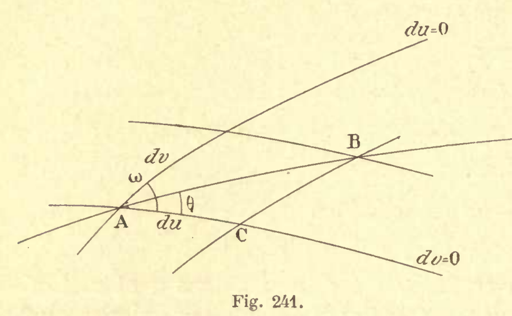


Fig. 241.

1°. — En un point de la surface, déterminons l'angle ω que font entre elles les courbes $v =$ Constante, $u =$ Constante, qui y passent (§ 372, 2°).

Les accroissements des coordonnées sont respectivement pour ces courbes :

$$d_1x = \frac{\partial x}{\partial u} du, \qquad d_1y = \frac{\partial y}{\partial u} du, \qquad d_1z = \frac{\partial z}{\partial u} du;$$

$$d_2x = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad d_2y = \frac{\partial y}{\partial v} dv, \qquad d_2z = \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

puisque dans les équations du § 374, 2°, nous devons poser $dv = 0$ pour la première, $du = 0$ pour la seconde.

Soit d_1s et d_2s les éléments d'arcs correspondants.

Les cosinus directeurs de ces éléments sont par suite (§ 316, 2°) :

$$\frac{d_1x}{d_1s}, \quad \frac{d_1y}{d_1s}, \quad \frac{d_1z}{d_1s}; \quad \frac{d_2x}{d_2s}, \quad \frac{d_2y}{d_2s}, \quad \frac{d_2z}{d_2s}.$$

On a, d'après le § 374 :

$$d_1s = \sqrt{E}\, du, \qquad d_2s = \sqrt{G}\, dv.$$

Le cosinus de l'angle ω est (§ 316) :

$$\cos\omega = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{du\,dv}{d_1s\,d_2s} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

D'où :
$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \sin\omega = \frac{D}{\sqrt{EG}}.$$

2°. — *La condition pour que les courbes $u =$ Constante, $v =$ Constante, soient orthogonales est donc qu'on ait identiquement* $F = 0$.

Nous avons trouvé cette condition satisfaite pour la sphère quand u et v représentent la longitude et la latitude. Sur toute surface on peut, et généralement d'une infinité de manières, choisir les variables auxiliaires u et v telles qu'il en soit ainsi (§ 385).

Il faut, pour que la conséquence subsiste, que D ne soit pas simultanément nul.

3°. — L'élément de surface est un parallélogramme dont les côtés d_1s et d_2s font l'angle ω. Son aire dS a pour expression (§ 68) :

$$dS = d_1s \,.\, d_2s \,.\, \sin\omega = D \,.\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2} \,.\, du\, dv.$$

Dans le cas où l'on prend pour variables u, v, les coordonnées x, y, on a : $\quad dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx\, dy.$

4°. — Si D est constant pour toute la surface, les courbes dont les paramètres sont :

$$u_0, \quad u_0 + \varepsilon, \quad u_0 + 2\varepsilon, \ldots; \qquad v_0, \quad v_0 + \varepsilon, \quad v_0 + 2\varepsilon, \ldots$$

la découpent en parallélogrammes infiniment petits d'aire constante.

377. Angle d'une courbe tracée sur la surface avec l'une des courbes $u =$ Constante, $v =$ Constante.

1°. — Généralisons le problème du paragraphe précédent.

Suivant AC $(dv = 0)$, on a (voir plus haut) :

$$d_1x = \frac{\partial x}{\partial u} du, \qquad d_1y = \frac{\partial y}{\partial u} du, \qquad d_1z = \frac{\partial z}{\partial u} du.$$

Suivant AB, on a :

$$d_3x = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad d_3y = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$d_3z = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

D'où (§ 374, 2°) :

$$\cos\theta = E \frac{du^2}{d_1s\, d_3s} + F \frac{du\, dv}{d_1s\, d_3s} = \frac{E\, du + F\, dv}{\sqrt{E}\sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}}.$$

$dv : du = p$, mesure la pente de la ligne AB par rapport aux lignes du faisceau u, v, considérées comme axes de coordonnées obliques dans le plan tangent :

$$\cos\theta = \frac{E + Fp}{\sqrt{E}\sqrt{E + 2Fp + Gp^2}}.$$

2°. — Il n'est pas plus difficile de trouver l'angle α de deux courbes dont les pentes sont p et p'. On a :

$$\cos\alpha = \frac{E + F(p + p') + Gpp'}{\sqrt{E + 2Fp + Gp^2}\sqrt{E + 2Fp' + Gp'^2}}.$$

On retombe sur la forme précédente en faisant $p' = 0$.

Surfaces de révolution.

378. Surfaces de révolution : équation générale.

1°. — Cherchons l'équation générale d'une surface de révolution admettant pour axe de révolution la droite AB (fig. 242) :

$$x = p + lz, \qquad y = q + mz. \tag{1}$$

Du point A de coordonnées p, q, comme centre, traçons des sphères :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + z^2 = r^2. \tag{2}$$

Coupons-les par des plans normaux à la droite (1) :

$$lx + my + z = \delta. \tag{3}$$

Les intersections des sphères (2) par les plans (3) sont des cercles normaux à AB et dont les centres sont sur AB. Tout parallèle d'une surface de révolution admettant AB comme axe peut être obtenue par un choix convenable de δ et de r, ou de la distance du plan (3) à l'origine (à un facteur constant près), et du rayon de la sphère qui a le point A pour centre. La surface entière sera donc tracée par des parallèles, si nous donnons la relation : $r^2 = \varphi(\delta)$;

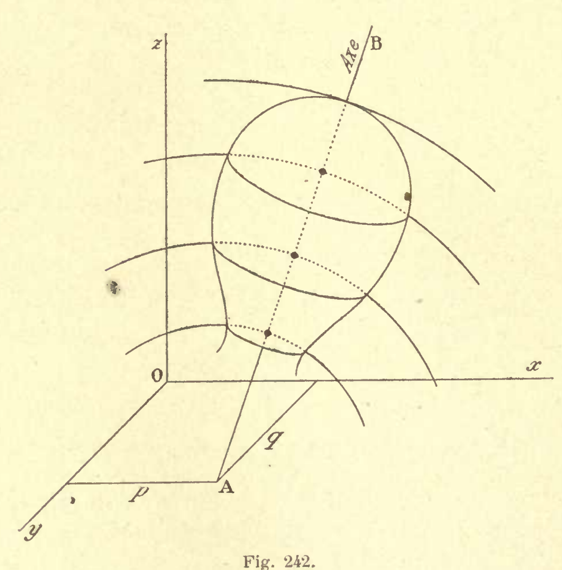


Fig. 242.

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + z^2 = \varphi\,(lx + my + z).$$

Telle est l'équation en termes finis de toutes les surfaces de révolution qui admettent AB pour axe; la fonction φ est arbitraire.

2°. — Si l'axe est Oz, il faut poser :

$$p = q = l = m = 0.$$

L'équation devient : $x^2 + y^2 = \varphi(z) - z^2$,

ou encore, puisque φ est arbitraire :

$$z = \psi\,(x^2 + y^2) = \psi(\rho^2) ;$$

ρ est la distance d'un point de la surface à l'axe de révolution.

3°. — On peut mettre l'équation précédente sous la forme :

$$x = \rho(v)\cos u, \qquad y = \rho(v)\sin u, \qquad z = z(v),$$

ce qui revient à employer les coordonnées cylindriques (§ 315).

On trouve aisément :

$$E = \rho^2, \qquad F = 0, \qquad G = \rho'^2 + z'^2,$$

en posant : $\rho' = \dfrac{d\rho}{dv}, \qquad z' = \dfrac{dz}{dv};$

$$ds^2 = \rho^2\, du^2 + (\rho'^2 + z'^2)\, dv^2, \qquad dS = \rho\sqrt{\rho'^2 + z'^2}\, .\, du\, dv. \quad (1)$$

4°. — Il est souvent commode de prendre pour variable v l'arc de méridien compté à partir d'une origine arbitraire. On a :

$$dv^2 = dz^2 + d\rho^2, \qquad \rho'^2 + z'^2 = G = 1, \qquad \rho = D;$$

d'où : $ds^2 = \rho^2\, du^2 + dv^2, \qquad dS = \rho\, du\, dv. \quad (2)$

La condition $F = 0$, signifie que les deux systèmes de courbes (méridiens, parallèles) découpent la surface en petits rectangles. C'est ce qu'indique d'une autre manière la formule $dS = \rho\, du\, dv$.

5°. — Le plan tangent a pour équation (§ 375, *2°*) :

$$z' \cos u\,(x - X) + z' \sin u\,(y - Y) - \rho'(z - Z) = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\alpha = z' \cos u, \qquad \beta = z' \sin u, \qquad \gamma = -\rho'.$$

379. Déformation simple d'une surface de révolution; balustres rampants.

Les architectes appellent *rampant* tout motif d'ornementation qui procède par ligne ascendante ou descendante; par exemple, ceux qui ornent une *rampe*.

Le *balustre* est la figure de révolution qui constitue l'élément de la *balustrade*.

Quelle déformation doit-il subir pour la balustrade rampante?

On imaginera qu'aux z de la surface de révolution sont ajoutés les z d'un plan ; l'équation générale de la surface déformée deviendra (fig. 243) :

$$z + Ax + By = \psi(x^2 + y^2).$$

Fig. 243.

Les horizontales du plan $z = Ax + By$, sont perpendiculaires au plan vertical de symétrie de la rampe. Si nous prenons celui-ci pour plan xOz, l'équation se réduit à : $\quad z + Ax = \psi(x^2 + y^2).$

Le profil du balustre qui est dans le plan yOz n'est pas déformé; le profil le plus déformé (représenté par la figure) est dans le plan xOz. Partout où la surface de révolution est tangente à un cylindre vertical, la surface déformée est tangente au même cylindre.

380. Aire des surfaces de révolution; théorème de Guldin.

1°. — Le calcul de l'aire d'une surface de révolution se ramène immédiatement à une intégrale simple, quand la surface est limitée par deux *parallèles; u* varie toujours de 0 à 2π; on a (§ 378, *2°*) :

$$S = \iint dS = \iint \rho \, du \, dv = \int du \int \rho \, dv = 2\pi \int \rho \, dv.$$

L'interprétation de cette formule est évidente (fig. 244). La surface est décomposée en troncs de cône élémentaires, de rayon moyen $\overline{AB} = \rho$, dont l'élément de génératrice est $\overline{CD} = dv$, dont par suite la surface latérale est :

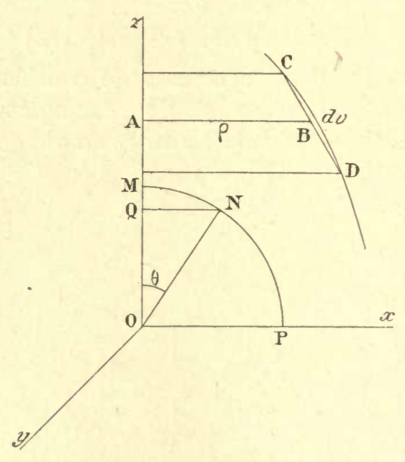


Fig. 244.

$$2\pi\rho \, dv.$$

2°. — Théorème de Guldin. — Par assimilation à nos définitions du § 163 relatives à une aire, nous appelons *moment statique* d'une courbe plane par rapport à un axe Oz situé dans son plan, l'intégrale:

$$\mu = \int \rho \, dv.$$

L'*axe neutre* parallèle à Oz est une droite située à une distance ρ_1 de Oz telle que :

$$\rho_1 \int dv = \int \rho \, dv.$$

D'où résulte que l'aire de la surface engendrée par une courbe plane (située tout entière d'un côté de l'axe, pour éviter les difficultés de signes) est égale au produit de la longueur de la courbe par la circonférence que décrit un point quelconque de l'axe neutre.

3°. — Si la courbe est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe de révolution (par exemple, fig. 245), cette droite est son axe neutre. En effet, à tout élément dv situé à une distance ρ de cette droite correspond un élément de même longueur, situé de l'autre côté de la droite à la même distance. *Par rapport à cette droite*, le moment statique :

$$\int \rho \, dv,$$

est nul, puisqu'il se compose d'éléments égaux et de signes contraires.

381. Applications.

1°. — AIRE D'UN ANNEAU.

On appelle *tore* la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'une droite Oz de son plan. L'axe neutre parallèle à Oz est évidemment la droite MN qui passe par le centre C (fig. 245).

Le théorème de Guldin donne pour l'aire totale du tore :

$$S = 2\pi\rho_1 \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R\rho_1.$$

Nous avons prévenu des difficultés de signes quand la courbe rencontre l'axe. Si nous plaçons le point C sur Oz, nous trouverions $S = 0$. La surface est cependant celle d'une sphère, soit $4\pi R^2$; mais elle doit être prise une fois positivement, une fois négativement.

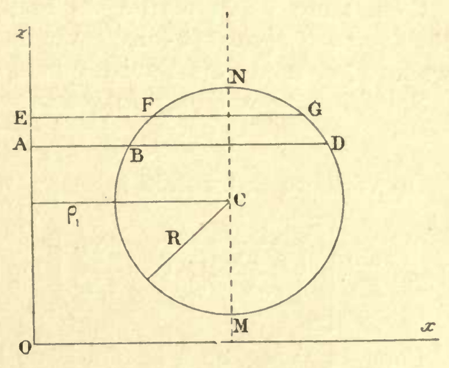


Fig. 245.

2°. — AIRE D'UNE CALOTTE SPHÉRIQUE.

Appliquons la formule générale à la *calotte sphérique* de méridienne MN (fig. 244). Soit R le rayon du cercle.

On a : $\quad \text{arc}\,\overline{MN} = R\theta, \quad dv = Rd\theta, \quad \rho = R\sin\theta;$

$$S = 2\pi R^2 \int_0^\theta \sin\theta \,.\, d\theta = 2\pi R^2(1 - \cos\theta).$$

C'est la formule du § 75.

Pour une *zone* comprise entre les angles θ_0 et θ_1, on a :

$$S = 2\pi R^2(1 - \cos\theta_1) - 2\pi R^2(1 - \cos\theta_0) = 2\pi R^2(\cos\theta_0 - \cos\theta_1);$$

$$S = 2\pi R(R\cos\theta_0 - R\cos\theta_1) = 2\pi Rh;$$

h est la hauteur de la zone.

3°. — ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

La méridienne est : $\quad b^2x^2 + a^2z^2 = a^2b^2.$

On a : $\quad \rho = x, \quad dv^2 = dx^2 + dz^2 = dz^2 \dfrac{a^4z^2 + b^4x^2}{b^4x^2},$

$$S = 2\pi \int \frac{\sqrt{a^4z^2 + b^4x^2}}{b^2} dz = \frac{2\pi a}{b^2} \int \sqrt{b^4 - (b^2 - a^2)z^2} \,.\, dz.$$

Deux cas à considérer.

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son grand axe, il faut poser :

$b > a, \quad \sqrt{b^2 - a^2} = be.$ Par différentiation on vérifiera la formule :

$$S = \frac{\pi ae}{b}\left(\sqrt{\frac{b^2}{e^2} - z^2} + \frac{b^2}{e^2}\,\text{arc sin}\,\frac{ez}{b}\right).$$

C'est l'aire comprise entre le plan équateur $z=0$ et un plan parallèle quelconque.

Pour $z=b$, on a :

$$S=\pi a^2+\frac{\pi ab}{e}\arcsin e.$$

C'est l'aire de la moitié de l'ellipsoïde. On retrouve bien $2\pi a^2$ pour $a=b$ (c'est-à-dire pour la sphère), parce que le quotient $\arcsin e : e$, tend vers l'unité quand e s'annule.

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe, il faut poser :

$$b<a, \qquad \sqrt{a^2-b^2}=ae.$$

On vérifiera la formule :

$$S=\frac{\pi a^2 e}{b^2}\left[\left[z\sqrt{\frac{b^4}{a^2e^2}+z^2}+\frac{b^4}{a^2e^2}\left[\log\left(z+\sqrt{\frac{b^4}{a^2e^2}+z^2}\right)-\log\frac{b^2}{ae}\right]\right]\right].$$

Pour $z=b$, on a la moitié de l'aire de l'ellipsoïde :

$$S=\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\log\frac{a(1+e)}{b}.$$

382. Volume des surfaces de révolution ; théorème de Guldin.

1°. — Le calcul du volume d'une surface de révolution se ramène immédiatement à une intégrale simple, quand il est limité par des *parallèles*. En effet, le solide compris entre deux parallèles distants de dz est assimilable à un cylindre de base $\pi\rho^2$ et de hauteur dz.

Son volume est : $\pi\rho^2 dz$.

Le volume total est par suite :

$$\int \pi\rho^2 dz.$$

2°. — Théorème de Guldin.

Le moment statique par rapport à Oz de l'aire plane qui engendre le volume par rotation autour de la droite Oz de son plan,

est (§ 163) : $$\frac{1}{2}\int \rho^2\, dz=\rho_1\int \rho\, dz.$$

ρ_1 est la distance de l'axe neutre ; $\int \rho\, dz$ est l'aire enclose par la courbe. D'où le théorème : Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'une droite Oz de son plan (qu'elle ne rencontre pas, pour éviter des difficultés de signes), est égal au produit de l'aire par la circonférence décrite par un point quelconque de l'axe neutre parallèle à l'axe de révolution.

3°. — Si la courbe est symétrique par rapport à une droite parallèle à Oz, cette droite est son axe neutre.

4°. — VOLUME D'UN TORE.

L'aire du cercle est πR^2. Le volume engendré est :

$$V = \pi R^2 \,.\, 2\pi\rho_1 = 2\pi^2\rho_1 R^2.$$

Représentation plane et en vraie grandeur des surfaces.

383. Position du problème.

1°. — On établit une correspondance point par point entre une surface et un plan, en posant sur la surface :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

et sur le plan : $\xi = \Phi(u,v), \qquad \eta = \Psi(u,v).$

Chaque système de valeurs u,v, définit un point A de la surface et un point A′ du plan, supposé repéré au moyen des axes (rectangulaires pour simplifier) $\Omega\xi$, $\Omega\eta$. Les fonctions Φ et Ψ sont arbitraires : le problème est donc pour le moment complètement indéterminé. On le détermine en imposant certaines conditions à satisfaire.

2°. — Nous avons expliqué comment les variables u,v, déterminent sur la surface deux faisceaux de courbes qui la décomposent en une sorte de quadrillage (§ 372, *2°*). Il en est de même du plan. Parmi tous les modes de correspondance possibles, cherchons ceux qui font correspondre à un parallélogramme élémentaire de la surface un parallélogramme *de même aire* sur le plan.

Sans qu'il soit nécessaire de reprendre nos calculs, nous concluons du § 376, *3°*, où nous faisons $z = 0$, que l'aire d'un parallélogramme élémentaire sur le plan a pour expression :

$$d\Sigma = \Delta \,.\, du\, dv = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) du\, dv.$$

Il y aura donc égalité pour les aires élémentaires, si les fonctions Φ et Ψ sont choisies de telle sorte qu'on ait identiquement :

$$d\Sigma = dS, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \pm D = \pm\sqrt{EG - F^2}.$$

384. Application aux surfaces de révolution. Cartes de Géographie.

Reprenons les notations du § 378, *4°* ; choisissons comme variable v l'arc de méridien ; u est la longitude. On a :

$$D = \rho(v) ; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \pm\rho(v).$$

1°. — MÉTHODE DE LAMBERT. Posons : $\xi = \Phi(u,v) = u$;

il vient : $$\frac{d\Psi}{dv} = \pm \rho(v), \qquad \eta = \Psi(v) = \pm \int_0^v \rho(v)dv.$$

Appliquons à la sphère. Pour que v soit l'arc de méridien compté à partir de l'équateur, il faut écrire (§ 373) :

$$x = r\cos\frac{v}{r}\cos u, \qquad y = r\cos\frac{v}{r}\sin u, \qquad z = r\sin\frac{v}{r}.$$

D'où : $$\rho = r\cos\frac{v}{r}, \qquad \eta = r\int_0^v \cos\frac{v}{r}\,dv = r^2\sin\frac{v}{r}.$$

Si donc nous voulons représenter une sphère sur un plan de

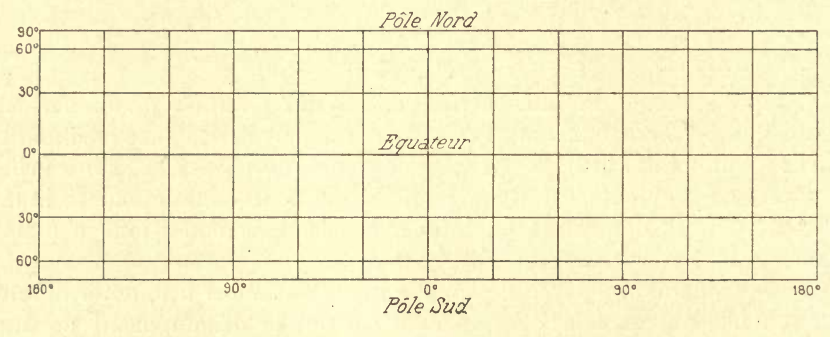


Fig. 246.

manière que les aires soient conservées, nous pouvons prendre pour coordonnées cartésiennes rectangulaires :

$$\xi = u, \qquad \eta = r^2\sin\frac{v}{r};$$

u est la longitude évaluée en radians, r est le rayon de la sphère, $v : r$ est la latitude.

L'hémisphère sera représenté dans un rectangle de base 2π (variation totale de la longitude), de hauteur r^2 (la variation du sinus quand $v : r$ varie de 0 à $\pi : 2$, est 1), par suite de surface $2\pi r^2$.

Les méridiens sont figurés par des droites parallèles à $\Omega\eta$; leur distance est proportionnelle à la variation de la longitude.

Les parallèles sont figurés par des droites parallèles à $\Omega\xi$; si les parallèles représentés correspondent à des variations égales de la latitude, les droites tracées sur la carte se rapprochent à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur.

La figure 246 représente le *canevas général;* les droites tracées correspondent à des variations de 30°.

Il est à peine besoin de faire observer que ce système de *cartes géographiques* déforme complètement les régions voisines du pôle :

elle les allonge à la longueur de l'équateur en les amincissant dans le sens normal, de manière que les aires soient conservées.

2°. — MÉTHODE DE FLAMSTEED. — Posons : $\eta = \Psi(u,v) = v$;

il vient : $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \rho(v)$, $\xi = \Phi(u,v) = u\rho(v) + \text{constante}$.

Appliquons à la sphère ; on trouve (en prenant la constante nulle) :

$$\xi = ru \cos \frac{v}{r} = ru \cos \frac{\eta}{r}, \qquad \eta = v.$$

Les parallèles de la sphère sont figurés par des droites dont la

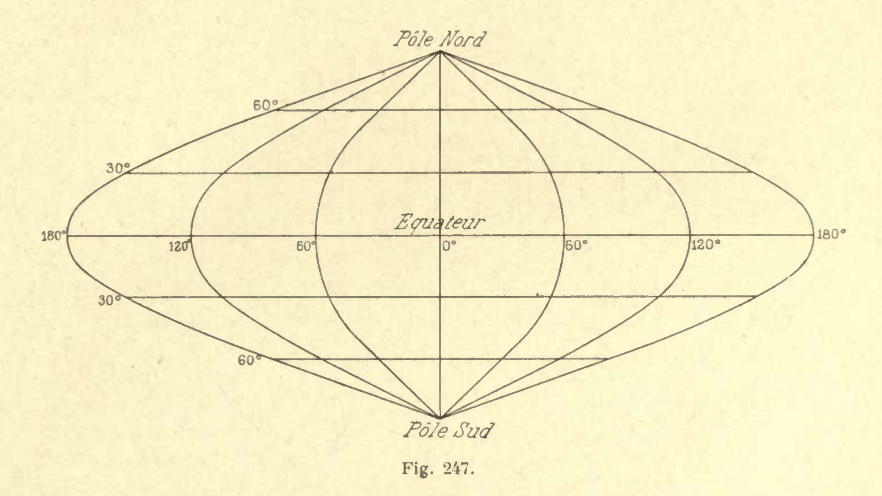


Fig. 247.

distance est proportionnelle à la variation de la latitude ; les méridiens sont transformés en des cosinusoïdes dont l'amplitude est proportionnelle à la longitude. Seul le méridien origine ($u = 0$) est transformé en une droite. La figure 247 représente le *canevas général.*

3°. — Plus généralement, si nous voulons que les parallèles soient figurés par des droites parallèles, nous devons poser :

$$\eta = \Psi(v)\,; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\rho(v)}{\Psi'(v)}, \quad \xi = \Phi = u\,\frac{\rho(v)}{\Psi'(v)} + \Phi_1(v).$$

Nous ajoutons une fonction arbitraire de v qui disparaîtra quand nous prendrons la dérivée partielle par rapport à u.

Dans le cas de la sphère, on trouve :

$$\eta = \Psi(v), \qquad \xi = \frac{ru}{\Psi'(v)} \cos \frac{v}{r} + \Phi_1(v).$$

4°. — MÉTHODE DE BABINET.

Imposons aux méridiens la forme d'ellipses. Déterminons les cons-

tantes de manière (fig. 248) qu'un hémisphère soit représenté dans un cercle de rayon $\sqrt{2}\, r$ e d'aire $= 2\pi r^2$, que le grand axe des ellipses dirigé suivant la ligne des pôles soit constant, enfin que le petit axe soit proportionnel à la longitude du méridien considéré.

Il faut écrire : $$\eta = \sqrt{2}\, r \sin \varphi, \qquad \xi = \frac{2\sqrt{2}\, ru}{\pi} \cos \varphi, \tag{1}$$

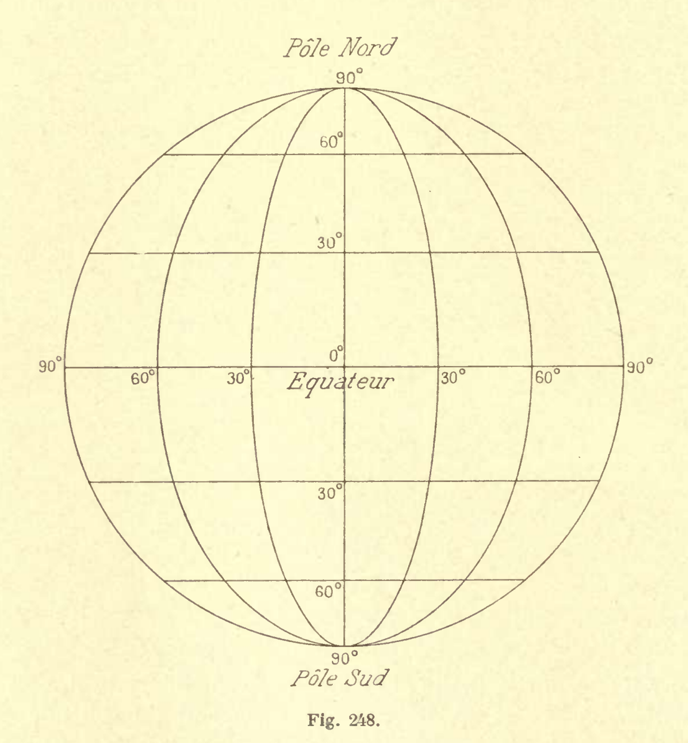


Fig. 248.

où φ est une fonction de l'arc v qu'il s'agit de déterminer.

Identifions avec les relations ci-dessus établies ; il vient :

$$\Psi(v) = \sqrt{2}\, r \sin \varphi; \qquad \frac{1}{\Psi'(v)} \cos \frac{v}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \varphi .$$

On tire aisément de là, en différentiant la première équation, transportant dans la seconde et intégrant :

$$2\varphi + \sin 2\varphi = \pi \sin \frac{v}{r}, \tag{2}$$

relation qui définit la variable auxiliaire φ en fonction de la latitude $v : r$. Les parallèles sont donc représentés par des droites parallèles (puisque φ n'est effectivement fonction que de v) dont les écartements sont fournis par l'équation (2).

Voici les distances relatives des droites parallèles à l'équateur, pour les latitudes croissant de 10 en 10° :

latitude	10	20	30	40	50	60	70	80	90
distance	137	272	404	531	651	762	862	945	1000

Courbes orthogonales sur une surface.

385. Réseau d'isothermes.

1°. — Nous savons déjà que la condition nécessaire pour que les courbes des faisceaux u et v soient orthogonales, est (§ 376, *2°*) :

$$F = 0.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir que, les paramètres croissant d'une courbe à l'autre de la même quantité infiniment petite ε, la surface soit divisée en carrés infiniment petits. Or on a (§ 376, *1°*) :

pour $dv = 0$, $\quad d_1 s = \sqrt{E}\, du$; $\quad$ pour $du = 0$, $\quad d_2 s = \sqrt{G}\, dv$.

La condition $\quad d_1 s = d_2 s$, $\quad$ pour $du = dv$, devient donc :

$$E = G.$$

Ainsi, pour obtenir ce qu'on appelle un *réseau d'isothermes,* il faut que l'élément d'arc prenne la forme :

$$ds^2 = E(u,v)\,(du^2 + dv^2).$$

Cette condition, satisfaite pour un système de variables u et v, le sera évidemment pour tout système $ku + C^{te}$, $kv + C^{te}$, où k est un coefficient constant.

2°. — Appliquons aux surfaces de révolution (§ 378, *1°*) :

$$ds^2 = \rho^2(v)\, du^2 + dv^2 = \rho^2(v) \left[du^2 + \left(\frac{dv}{\rho(v)} \right)^2 \right].$$

Les courbes des faisceaux u et v sont orthogonales ; mais les variables sur ces courbes ne sont pas choisies de manière qu'en leur donnant des accroissements égaux ε (infiniment petits), la surface soit découpée en carrés.

Changeons donc la variable v qui sert à repérer l'un des faisceaux.

Posons : $\quad \displaystyle\int \frac{dv}{\rho(v)} = V$, $\quad$ d'où : $\quad ds^2 = R^2(V)\,(du^2 + dV^2)$.

3°. — Appliquons à la sphère dont, pour simplifier l'écriture, nous prendrons le rayon pour unité de longueur :

$$x = \cos v \cos u, \qquad y = \cos v \sin u, \qquad z = \sin v ;$$

$$ds^2 = dv^2 + \cos^2 v \,.\, du^2 = \cos^2 v \left[du^2 + \left(\frac{dv}{\cos v} \right)^2 \right].$$

Posons donc : $$V = \int \frac{dv}{\cos v} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right).$$

V s'appelle *la fonction des latitudes croissantes;* nous en donnons une table au § 214. Il faut prendre u et V pour nouvelles variables, par suite exprimer $\cos^2 v$ en fonction de V :

$$2v = 4 \operatorname{arc\,tg} e^V - \pi.$$

Nous étudierons plus loin (§ 439) les isothermes d'un hélicoïde.

386. Recherche des lignes isothermes.

1°. — Si l'élément d'arc se présente sous la forme :

$$ds^2 = 2F du dv, \tag{1}$$

pour ramener à la forme déterminée au § 385, *1°*, il suffit de poser :

$$2U = u + v, \qquad 2V = -i(u - v). \tag{2}$$

D'où immédiatement :

$$dU^2 + dV^2 = du dv.$$

On tire de (2) :

$$u = U + iV, \qquad v = U - iV, \tag{3}$$

formules qui serviront au changement de variables dans $F(u,v)$.

2°. — D'une manière générale on peut écrire :

$$E[E du^2 + 2F du dv + G dv^2] =$$
$$[E du + (F + iD) dv][E du + (F - iD) dv]; \tag{4}$$
$$D^2 = EG - F^2.$$

Si l'on trouve les facteurs intégrants des parenthèses du second membre de (4), on ramène la forme (3) à la forme (1) et par suite à la forme qui convient au faisceau des isothermes (§ 282).

2°. — Appliquons la méthode à la sphère :

$$ds^2 = dv^2 + \cos^2 v \,.\, du^2 = (\cos v \,.\, du + i dv)(\cos v \,.\, du - i dv).$$

Le facteur intégrant de l'une ou l'autre parenthèse est $1 : \cos v$.

D'où : $$ds^2 = \cos^2 v \left[du + \frac{i dv}{\cos v}\right]\left[du - \frac{i dv}{\cos v}\right].$$

Nous poserons donc :

$$dU = du + \frac{i dv}{\cos v}, \qquad dV = du - \frac{i dv}{\cos v}.$$

$$U = u + i \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right), \qquad V = u - i \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right).$$

Appliquant les formules (2) à ces valeurs de U et de V *et changeant convenablement les notations*, on trouve les variables déjà obtenues :

$$u' = \frac{U + V}{2} = u, \qquad v' = -\frac{i}{2}(U - V) = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right).$$

Représentation conforme des surfaces.

387. Conditions d'une représentation conforme.

Nous supposons la surface définie par les variables u, v, *que nous prenons pour coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un plan.*

A chaque point de la surface correspond un point du plan.

Nous demandons la condition pour que la représentation soit conforme, c'est-à-dire pour qu'aux figures infiniment petites tracées

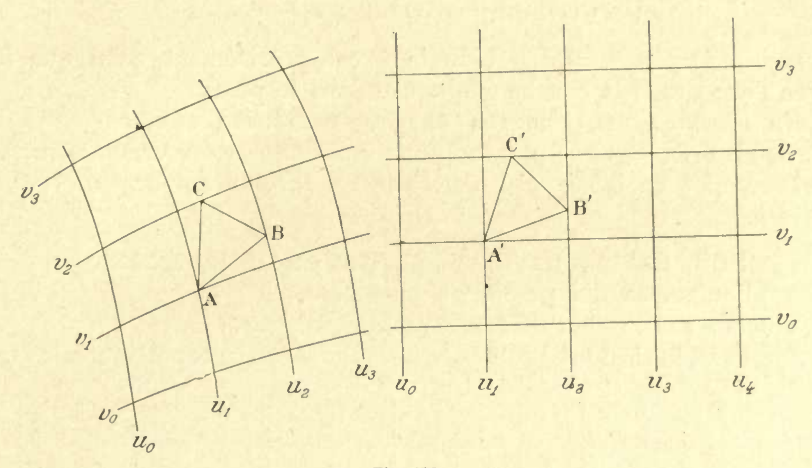


Fig. 249.

sur la surface correspondent sur le plan des figures infiniment petites semblables. Aux §§ 236 et suivants, nous avons étudié la même correspondance entre les points de deux plans.

1°. — A partir d'un point A de la surface, traçons les arcs infiniment petits AB, AC, . . . dont les longueurs rentrent dans l'expression générale :

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

A partir du point A' situé dans le plan et conjugué de A, traçons les arcs A'B', A'C', . . . respectivement conjugués de AB, AC, . . . Leurs longueurs rentrent dans la formule :

$$ds'^2 = du^2 + dv^2.$$

Pour que le rapport $ds : ds'$ soit constant *pour le point* A (il peut varier d'un point à l'autre de la surface), il faut évidemment que :

$$E = G, \qquad F = 0; \qquad ds^2 = E(du^2 + dv^2). \qquad (1)$$

Si cette condition est réalisée, on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \cdots$$

3°. — Supposons la condition (1) satisfaite : les angles se conservent.

D'abord les courbes $u=$ constante, $v=$ constante, tracées sur la surface sont orthogonales (§ 376, *2°*), comme le sont *par hypothèse* les droites $u=$ constante, $v=$ constante, tracées sur le plan.

Plus généralement, reprenons la formule qui donne l'angle θ d'une courbe tracée sur la surface avec l'une des courbes du faisceau $v=$ constante (§ 377 et fig. 241) :

$$\cos\theta=\frac{E+Fp}{\sqrt{E}\sqrt{E+2Fp+Gp^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \operatorname{tg}\theta=p,$$

quand $E=G$, $F=0$. L'angle θ est précisément celui que fait avec l'axe des u la courbe conjuguée dans le plan.

En résumé, nous aurons une représentation conforme sur un plan, en prenant dans ce plan pour coordonnées cartésiennes rectangulaires les variables qui déterminent sur la surface un réseau d'isothermes.

388. Cartes marines réduites ou de Mercator.

Appliquons ce qui précède à la sphère.

Traçons sur le plan deux axes rectangulaires.

Sur l'axe horizontal prenons des longueurs U proportionnelles aux

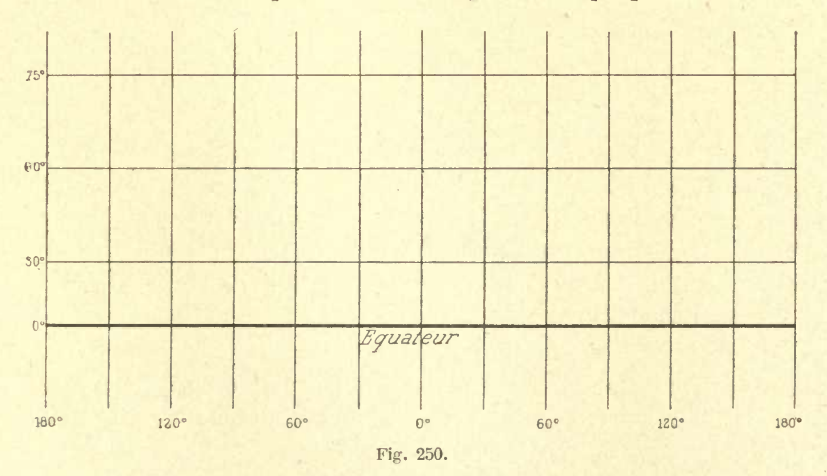


Fig. 250.

longitudes. Menons des droites perpendiculaires, et, à la même échelle, portons dessus des longueurs :

$$V=\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{v}{2}\right),$$

où v est la latitude. Les méridiens deviennent les droites verticales du plan; les parallèles deviennent les droites horizontales. Les figures infiniment petites tracées sur la sphère sont représentées sur

ces cartes (*dites cartes marines réduites ou de Mercator*) par des figures semblables.

Le rapport de similitude varie d'un point à l'autre. Il résulte du § 387 qu'il est :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\cos v}.$$

Conséquemment la représentation, conforme pour les figures infiniment petites, ne l'est plus pour les figures finies.

La figure 250 représente le canevas général de Mercator. Près de l'équateur, la représentation ne change pas les aires ($\cos v = 1$).

389. Problème des routes en Navigation. Loxodromie.

1°. — On sait que le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère est le plus petit arc de grand cercle qui passe par ces points. Mais cette courbe coupe les méridiens suivant un angle variable.

En effet, soit BCB′ un grand cercle.

On a dans le triangle sphérique ABC rectangle en B (§ 73) :

$$\text{tg}\, C = \text{tg}\, \overline{AB} : \sin \overline{BC}.$$

L'angle C est droit pour le méridien AE, ($\sin \overline{BC} = 0$); il diminue ensuite et devient minimum pour le méridien rectangulaire AD où il est égal à $\overline{AB}$, ($\sin \overline{BD} = 1$).

2°. — Mais l'emploi de la boussole amène les navigateurs à utiliser entre deux points, non pas la route la plus courte, mais celle qui fait un angle constant avec les méridiens successifs et qu'on appelle *loxodromie*. Admettons, en effet, que la *déclinaison magnétique* soit constante; c'est dire que la projection horizontale de l'aiguille fait partout le même angle avec le méridien géographique. Pour décrire automatiquement la loxodromie, il suffit de maintenir constant l'angle de l'aiguille aimantée (rendue sensiblement horizontale par son mode de suspension) avec la quille du navire. La variation de la déclinaison entraîne une correction de cet angle, lentement variable d'un lieu à l'autre, ce qui ne présente aucune difficulté.

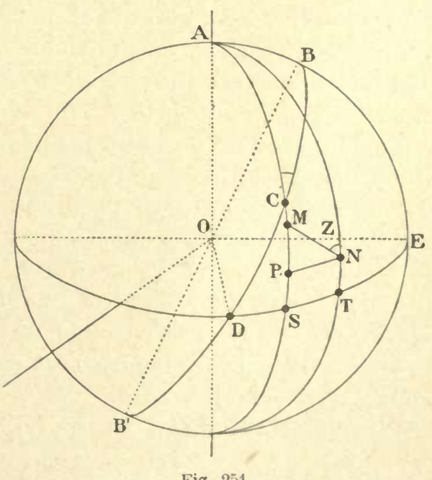


Fig. 251.

Nous sommes donc amenés à chercher l'équation de la courbe NM qui coupe tous les méridiens sous un angle constant ANM = Z.

3°. — LOXODROMIE.

Soit $ds = \overline{NM}$, un élément d'arc sur une sphère de rayon 1. Projetons sur le méridien :

$$\overline{PM} = dv = ds \,.\, \cos Z, \qquad v - v_0 = s \cos Z. \tag{1}$$

Projetons sur le parallèle :

$$\overline{PN} = \cos v \,.\, du = \sin Z \,.\, ds\,; \tag{2}$$

$$u - u_0 = \operatorname{tg} Z \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\cos v} = \operatorname{tg} Z \left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v_0}{2}\right) \right]. \tag{3}$$

Partons d'un point N dont les coordonnées géographiques sont u_0, v_0. Pour aller jusqu'au pôle $(v = \pi : 2)$; il faut parcourir un arc de courbe *fini* :

$$s = \left(\frac{\pi}{2} - v_0\right) \frac{1}{\cos Z}.$$

Cela n'empêche pas le pôle d'être un point asymptotique, puisque $u - u_0$ devient infini ; autrement dit, la courbe fait autour du pôle une infinité de tours dont les rayons moyens diminuent assez vite pour que la longueur totale de la courbe reste finie.

Il va de soi que par chaque point N de la sphère passent deux loxodromies, symétriques par rapport au méridien de départ et faisant le même angle Z avec ce méridien.

4°. — Revenons aux cartes de Mercator.

La loxodromie y a une droite pour courbe conjuguée, puisque la représentation est conforme et que les méridiens y ont des droites pour courbes conjuguées. Naturellement les arcs de loxodromie subissent une amplification croissante vers les pôles ; nous savons que le rapport de similitude est $1 : \cos v$.

La longueur de la route jusqu'au pôle devient maintenant infinie. Pour comprendre comment la chose est possible, il faut supposer les unes à côté des autres une infinité de cartes de Mercator, disposées de manière que le méridien $-180°$ de l'une coïncide avec le méridien 180° de la suivante. Les tours successifs de la loxodromie autour du pôle sont remplacés par le passage de la droite à travers ces rectangles successifs, de largeur finie, mais de hauteur infinie.

5°. — On conçoit maintenant comment est résolu le *problème des routes* en Navigation.

L'équation (3) s'écrit :

$$u - u_0 = (V - V_0) \operatorname{tg} Z.$$

Or u et V sont précisément les coordonnées de la carte de Mercator.

D'où résulte que pour aller d'un point A à un point B de la carte par la loxodromie qui les joint, on tracera la droite AB ; on déterminera au rapporteur son angle avec un quelconque des méridiens (verticales) : ce sera précisément l'angle Z. Connaissant la décli-

naison magnétique Δ, on saura l'angle $Z \pm \Delta$, que l'aiguille doit faire avec la quille du navire. Si l'homme de barre maintient cet angle, le navire décrira la loxodromie.

4° — La loxodromie qui joint deux points, D et B par exemple (fig. 251), est plus longue que l'arc de grand cercle, mais de peu. Pour fixer les idées, supposons que partant du point D ($u_0 = v_0 = 0$), nous allions au point B de coordonnées $u = \pi : 2$, $v = \pi : 4$. L'arc de grand cercle BD a pour longueur $\pi : 2$. Calculons l'arc de loxodromie.

La formule (3) et la table du § 214 donnent :

$$\operatorname{tg} Z = 1{,}78, \qquad \cos Z = 0{,}49.$$

D'où, en vertu de la formule (1) : $\quad s = \pi : 1{,}96$.

L'allongement de la route n'est que de 2 0/0. On remarquera qu'il serait nul pour les routes DA ou DE, la loxodromie se confondant alors avec le méridien ou le parallèle.

390. Projection stéréographique.

1°. — Au § 387, nous supposons que les coordonnées u, v, dans le plan sont *les coordonnées cartésiennes rectangulaires*. Prenons maintenant *pour coordonnées polaires* l'angle u et le rayon vecteur $r(u, v)$.

Cherchons les conditions de la représentation conforme.

Posons tout de suite qu'il s'agit de la sphère. Par raison de symétrie, r est une fonction de v seulement. Déterminons laquelle.

L'arc a pour expressions :

en coordonnées polaires dans le plan (§ 80) :

$$ds'^2 = dr^2 + r^2\, du^2;$$

sur la sphère : $\quad ds^2 = dv^2 + \cos^2 v \,.\, du^2.$

D'où :

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{dr^2 + r^2\,du^2}{dv^2 + \cos^2 v\,.\,du^2} = \frac{r^2}{\cos^2 v}\left(\frac{dr^2}{r^2} + du^2\right) : \left(\frac{dv^2}{\cos^2 v} + du^2\right).$$

Ce rapport est le même pour tous les petits déplacements à partir d'un point de la sphère (v et u donnés, du et dv quelconques) si :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dv}{\cos v}, \qquad \log r = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right);$$

d'où (§ 48,5°) : $\quad r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = \frac{\cos v}{1 - \sin v}$.

Le facteur de proportionnalité, variable d'un point à l'autre de la sphère, est :

$$\frac{r}{\cos v} = \frac{1}{1 - \sin v}.$$

2°. — La projection stéréographique réalise précisément ces conditions.

A partir du point A de la sphère, menons des droites par les

points B quelconques. Elles rencontrent l'équateur en des points B′ que nous prendrons pour conjugués de B.

Il est d'abord évident que la condition relative à l'angle u (longitude sur la sphère, angle en coordonnées polaires sur le plan) est satisfaite.

Établissons donc la condition relative au rayon vecteur.

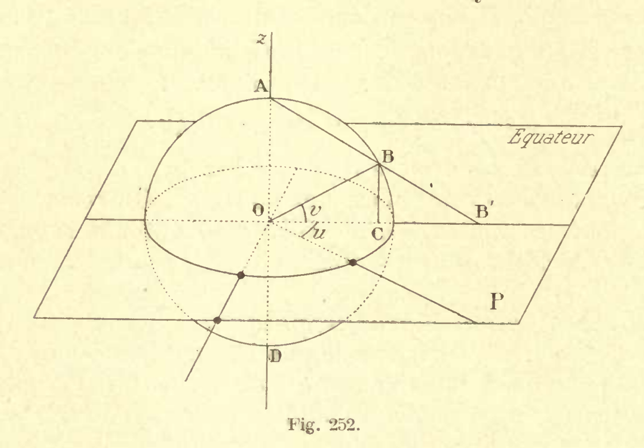


Fig. 252.

Dans les triangles semblables OAB′, CBB′, on a :

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BC}}; \qquad \overline{OB'} = r, \qquad \overline{CB'} = r - \cos v,$$

$$\overline{OA} = 1, \qquad \overline{CB} = \sin v;$$

$$\frac{r}{r - \cos v} = \frac{1}{\sin v}, \qquad r = \frac{\cos v}{1 - \sin v}.$$

Projetons sur le plan un élément d'arc de parallèle : le rapport de similitude est évidemment égal à :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC}} = \frac{r}{\cos v} = \frac{1}{1 - \sin v}.$$

Il vaut 1 pour $v = 0$ (points voisins de l'équateur); il est infini pour les points voisins du pôle.

Quand on déplace le plan de projection parallèlement à lui-même, on obtient des figures semblables (§ 364); par suite, la représentation est conforme pour tous ces plans, en particulier pour le plan tangent au point D extrémité du diamètre AO.

3°. — On démontre immédiatement que la projection stéréographique de la loxodromie est une spirale logarithmique (§ 201).

Analytiquement, cela résulte de la comparaison des équations :

$$u = \text{tg}\, Z \,.\, \log \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right), \qquad \log r = \log \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right);$$

d'où :

$$u = \text{tg}\, Z \,.\, \log r.$$

Géométriquement, cela résulte de ce que : 1° la représentation par projection stéréographique est conforme ; 2° la loxodromie coupe tous les méridiens sous le même angle ; 3° la spirale logarithmique coupe tous les rayons vecteurs sous le même angle. Nous conseillons au lecteur de tracer sur un ballon de celluloïd une loxodromie complète, à partir d'un point de l'équateur, afin de se rendre compte de sa position par rapport aux pôles (points asymptotiques). Les spires asymptotes au pôle *point de vue* A sont projetées à l'infini, tandis que les spires asymptotes au pôle D sont projetées autour de O.

391. Relations entre la projection stéréographique et l'inversion.

1°. — Nous avons étudié aux §§ 236 et suivants la transformation des figures *par inversion ;* autrement dit, *par rayons vecteurs réciproques.*

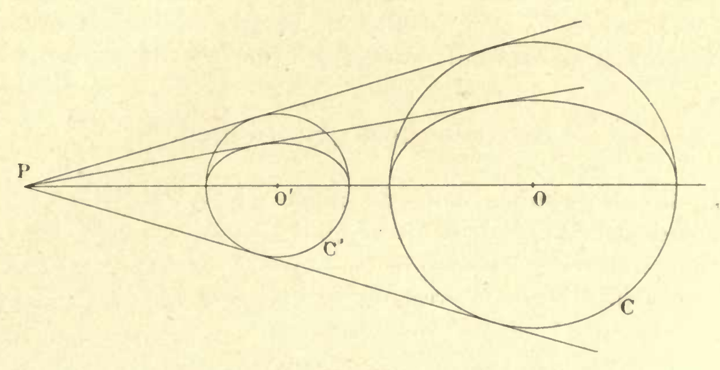


Fig. 253.

Nous avons montré en particulier que la transformée d'un cercle C est un cercle C′ qui devient une droite quand le pôle d'inversion P est pris sur le cercle C. Étudions l'inversion dans l'espace (fig. 253).

Il est d'abord évident que l'inverse d'une sphère est une sphère. Joignons, en effet, le pôle P au centre O de la sphère C. Par la droite PO faisons passer un plan : il coupe la sphère C suivant un cercle. L'inverse de ce cercle est un nouveau cercle dont le centre O′ est sur la droite PO. Ces résultats s'appliquent à tous les plans passant par PO ; le phénomène étant de révolution autour de PO, l'inverse de la sphère C est une nouvelle sphère C′ dont le centre est en O′.

L'inverse de la sphère C devient un plan normal à PO, si le point P est pris sur elle.

L'inverse d'un cercle est un cercle. En effet, on le peut considérer comme l'intersection de deux sphères ; leurs inverses sont encore deux sphères qui se coupent nécessairement suivant un cercle.

2°. — Réciproquement, tout plan P peut être considéré (fig. 252) comme l'inverse de la sphère de centre O par rapport à un point A

de cette sphère, à la seule condition que la droite AO soit normale au plan P.

C'est ce qui a lieu précisément dans la projection stéréographique. Rien ne suppose au surplus que le plan P passe par le centre de la sphère. On démontrera aisément la relation : $AB . \overline{AB'} = 2$.

Corollaire. — Il résulte de là que la projection stéréographique transforme un cercle en un cercle. La proposition, évidente pour les parallèles et les méridiens (pour ceux-ci le cercle devient une droite), est générale.

Remarque. — On démontre aisément que dans l'inversion les angles se conservent, quelles que soient les figures transformées. Cela tient à ce que les tangentes en deux points conjugués de deux courbes conjuguées sont dans le même plan passant par le pôle d'inversion, et qu'elles font le même angle (en sens inverse) avec le rayon vecteur (§ 237). D'où résulte que l'angle de deux courbes en un point d'intersection est égal à l'angle des courbes conjuguées (§ 70, I).

Surfaces topographiques.

Nous dirons quelques mots du mode de représentation *topographique* des surfaces, d'abord parce qu'il donne une idée nette de la méthode des *projections cotées,* ensuite parce qu'on le trouve généralisé dans la question si importante en Physique des *surfaces équipotentielles et isothermes* (§ 485).

392. Surfaces topographiques; figuré du relief.

Les surfaces *topographiques* n'ont de particulier que leur mode de représentation, et cette propriété secondaire de n'être rencontrées par une verticale qu'en un point. Nous coupons la surface $z = f(x,y)$, par des *plans horizontaux ;* autrement dit, nous définissons *les courbes de niveau* en donnant à z une série de valeurs *constantes* z_0, z_1,...

En général, ces valeurs forment une progression *arithmétique* dont la raison : $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$,..., est appelée *équidistance.*

Par suite, la surface est représentée sur un plan horizontal par les projections (en vraie grandeur) des lignes de niveau, auxquelles on joint *leur cote,* c'est-à-dire le nombre qui exprime leur hauteur *au-dessus* du plan horizontal de projection. D'après l'hypothèse qu'une verticale ne rencontre la surface qu'en un point, les projections des lignes de niveau ne se coupent pas (fig. 254).

Le lecteur se fera la meilleure idée de ce mode de représentation en étudiant certaines cartes à grande échelle, par exemple la carte des Pyrénées centrales de Schrader.

En Topographie, la méthode de représentation par courbes de niveau tire sa commodité du fait que le *niveau d'eau* détermine de proche en proche les points qui sont sur un plan horizontal.

393. Lignes d'égale pente.

Soit tracées les lignes de niveau équidistantes ; on demande de construire une ligne *d'égale pente*. Le problème correspond à la détermination sur le flanc d'une montagne d'un sentier dont la pente est imposée. Puisque les lignes de niveau sont équidistantes, c'est-à-dire correspondent à la même dénivellation verticale, le sentier doit avoir la même longueur entre deux lignes consécutives (fig. 254).

Partant d'un point A et choisissant la longueur $\overline{AB}$, on déterminera successivement les points C, D,... par la condition :

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} \ldots$$

La solution est d'autant plus rigoureuse, que l'équidistance des courbes de niveau est plus petite.

D'un même point A partent une infinité de courbes *d'égale pente* dont les pentes sont comprises entre un maximum (ligne descendante) et un minimum (maximum négatif, ligne ascendante). Ce maximum et ce minimum correspondent à la ligne *de plus grande pente* passant par A.

Fig. 254.

Pour tracer une ligne d'égale pente entre deux points *donnés* A et E, on procède par tâtonnements. A partir de A, on décrit une ligne de pente *trop faible* qui aboutit en E_1, une ligne de pente *trop forte* qui aboutit en E_2. Une interpolation proportionnelle aux longueurs $\overline{EE_1}$ et $\overline{EE_2}$ donne approximativement la pente convenable.

394. Lignes de plus grande pente.

1°. — Les lignes de plus grande pente coupent normalement les lignes de niveau, comme il résulte immédiatement de la construction des lignes d'égale pente. Les lignes de niveau étant horizontales, les projections horizontales des lignes de plus grande pente coupent à angle droit les projections (en vraie grandeur) des lignes de niveau. Nous sommes donc ramenés à la recherche d'un faisceau de courbes orthogonales à un faisceau donné (§§ 238 et suivants).

2°. — Soit :
$$f(x, y) = z,$$
l'équation de la surface. Les lignes de niveau satisfont à la condition :
$$dz = 0, \qquad pdx + qdy = 0.$$

L'équation différentielle des projections horizontales des lignes de plus grande pente est, par suite (§ 77) :

$$q\,dx - p\,dy = 0.$$

3°. — Si, par exemple, les lignes de niveau sont des coniques homothétiques :

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \varphi(z),$$

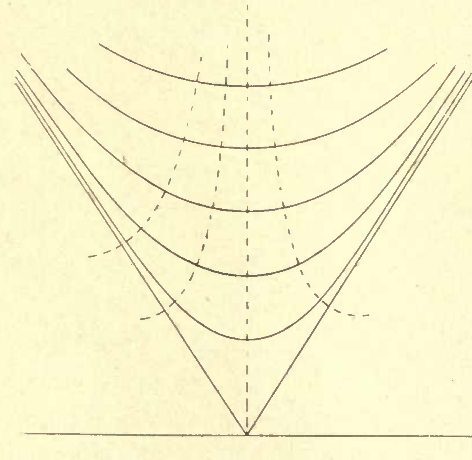
elles satisfont à la condition :

$$dz = 0, \qquad \frac{x\,dx}{a^2} \pm \frac{y\,dy}{b^2} = 0.$$

Les lignes de plus grande pente sont définies par l'équation (fig. 255) :

$$\frac{y}{b^2}\,dx \mp \frac{x}{a^2}\,dy = 0, \qquad a^2 \log \frac{x}{x_0} \mp b^2 \log \frac{y}{y_0} = 0,$$

où x_0, y_0, sont les coordonnées d'un point où doit passer la ligne à considérer. Dans le cas des ellipses (signe supérieur), l'origine est un point d'arrêt : toutes les lignes y aboutissent sous des angles différents et *s'arrêtent brusquement*. Dans le cas des hyperboles, les lignes de plus grande pente admettent les axes comme asymptotes ; elles sont naturellement normales aux asymptotes communes à toutes les hyperboles, asymptotes qui font partie du faisceau d'hyperboles.



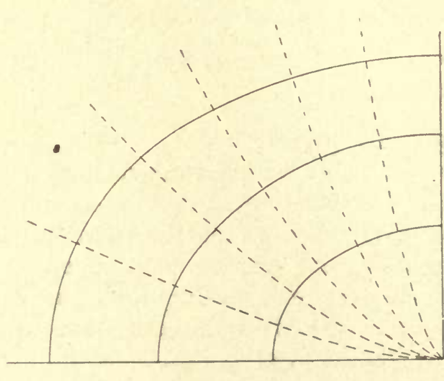


Fig. 255.

4°. — Un mobile glissant sur la surface (supposée polie) part suivant une ligne de plus grande pente ; mais il la quitte dès que sa vitesse cesse d'être nulle, *à moins que la ligne ne soit plane et verticale*. Il ne suffit même pas qu'elle soit dans un plan vertical ; dans ce cas, le mobile reste bien dans le plan de la ligne, mais non en contact permanent avec elle. Si, par exemple, à une pente faible succède brusquement une pente forte, il peut arriver, si la vitesse du mobile est assez grande, qu'il s'échappe suivant une courbe moins inclinée.

395. Thalwegs ; lignes de faîte ou arêtes.

1°. — Les lignes de plus grande pente satisfont simultanément aux deux équations (§§ 372 et 394) :

$$dz = pdx + qdy, \qquad 0 = qdx - pdy\,;$$

la première exprime simplement qu'elles sont sur la surface.

D'où : $dz^2 = (p^2 + q^2)(dx^2 + dy^2), \qquad \operatorname{tg} \alpha = p^2 + q^2\,;$

α est l'inclinaison avec l'horizon de la ligne de plus grande pente.

Cherchons sur une ligne de niveau ($dz = 0$) les points pour lesquels α est maximum ou minimum. Il faut écrire :

$$pdx + qdy = 0, \qquad d(p^2 + q^2) = 0.$$

La seconde relation donne (§ 372) :

$$pr\,dx + ps\,dy + qs\,dx + qt\,dy = 0.$$

Éliminons dx et dy au moyen de la première, il reste :

$$pq(r - t) + s(q^2 - p^2) = 0. \qquad (1)$$

2°. — L'équation (1) définit dans le plan xOy une ou plusieurs courbes qui sont les projections des lieux des points où les lignes de plus grande pente ont leur inclinaison maxima ou minima ; ce lieu se compose dans l'espace d'une ou plusieurs courbes qu'on appelle *thalwegs* et *lignes de faîte*. Il est bien entendu que ce maximum (ou minimum) d'inclinaison est déterminé par comparaison avec les points voisins *sur le même plan horizontal.*

Que le lecteur se représente le contrefort d'une chaîne de montagnes aboutissant *sur* une vallée principale. Se plaçant à l'origine de ce contrefort, qu'il descende en choisissant sa route de manière à dominer le mieux possible les deux versants (vallées secondaires). *Il ne décrira pas une ligne de plus grande pente ;* à chaque instant il changera de ligne de plus grande pente, généralement d'abord pour descendre le moins vite possible, généralement ensuite pour descendre le plus vite possible. Il suivra ce qu'on appelle *une arête ou une ligne de faîte.*

Au contraire, qu'il descende en suivant le fond de la vallée secondaire (*thalweg*, chemin de la vallée). *Il ne décrira pas davantage une ligne de plus grande pente ;* à chaque instant il changera de ligne de plus grande pente, généralement d'abord pour descendre le plus vite possible, généralement ensuite pour descendre le moins vite possible.

Géométriquement parlant, les lignes de faîte et les thalwegs ont même définition; mais on ne peut évidemment pas les confondre.

Ces lignes coïncident parfois avec une ligne de plus grande pente ; c'est ce qui arrive toujours quand la surface a un plan de symétrie. Ainsi plaçons verticalement un des axes d'un ellipsoïde (Oz, par

exemple) : les courbes qui sont dans les plans de symétrie xOz et yOz, sont des lignes de plus grande pente, et simultanément des lignes de faîte ou des thalwegs suivant qu'on prend la surface en relief ou en creux.

396. Gouttière inclinée.

Soit une gouttière hémicylindrique inclinée, dont l'axe se projette suivant Ox. La section droite étant un cercle, les lignes de niveau sont des ellipses égales (§ 107).

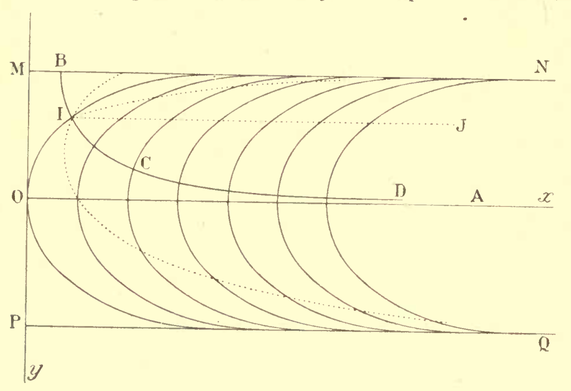


Fig. 256.

Les projections des lignes de plus grande pente, identiques entre elles, ont la forme BCD ; elles admettent toutes la projection de la ligne de plus grande pente Ox (fond de la gouttière) comme asymptote. D'un point I quelconque part un faisceau de courbes d'égale pente (en pointillé), parmi lesquelles la droite IJ parallèle au fond de la gouttière.

Le thalweg est la ligne de plus grande pente Ox.

Soit :
$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

l'équation du faisceau des lignes de niveau ; c est le paramètre variable supposé proportionnel à la cote. On trouvera aisément pour équation du faisceau des lignes de plus grande pente :

$$\frac{a}{b}x=\sqrt{b^2-y^2}-b\log\frac{y}{b+\sqrt{b^2-y^2}}+C^{te}.$$

Surfaces enveloppes.

397. Surfaces enveloppes.

1°. — Soit un faisceau de surfaces :

$$f(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0. \qquad (1)$$

Pour chaque valeur de α, nous avons une surface du faisceau dont la forme et la position dépendent de la valeur du paramètre α. Faisons varier α de $-\infty$ à $+\infty$; nous obtenons une infinité de surfaces qui peuvent occuper tout l'espace ou laisser intacte une portion de l'espace. Dans ce dernier cas, le volume qu'elles atteignent est

limité par une surface qui est leur *enveloppe ;* chaque surface du faisceau est une *enveloppée* (comparer à la définition des courbes enveloppes, § 129, et généraliser le *5°* de ce paragraphe).

2°. — Si l'on donne à α successivement les valeurs α et $\alpha + d\alpha$, on obtient deux surfaces du faisceau (1) qui diffèrent infiniment peu de forme et de position. *Nous admettons* qu'elles se coupent suivant une ligne dont la position limite est parfaitement déterminée quand $d\alpha$ tend vers zéro (c'est l'hypothèse même qu'il existe une enveloppe). Nous nommerons cette ligne *caractéristique*. Ses équations sont :

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0,$$

ou, ce qui revient au même :

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \tag{2}$$

3°. — L'enveloppe peut être considérée comme le lieu des caractéristiques (2). On obtient donc son équation en éliminant α entre les équations (2) ; la surface ainsi déterminée est le lieu des intersections successives des enveloppées, puisqu'elle contient l'une quelconque des caractéristiques (2) et que le paramètre α n'y entre plus.

398. Surfaces canaux, tore elliptique, serpentin.

1°. — Les sphères de rayon invariable R dont les centres sont aux points de coordonnées α, β, du plan xOy, ont pour équation :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = R^2. \tag{1}$$

Cherchons une propriété commune à toutes ces sphères. Pour cela éliminons les paramètres α et β entre (1), et les deux équations tirées de (1) en dérivant successivement par rapport à x et à y :

$$(x - \alpha) + zp = 0, \qquad (y - \beta) + zq = 0. \tag{2}$$

Substituant dans (1), il reste l'équation aux dérivées partielles :

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = R^2. \tag{3}$$

Elle exprime que la normale en un point quelconque de hauteur invariable z, fait avec Oz un angle dont le cosinus (§ 375, *1°*) est constant (propriété géométriquement évidente) et égal à :

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \pm \frac{z}{R}.$$

2°. — Cylindres circulaires. — Inversement, l'équation aux dérivées partielles (3) admet (1) comme intégrale. Cela signifie que toutes les sphères (1) jouissent de la propriété exprimée par (3) ; mais cela ne signifie pas qu'elles sont les seules surfaces qui en jouissent.

Considérons, en effet, les surfaces représentées par l'équation :

$$\frac{(y - ax - b)^2}{1 + a^2} + z^2 = R^2. \tag{1'}$$

Elle exprime (§ 29, *3°*) que le carré de la distance d'un point de la surface à une droite du plan xOy, est une constante ; elle représente donc tous les cylindres circulaires dont les axes sont sur le plan xOy et dont le rayon est R.

Dérivons successivement (1') par rapport à x et à y :

$$\left.\begin{aligned} -a(y-ax-b)+(1+a^2)zp=0, \\ (y-ax-b)+(1+a^2)zq=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Nous retrouvons bien (3) à partir des équations (1') et (2').

3°. — Surfaces canaux. — Reprenons la sphère (1) et imposons au centre une trajectoire autre qu'une droite.

Par exemple, faisons-lui décrire l'ellipse :

$$\alpha = \mu \cos \varphi, \qquad \beta = \nu \sin \varphi. \qquad (4)$$

$$(x-\mu\cos\varphi)^2+(y-\nu\sin\varphi)^2+z^2=R^2. \qquad (1''')$$

L'intersection de deux sphères infiniment voisines est l'intersection de la surface (1''') et de la surface obtenue par dérivation :

$$(x-\mu\cos\varphi)\,\mu\sin\varphi-(y-\nu\sin\varphi)\,\nu\cos\varphi=0,$$

$$x\mu\sin\varphi+y\nu\cos\varphi=(\mu^2-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (5)$$

La surface (5) est un plan parallèle à Oz : la *caractéristique*, intersection d'une sphère par un plan, est donc un grand cercle. On vérifiera immédiatement que le plan (5) est normal à l'ellipse (4).

En éliminant φ entre les équations (1''') et (5), nous obtiendrions la surface *enveloppe* de toutes les sphères de rayon invariable R dont le centre est assujetti à décrire l'ellipse (4) ; *c'est un cas particulier de ce qu'on appelle un tube ou une surface canal.*

4°. — Solution singulière. L'équation aux dérivées partielles (3) est satisfaite si l'on pose : $\quad z=\pm R, \qquad p=0, \qquad q=0. \qquad (7)$

On définit ainsi deux plans P et P' tangents à toutes les sphères (1), à tous les cylindres (1'), généralement aux surfaces enveloppes des sphères, et qui ne sont un cas particulier ni de ces sphères, ni de ces cylindres, ni de ces enveloppes. Ils constituent une *solution singulière* de l'équation aux dérivées partielles.

5°. — Serpentin. — Comme généralisation du problème ci-dessus résolu, on peut supposer que la courbe décrite par le centre de la sphère est gauche. Si, par exemple, c'est une *hélice* (§ 409), la surface enveloppe (surface canal) est un *serpentin*.

399. Tore circulaire ; ovales et lemniscates.

Insistons sur le tore (§ 381, *1°*) en raison de l'importance capitale des courbes qu'il donne par intersection avec un plan. Nous conseillons au lecteur de se procurer un gros anneau; une couronne d'immortelles (de section aussi ronde que possible) recouverte de

papier fera fort bien l'affaire. Il tracera à mesure les courbes et suivra aisément la discussion.

1°. — Pour pousser les calculs à bout, remplaçons l'ellipse du paragraphe précédent par le cercle de rayon :

$$\overline{OC} = \mu; \qquad \alpha = \mu \cos\varphi, \qquad \beta = \mu \sin\varphi.$$

La condition (5) devient :

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = 0.$$

On a pour la surface canal :

$$x^2\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + y^2\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + z^2 = R^2.$$

$$(\sqrt{x^2+y^2} - \mu)^2 + z^2 = R^2. \tag{6}$$

Telle est l'équation du *tore* (§ 381, *1°*). On retrouve l'équation (6) en écrivant que la surface est le lieu des *caractéristiques ;* ce qui revient à dire qu'elle est engendrée par un cercle tournant autour d'une droite de son plan.

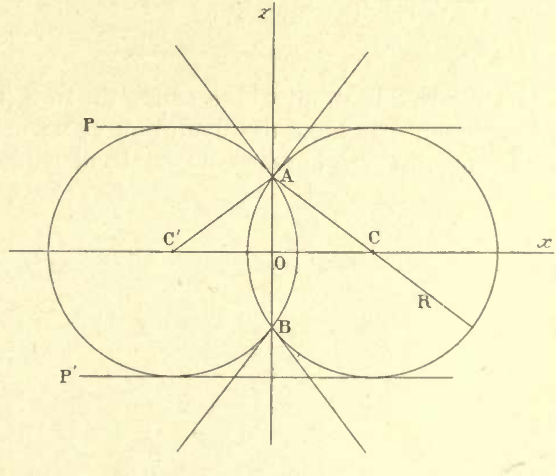


Fig. 257.

Le tore, comme n'importe quelle autre surface canal, satisfait à l'équation (3).

En effet, celle-ci exprime une propriété générale du plan tangent à la sphère, qui doit se retrouver sur toutes les enveloppes.

Les intersections de (6) avec Oz sont données par la condition :

$$z = \pm\sqrt{R^2 - \mu^2}.$$

On définit ainsi deux points A et B qui sont réels si $R > \mu$, ce qui est évident. Quand ils sont réels, ils constituent des *points coniques*. Les plans tangents à la surface aux points A et B enveloppent des cônes qui sont de révolution autour de Oz.

Nous reviendrons là-dessus plus loin. Quand les points A et B sont réels, on dit que le tore est *fermé ;* il est *ouvert* quand ils sont imaginaires.

2°. — Sections par un plan parallèle a l'axe Oz.

Coupons par un plan parallèle à l'axe Oz. Comme la surface est de révolution, nous pouvons le placer parallèlement à xOz sans

diminuer la généralité du problème : son équation est $y = \delta$.

La courbe d'intersection a pour équations équivalentes :

$$\left(\sqrt{x^2+\delta^2}-\mu\right)^2+z^2=\mathrm{R}^2,$$

$$(x^2+z^2+\delta^2+\mu^2-\mathrm{R}^2)^2=4\mu^2(x^2+\delta^2). \qquad (1)$$

On obtient la seconde à partir de la première en chassant le radical.

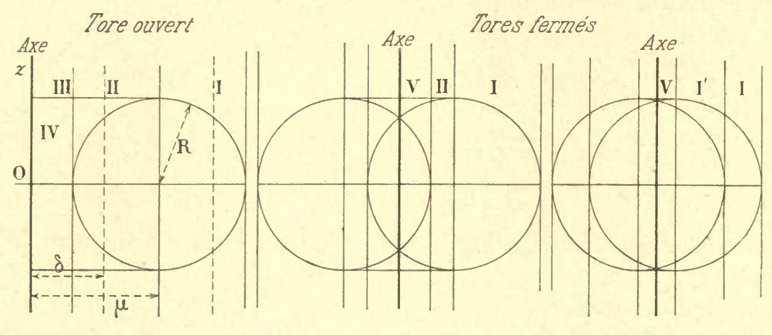


Fig. 258.

La figure 258 montre une coupe du tore (ouvert ou fermé) par un plan passant par l'axe de révolution et normal au plan d'intersection ; elle montre aussi la trace de ce dernier plan. La figure 259 repré-

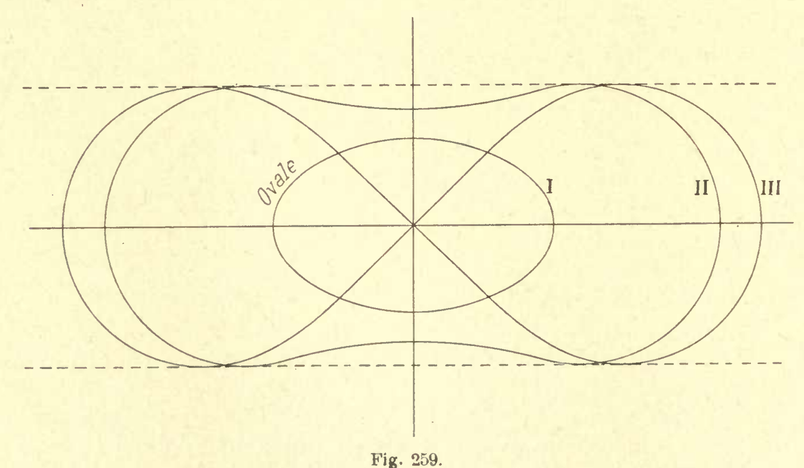


Fig. 259.

sente les formes de la courbe d'intersection pour le tore *ouvert* et les positions I, II, III du plan d'intersection.

Quand $\delta = \mu + \mathrm{R}$, la courbe se réduit à un point.

Quand δ est compris entre $\mu + \mathrm{R}$ et μ, on obtient un *ovale*.

Quand δ est compris entre μ et $\mu - \mathrm{R}$, la courbe possède quatre points d'inflexion.

Pour $\delta = \mu - \mathrm{R}$, l'équation (1) devient :

$$(x^2+z^2)^2=4\mu(\mu-\delta)\,x^2-4\mu\delta z^2.$$

On a une *lemniscate hyperbolique* qui possède un point double.

Enfin pour $\delta < \mu - R$, la courbe d'intersection se compose de deux ovales qui deviennent deux cercles pour $\delta = 0$.

La partie droite de la figure 258 permet au lecteur de terminer la discussion pour le *tore fermé*. Il existe alors soit un ovale unique, soit deux ovales placés l'un dans l'autre. Ils peuvent avoir tous deux la forme I (région I'); l'ovale extérieur peut avoir la forme II, et l'ovale intérieur la forme I (région V).

3°. — Ovales de Cassini, lemniscate de Bernoulli.

On obtient les *ovales de Cassini* quand la section est à une distance de l'axe de révolution égale au rayon R de la sphère génératrice : $R = \delta$. L'équation prend les formes équivalentes :

$$(x^2 + z^2 + \mu^2)^2 = 4\mu^2 (x^2 + R^2).$$

$$[(x - \mu)^2 + z^2] [x + \mu)^2 + z^2] = 4\mu^2 R^2. \qquad (2)$$

La seconde forme exprime que *la courbe est le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes* $x = \pm \mu$, *est constant et égal à* $2\mu R$.

Suivant les valeurs relatives de μ et de R, on obtient les diverses formes représentées dans la figure 259.

Si $\mu = 2R$, on obtient la *lemniscate de Bernoulli* (§ 239) :

$$(x^2 + z^2)^2 = 8R^2 (x^2 - z^2).$$

4°. — Sections inclinées passant par le centre de symétrie.

Sans diminuer la généralité du problème, nous pouvons mener le

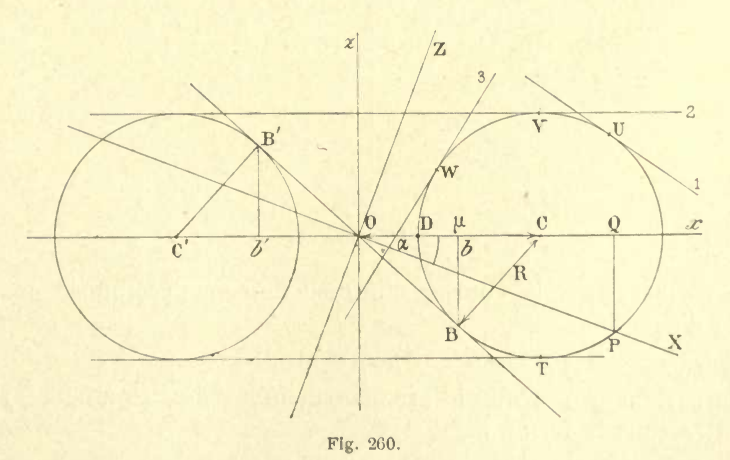


Fig. 260.

plan d'intersection par l'axe Oy ; les coordonnées y ne sont pas modifiées. Il existe entre les anciennes coordonnées x, z, et les nouvelles X,Z (fig. 260), les relations (§ 78) :

$$x = X \cos \alpha + Z \sin \alpha, \qquad z = X \sin \alpha - Z \cos \alpha.$$

Pour trouver l'équation de l'intersection, substituons à x et à z leurs valeurs en fonction de X et Z, puis posons $Z = 0$. Il vient :

$$(\sqrt{X^2 \cos^2 \alpha + y^2} - \mu)^2 + X^2 \sin^2 \alpha = R^2.$$

$$(X^2 + y^2)^2 + 2(\mu^2 - R^2 - 2\mu^2 \cos^2 \alpha) X^2 - 2(\mu^2 + R^2) y^2 + (\mu^2 - R^2)^2 = 0. \quad (3)$$

En particulier, prenons pour plan d'intersection le plan *bitangent* BOB'. L'angle α est déterminé par les relations :

$$\sin \alpha = R : \mu, \qquad \cos \alpha = \sqrt{\mu^2 - R^2} : \mu.$$

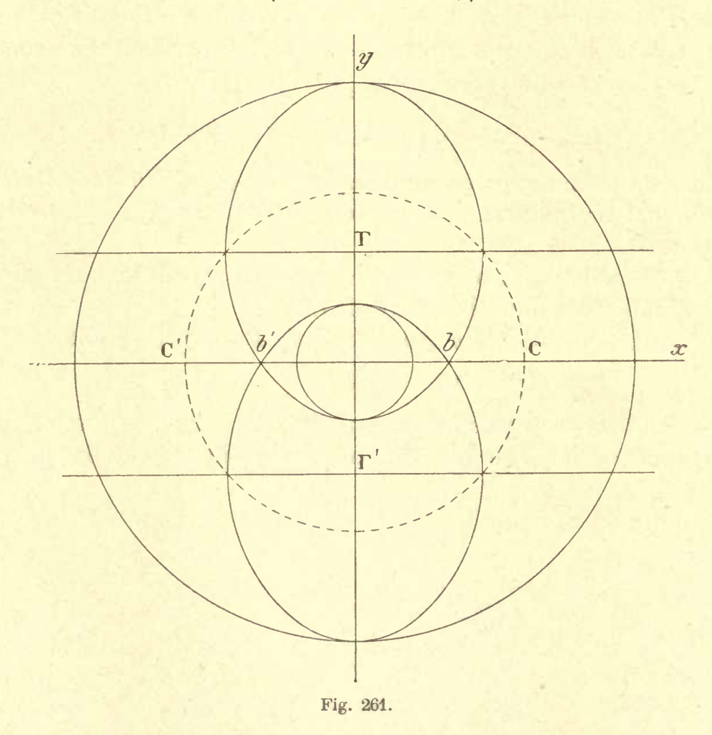


Fig. 261.

On vérifiera que la courbe d'intersection se décompose en deux cercles d'équations :

$$(y \pm R)^2 + X^2 = \mu^2.$$

Cela revient à dire que le premier membre de l'équation (3) peut se mettre sous la forme :

$$[(y + R)^2 + X^2 - \mu^2]\,[(y - R)^2 + X^2 - \mu^2].$$

L'intersection se compose donc de deux cercles égaux, dont la figure 261 montre les projections elliptiques sur le plan xOy. Leur rayon est égal à μ ; leurs centres Γ et Γ' sont sur Oy à une distance R du centre de symétrie.

5°. — REMARQUE SUR LES PLANS TANGENTS.

Le tore nous permet de préciser nos idées sur les plans tangents. Par définition (§ 322), le plan tangent à une surface en un point U renferme le point U et tous les points infiniment voisins. *Rien ne l'empêche de renfermer en outre une infinité de points à distance finie ;* en d'autres termes, il peut couper la surface suivant une courbe plus ou moins compliquée. C'est ce qui arrive pour les surfaces qui ne sont pas *convexes* en tous leurs points.

Nous reviendrons là-dessus quand nous parlerons des surfaces réglées et de la courbure des surfaces. Pour l'instant, bornons-nous à considérer le cas du tore. Puisque la surface est de révolution, les plans tangents sont normaux aux méridiens ; pour les points du méridien représenté dans la figure 260, ils sont normaux au plan du tableau.

Si le point de tangence U est sur le demi-cercle TUV, le plan tangent 1 ne renferme qu'un point de la surface et les points infiniment voisins.

Si le point de tangence est V, le plan tangent 2 est tangent au tore pour tous les points d'une circonférence de rayon μ (398, 4°).

Enfin si le point de tangence est en W sur le demi-cercle VWT,

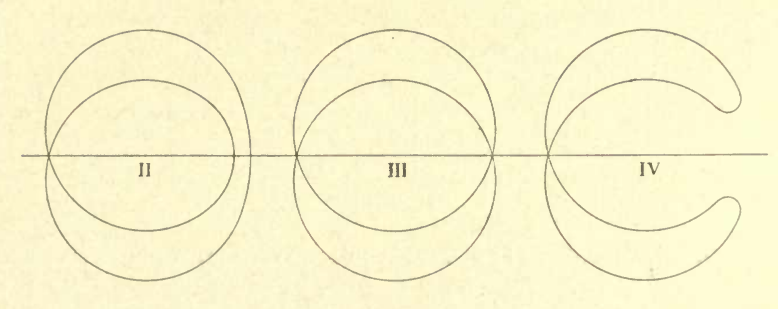


Fig. 262.

le plan tangent coupe la surface suivant une courbe qui possède toujours un point double en W. Elle se déforme pour aller de la circonférence unique I, à la double circonférence III étudiée au *4°*, enfin à la lemniscate V étudiée au *3°*.

Le lecteur réfléchira à la façon dont le passage s'effectue entre des formes en apparence aussi difficiles à ranger dans une série continue. La figure 262 montre les courbes II, III, IV, obtenues quand le plan tangent est de part et d'autre du plan bitangent. On passe de I à II par dédoublement, de IV à V par redressement.

Tous les plans tangents le long d'un parallèle enveloppent évidemment un cône de révolution d'axe Oz. Si le tore est *fermé*, le sommet du cône peut être sur la surface : c'est un *point conique* (voir plus haut, fig. 257).

400. Surfaces moulures.

1°. — Une surface de révolution dont l'axe est parallèle à Oz et passe par le point P du plan xOy de coordonnées α, β, a pour équation (§ 378) :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\Psi(z)\,; \qquad (1)$$

la fonction arbitraire Ψ définira la surface particulière à laquelle on a affaire (fig. 263).

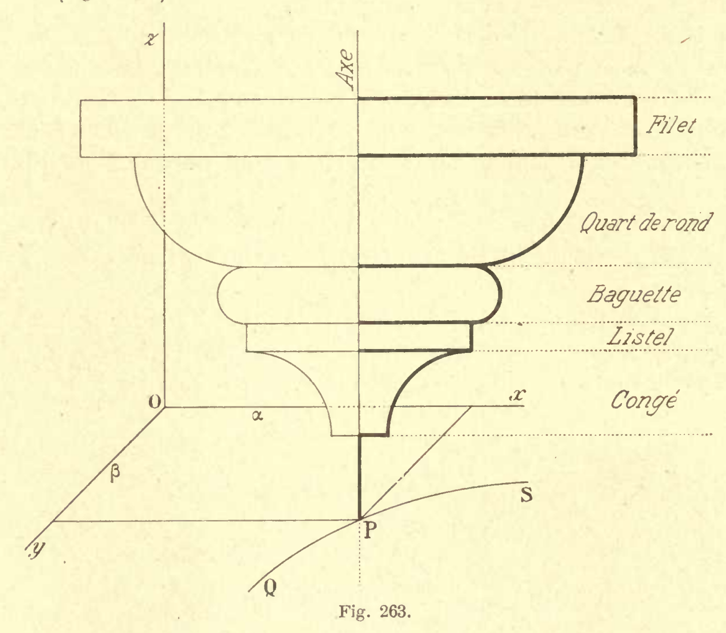


Fig. 263.

Éliminons α, β, entre (1) et les équations obtenues par dérivation :

$$2(x-\alpha)=\Psi' p, \qquad 2(y-\beta)=\Psi' q. \qquad (2)$$

Il vient :
$$(p^2+q^2)\Psi'^2=4\Psi,$$

que nous pouvons écrire, en changeant de fonction arbitraire :

$$1+p^2+q^2=\Psi_1(z). \qquad (3)$$

L'équation aux dérivées partielles (3) exprime cette propriété commune à toutes les surfaces (1) que l'inclinaison du plan tangent sur le plan xOy (§ 373) ne dépend que de la hauteur du point de tangence au-dessus de xOy. Nous généralisons ainsi les théorèmes du paragraphe antéprécédent.

2°. — Moulures. — Établissons une relation $\beta=f(\alpha)$, entre α et β. C'est dire que la surface de révolution se déplace en restant identique à elle-même, de manière que son axe engendre un cylindre parallèle à Oz et qu'un point de cet axe décrive une courbe QPS du plan xOy. *Les surfaces de révolution sont enveloppées par une surface qu'on appelle surface moulure ou plus simplement moulure.*

Deux *enveloppées* voisines se coupent suivant une courbe *caractéristique* définie par l'équation (1) et par l'équation :

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=0, \qquad (5)$$

obtenue en donnant à α, par suite à β, un petit accroissement. L'équation (5) représente un plan parallèle à Oz, passant par l'axe de révolution de l'enveloppe considérée, enfin normal au cylindre décrit par cet axe.

La caractéristique est donc une méridienne de la surface de révolution.

Pour obtenir l'équation de la moulure, il faut éliminer α entre (5) et (1), après avoir remplacé β par sa valeur $f(\alpha)$. La moulure satisfait évidemment à l'équation aux dérivées partielles (3), puisqu'étant l'enveloppe de surfaces (1), son plan tangent jouit des propriétés des plans tangents aux enveloppées.

3°. — MOULURE GÉNÉRALE. — Généralisons la définition. Supposons que l'axe de révolution roule sans glisser sur une courbe à double courbure, par suite engendre une surface développable (voir § 415). La surface de révolution, constante de forme et de grandeur, parcourt un espace dont la surface limite est une *moulure générale.*

Dans le cas précédemment traité, la surface développable est un cylindre ; la courbe à laquelle l'axe reste tangent, s'évanouit en un point à l'infini sur Oz.

On vérifiera que, dans le cas général, la caractéristique est encore une méridienne dont le plan est normal à la surface développable.

Comme cas simple, on supposera que l'axe de révolution est astreint à décrire un cône.

401. Ombres portées.

Soit une surface quelconque engendrée par le déplacement, avec ou sans déformation, d'une courbe quelconque dont les différents états seront les *génératrices* de la surface. L'ombre portée par la surface est l'enveloppe des ombres portées par les génératrices ; le cylindre (ou le cône) d'ombre dû à la surface est l'enveloppe des cylindres (ou des cônes) d'ombre dus à ses génératrices ; enfin le cône d'ombre d'une surface enveloppe est l'enveloppe des cônes d'ombre de ses enveloppées.

Ces propositions sont évidentes si l'on veut bien remarquer que deux courbes tangentes se projettent suivant deux courbes tangentes. Le lecteur les appliquera aux surfaces précédemment étudiées, en particulier au tore.

CHAPITRE XIX

COURBES A DOUBLE COURBURE. SURFACES DÉVELOPPABLES

Courbes à double courbure.

402. Éléments caractéristiques d'une courbe autour d'un point.

Avant de déterminer analytiquement la courbe, cherchons à nous représenter quels sont ses éléments caractéristiques au voisinage d'un point O (fig. 264).

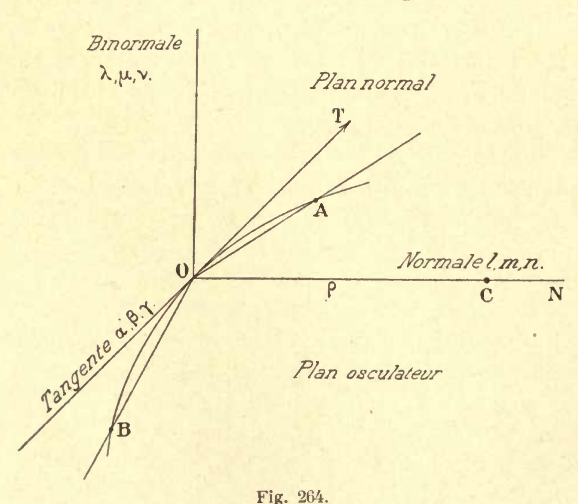


Fig. 264.

Imaginons un mobile se déplaçant sur la courbe. A chaque instant il possède une vitesse bien déterminée en grandeur (mais peu nous importe) *et en direction.* Supposons qu'il échappe à la contrainte de rester sur la courbe ; en vertu de son inertie, il décrira une droite OT, qui par définition est *la tangente à la courbe.*

Par le point O, menons un plan normal à la tangente : c'est le *plan normal à la courbe.* Toute droite menée dans ce plan par le point O est *normale à la courbe.*

La courbe est *gauche,* ce qui signifie qu'elle ne peut s'appliquer simultanément par tous ses points sur un plan. Mais deux sécantes voisines OA, OB, menées par le point O, déterminent un plan.

Quand les points A et B se rapprochent indéfiniment de O, ce plan tend vers une limite qui est le *plan osculateur*. Il contient évidemment la tangente, limite de l'une et l'autre sécantes.

Le plan osculateur et le plan normal se coupent suivant une droite, qu'on appelle *normale principale*. C'est la normale à l'élément de courbe que l'on peut considérer comme plane au voisinage du point O.

Cet élément jouit de toutes les propriétés d'une courbe plane, jusqu'aux infiniment petits du second ordre inclusivement. Il a donc un *cercle osculateur* qui est naturellement dans le plan osculateur, et *un centre de courbure* C sur la normale principale.

La distance $\overline{OC}$ est *le rayon de courbure*.

Enfin on est amené à considérer la droite perpendiculaire au plan osculateur, ou, si l'on veut, perpendiculaire à la fois à la tangente et à la normale principale ; on l'appelle *binormale*, pour rappeler cette définition.

Voici les symboles par lesquels nous représentons les cosinus directeurs (par rapport aux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz) des arêtes du trièdre trirectangle formé par la tangente, la normale principale et la binormale :

tangente : α, β, γ ;

normale principale : l, m, n ;

binormale : λ, μ, ν.

403. Tangente, plan normal.

1° — La distance de deux points voisins O et A de la courbe, points dont les coordonnées sont : x, y, z ; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, a pour limite la longueur de l'arc ds de courbe. Nous avons donc :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (1)$$

On déduit de là immédiatement l'expression des cosinus directeurs de la tangente :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}. \qquad (2)$$

Par suite, la tangente au point x, y, z, a pour équations :

$$\left(\xi - x\right) : \left(\frac{dx}{ds}\right) = (\eta - y) : \left(\frac{dy}{ds}\right) = (\zeta - z) : \left(\frac{dz}{ds}\right), \qquad (3)$$

où ξ, η, ζ, sont les coordonnées courantes. Les coordonnées x, y, z, sont supposées connues en fonction de l'arc s (323, *4°*) :

D'où pour le plan normal (§ 319) :

$$(\xi - x)\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (4)$$

2°. — Généralement la courbe est exprimée en fonction d'un paramètre variable t qui n'est pas l'arc s :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t). \tag{5}$$

Nous poserons pour abréger :

$$x' = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \qquad y' = \frac{d\chi}{dt} = \chi', \qquad z' = \frac{d\psi}{dt} = \psi'.$$

D'où : $\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2)\, dt^2.$

Pour que la variable t mesure l'arc de courbe, il faut qu'on ait :

$$\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2 = 1.$$

En utilisant les équations (5), les équations de la tangente prennent la forme :

$$(\xi - x) : \varphi' = (\eta - y) : \chi' = (\zeta - z) : \psi' ;$$

φ', χ', ψ', sont les valeurs de ces fonctions pour le point x, y, z, de contact. Le plan normal devient :

$$(\xi - x)\varphi' + (\eta - y)\chi' + (\zeta - z)\psi' = 0.$$

3°. — Comme toute autre courbe, la droite peut être exprimée en fonction d'un paramètre. Choisissons comme paramètre la distance s à l'un de ses points x, y, z; ses équations s'écrivent (§ 323, *4°*) :

$$\xi = x + s\alpha, \qquad \eta = y + s\beta, \qquad \zeta = z + s\gamma; \tag{6}$$

α, β, γ, sont ses cosinus directeurs. On a en effet :

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = s^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = s^2.$$

Quand les cosinus directeurs α, β, γ, de la tangente à une courbe sont connus, les équations (6) peuvent servir à la représenter.

Dans le cas général, les équations de la tangente ont la forme :

$$\xi = x + \tau\varphi', \qquad \eta = y + \tau\chi', \qquad \zeta = z + \tau\psi';$$

τ est le paramètre variable définissant les points de la tangente.

404. Plan osculateur, normale principale.

1°. — D'après les notations adoptées, le plan osculateur a pour équation :

$$\lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z) = 0, \tag{1}$$

puisqu'il passe par le point O et qu'il est perpendiculaire à la binormale.

Par définition, cette binormale est perpendiculaire à la tangente au point O et à la tangente au point voisin.

On a donc les deux relations :

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0,$$

$$\lambda(x' + x''\, dt) + \mu(y' + y''\, dt) + \nu(z' + z''\, dt) = 0.$$

La première exprime que la binormale est perpendiculaire à la droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à x', y', z',

c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente au point O. La seconde exprime qu'elle est perpendiculaire à la droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à :

$$x' + \frac{dx'}{dt}\,dt = x' + x''\,dt, \qquad y' + y''\,dt, \qquad z' + z''\,dt,$$

c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente au point A voisin.

On peut mettre les relations précédentes sous les formes :

$$\begin{aligned} \lambda x' + \mu y' + \nu z' &= 0, \\ \lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' &+ 0. \end{aligned} \tag{2}$$

D'où : $$\frac{\lambda}{y'z'' - z'y''} = \frac{\mu}{z'x'' - x'z''} = \frac{\nu}{x'y'' - y'x''} = \mathrm{R}. \tag{3}$$

$$1 : \mathrm{R}^2 = (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2.$$

2°. — L'expression de R se simplifie quand on prend l'arc s comme variable auxiliaire t, ce que nous ferons habituellement.

Nous pouvons d'abord écrire (§ 316, *1°*) :

$$1 : \mathrm{R}^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2,$$

quelle que soit la variable. Si cette variable est l'arc, nous avons :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1\,;$$

d'où en différentiant : $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$ (4)

On trouve alors : $1 : \rho^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2\,;$ (5)

$$\lambda = \rho(y'z'' - z'y''), \quad \mu = \rho(z'x'' - x'z''), \quad \nu = \rho(x'y'' - y'z''). \tag{6}$$

3°. — La normale principale est perpendiculaire à la fois à la binormale et à la tangente.

Ses cosinus directeurs satisfont donc aux relations (§ 28) :

$$\begin{aligned} l\alpha + m\beta + n\gamma &= 0, \\ l\lambda + m\mu + n\nu &= 0. \end{aligned}$$

$$l = \beta\nu - \gamma\mu, \qquad m = \gamma\lambda - \alpha\nu, \qquad n = \alpha\mu - \beta\lambda,$$

en vertu des relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Prenons comme variable auxiliaire l'arc s. On trouve aisément :

$$l = \rho x'', \qquad m = \rho y'', \qquad n = \rho z''. \tag{7}$$

405. Rayon de courbure. Centre de courbure.

1°. — Il s'agit de calculer le rayon du cercle osculateur. Nous utiliserons la méthode du § 92. Soit ε l'angle que font entre elles deux tangentes dont les points de contact sont distants de ds.

Le rayon de courbure ρ est défini par la relation :

$$\rho\varepsilon = ds. \tag{1}$$

Tout revient à calculer ε. Appliquons la formule qui donne le cosinus de deux directions dont on connaît les cosinus directeurs.

Ces cosinus sont x', y', z', pour un point de la courbe,

$$x' + x''ds + \xi ds^2, \qquad y' + y''ds + \eta ds^2, \qquad z' + z''ds + \zeta ds^2,$$

pour un point voisin. Nous introduisons les termes du second ordre ; ils disparaîtront dans le calcul. Appliquons la formule du § 316, *4°*. L'expression de $\sin^2 \varepsilon$ contient trois termes symétriques dont le premier est :

$$[y'(z' + z''ds + \zeta ds^2) - z'(y' + y''ds + \eta ds^2)]^2.$$

Il se réduit à : $\quad (y'z'' - z'y'')^2 ds^2 = \lambda^2 ds^2 : \rho^2$;

ρ est la quantité définie au paragraphe précédent : *nous allons montrer que c'est précisément le rayon de courbure.* En effet, il vient :

$$\sin^2 \varepsilon = \varepsilon^2 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\frac{ds^2}{\rho^2} = \frac{ds^2}{\rho^2}.$$

Ainsi la courbure a pour expression :

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}.$$

On pourrait partir de la formule :

$$\cos \varepsilon = 1 - \varepsilon^2 : 2 = x'(x' + x''ds + \xi ds^2) + \ldots,$$

en s'appuyant sur les relations (§ 255) :

$$\xi = x''' : 2, \qquad \eta = y''' : 2, \qquad \zeta = z''' : 2 ;$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

et par dérivation : $\quad (x''^2 + y''^2 + z''^2) + (x'x''' + y'y''' + z'z''') = 0.$

2°. — Déterminons les coordonnées du *centre de courbure*, centre du cercle osculateur qui est situé dans le plan osculateur et a ρ pour rayon. Elles sont déterminées sans ambiguïté par les formules :

$$a = x + l\rho = x + \rho^2 x'' = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$b = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \qquad c = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

406. Seconde courbure ; torsion.

Considérons les binormales en deux points voisins O et A distants de ds. Elles font un angle φ, qui mesure, si l'on veut, l'angle des plans osculateurs en ces points. Nous poserons :

$$\rho_1 \varphi = ds ;$$

nous définissons ainsi une longueur ρ_1 qui est le *rayon de seconde courbure* ou *de torsion ;* φ est *l'angle de torsion.* Pour trouver l'expression de ρ_1, nous n'avons pas à recommencer les calculs ;

ρ_1 s'exprime en fonction de λ, μ, ν, comme ρ en fonction de α, β, γ. D'où :

$$\frac{\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho_1} = \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}.$$

407. Résumé.

Reproduisons les formules quand on prend l'arc pour variable :

tangente : $\alpha = x'$, $\beta = y'$, $\gamma = z'$.

normale : $l = \rho x''$, $m = \rho y''$, $n = \rho z''$.

binormale :

$$\lambda = \rho\,(y'z'' - z'y''),$$
$$\mu = \rho\,(z'x'' - x'z''),$$
$$\nu = \rho\,(x'y'' - y'x'').$$

On pose : $x' = \dfrac{dx}{ds}$, $y' = \dfrac{dy}{ds}$, $z' = \dfrac{dz}{ds}$.

rayon de courbure ρ : $\dfrac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$.

rayon de torsion ρ_1 : $\dfrac{1}{\rho_1} = \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}$.

408. Indicatrice ou hodographe sphérique.

1°. — Un mobile se meut avec une vitesse *constante* que nous prendrons pour unité, sur une courbe gauche A,B,C,D,... A partir d'un point quelconque O, menons des vecteurs OA', OB', OC',... égaux et parallèles aux vecteurs représentatifs de la vitesse aux points correspondants A,B,C,... de la courbe gauche. Leurs extrémités forment une courbe à la surface d'une sphère (puisque les vecteurs ont une longueur constante) : on l'appelle *hodographe* ou *indicatrice sphérique*.

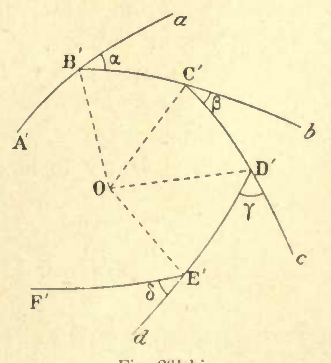


Fig. 264 *bis*.

2°. — Pour nous rendre compte de ses propriétés, supposons la courbe gauche remplacée par une suite de *petites courbes finies planes* AB, BC,... Les tangentes à leurs éléments sont respectivement dans un plan. Si par le point O, on mène des vecteurs égaux parallèles à ces tangentes, leurs extrémités décrivent sur la sphère de *petits arcs de grand cercle*, A'B', B'C',... L'angle α que fait l'arc A'B' avec l'arc B'C', est l'angle des plans des courbes planes AB, BC. Il est représenté sur la sphère en vraie grandeur, puisque la droite OB', rayon de la sphère, est parallèle à la tangente commune aux deux courbes AB, BC, au point B, par suite à l'intersection de leurs plans.

L'angle que fait l'arc A'B' avec l'arc D'E' est égal à la somme $\alpha + \beta + \gamma$ des angles extérieurs du polygone sphérique.

Supposons que le polygone se ferme. Cela signifie qu'aux extrémités de l'arc de courbe considéré (ici formé de courbes planes) les tangentes sont parallèles. Nous savons (§ 74, *4°*) que *la somme E des angles extérieurs d'un polygone sphérique fermé est égal à* 2π *moins l'aire S du polygone :* $E = 2\pi - S$.

Cette quantité mesure donc l'angle des plans des courbes extrêmes.

3°. — Revenons au cas général de la courbe gauche. Ce qui précède est applicable, à la condition de considérer les courbes planes comme de longueurs infiniment petites ; leurs plans deviennent les plans osculateurs à la courbe. Par ses changements de direction, l'hodographe sphérique représente donc la rotation du plan osculateur, ce que nous avons appelé *la torsion de la courbe.*

En particulier, supposons que la courbe sphérique se ferme, que les tangentes aux points A et P, extrémités de l'arc considéré de la courbe gauche, soient parallèles. La rotation totale du plan osculateur entre A et P ; autrement dit, *la torsion totale* de la courbe entre ces points est égale à $2\pi - S$, où S est l'aire limitée par la courbe sphérique.

4°. — Par exemple, imaginons une courbe dont les tangentes fassent un angle invariable ψ avec une droite. L'indicatrice est un cercle qui, fermé, limite une aire (§ 381) égale à $2\pi(1 - \cos\psi)$. La somme des angles extérieurs de ce cercle (somme des variations de direction de la tangente) est : $E = 2\pi - 2\pi(1 - \cos\psi) = 2\pi\cos\psi$.

Si la longueur de l'arc de courbe gauche compris entre les points dont les tangentes redeviennent parallèles est s, la torsion moyenne est : $E : s = 2\pi\cos\psi : s$.

Nous allons voir que la courbe dont il s'agit est une *hélice.*

Hélice. Hélicoïde développable.

409. Définition de l'hélice.

1°. — On appelle *hélice* la courbe gauche engendrée par l'enroulement, sur un cylindre à base circulaire, d'un triangle rectangle ABD dont un des côtés de l'angle droit DB s'enroule sur la circonférence de base. L'hypoténuse AD du triangle devient l'hélice.

Nous appellerons *pas* la quantité H dont l'hélice s'élève pour un tour ; on a évidemment, en appelant r le rayon de la base :

$$\overline{AB} = \overline{BD}\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad H = 2\pi r\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

S représentera l'arc d'hélice pour un tour ; on a :

$$\overline{BD} = \overline{AD}\cos\theta, \qquad S = 2\pi r : \cos\theta\,; \qquad 4\pi^2 r^2 + H^2 = S^2.$$

Une génératrice du cylindre coupe l'hélice en une infinité de points dont l'équidistance est égale au pas.

Les équations de l'hélice en fonction de l'arc sont :

$$x = r\cos\frac{2\pi s}{S}, \qquad y = r\sin\frac{2\pi s}{S}, \qquad z = \frac{H}{S}s.$$

2°. — La direction de la tangente est définie par les cosinus :

$$\alpha = x' = -\cos\theta\sin\frac{2\pi s}{S}, \quad \beta = y' = \cos\theta\cos\frac{2\pi s}{S}, \quad \gamma = z' = \sin\theta.$$

Donc la tangente fait avec Oz un angle qui est le complément de l'angle θ ; ce qui est évident sur la figure 265.

3°. — On a :

$$x'' = -\frac{2\pi\cos\theta}{S}\cos\frac{2\pi s}{S}, \qquad y'' = -\frac{2\pi\cos\theta}{S}\sin\frac{2\pi s}{S}, \qquad z'' = 0.$$

D'où :

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \frac{\cos^2\theta}{r}; \qquad \rho x'' = -\frac{x}{r}, \qquad \rho y'' = -\frac{y}{r}.$$

Le rayon de courbure est constant.

La normale principale AN *est la normale au cylindre au point* A. Elle rencontre normalement l'axe Oz.

Le rayon de courbure ρ est toujours supérieur à r. Comme il est constant, *le lieu des centres de courbure C de l'hélice est une autre hélice de même pas, enroulée sur un cylindre de rayon* $r' = \rho - r$.

Son inclinaison θ' est donnée par la formule :

$$H = 2\pi(\rho - r)\operatorname{tg}\theta'.$$

En particulier, si les spires sont très aplaties, θ est voisin de 0, ρ est voisin de r, $\rho - r$ voisin de 0, enfin θ' est voisin de $\pi : 2$. Le lieu des centres de courbure devient à la limite l'axe Oz lui-même.

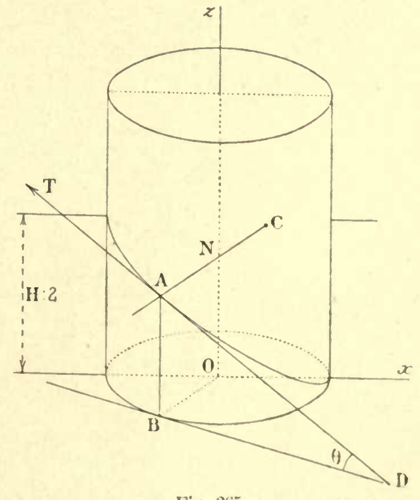


Fig. 265.

4°. — On trouve aisément :

$$\lambda = \frac{y\sin\theta}{r}, \qquad \mu = -\frac{x\sin\theta}{r}, \qquad \nu = \cos\theta;$$

$$\lambda' = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\cos\frac{2\pi s}{S}, \qquad \mu' = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\sin\frac{2\pi s}{S}, \qquad \nu' = 0.$$

D'où : $$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}.$$

Le rayon de torsion est donc constant. Il s'annule pour $\theta = 0$ (l'hélice s'aplatit sur son cercle de base), et pour $\theta = \pi : 2$ (l'hélice se réduit à une génératrice du cylindre).

5°. — Nous obtenons le même résultat à l'aide de l'indicatrice sphérique (§ 408) qui est un cercle. La torsion totale pour un tour d'hélice est $2\pi \cos\psi = 2\pi \sin\theta$. La longueur de l'arc correspondant est $S = 2\pi r : \cos\theta$. *La torsion moyenne* (qui est précisément égale à l'inverse de ρ_1) est donc :

$$\frac{1}{\rho_1} = 2\pi \sin\theta : \left(\frac{2\pi r}{\cos\theta}\right) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}.$$

6°. — Courbes loxodromiques.

Nous avons étudié plus haut (§ 389), sous le nom de *loxodromie,* une courbe qui coupe tous les méridiens de la sphère suivant le même angle. La définition se généralise : on appelle *courbes loxodromiques des surfaces de révolution* les courbes qui coupent les méridiens sous un angle constant. Les loxodromiques du cylindre et du cône sont des *hélices.* Nous étudions ici les loxodromiques du cylindre; nous dirons quelques mots des loxodromiques du cône au § 426.

410. Projections de l'hélice.

1°. — Projection orthogonale d'une hélice sur un plan parallèle a son axe.

Projetons sur le plan zOx, on a :

$$x = r\cos\frac{2\pi s}{S}, \qquad z = \frac{Hs}{S}; \qquad x = r\cos\frac{2\pi z}{H}.$$

La projection est une *sinusoïde.* Faisons tourner l'hélice autour de Oz. Comme l'hélice est superposable à elle-même, la projection reste une sinusoïde, mais qui se déplace en bloc parallèlement à Oz. La rotation dans le sens de Ox à OB, produit évidemment un mouvement vers le bas. On utilise cette proposition en Physique dans de nombreux appareils de démonstration. On la vérifiera en projetant sur un mur l'ombre d'une hélice construite avec du fil de fer.

2°. — Projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire a son axe.

Plaçons l'axe verticalement. La projection est une cycloïde raccourcie, si les projetantes sont plus horizontales que les tangentes à l'hélice ; une cycloïde proprement dite, si l'inclinaison est la même ; une cycloïde allongée, si les projetantes sont plus verticales.

Supposons les projetantes parallèles au plan xOz et faisant avec le plan xOy l'angle ψ. Dans la projection, y reste inaltéré. On verra immédiatement que l'x de la projection d'un point est égal à l'x du point projeté augmenté de $z \cotg\psi$.

L'équation de la projection est donc (comp. au § 100) :

$$x = r \cos \frac{2\pi s}{S} + \frac{H}{S} s \cotg \psi, \qquad y = r \sin \frac{2\pi s}{S}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de parfaire la démonstration. Il vérifiera le théorème en projetant sur un mur l'ombre d'une hélice construite en fil de fer et plus ou moins inclinée.

3°. — La proposition précédente rentre (en un sens) dans une proposition plus générale : *une courbe plane qui a un rebroussement, peut être considérée comme la projection d'une courbe gauche parallèlement à une de ses tangentes.* Si le plan osculateur a un contact ordinaire (du second ordre) avec la courbe, il la traverse : les deux bras du rebroussement qui est du premier ordre, sont de part et d'autre de la tangente ; c'est le cas pour l'hélice. Si le plan osculateur ne traverse pas la courbe (contact du troisième ordre), les deux bras du rebroussement sont du même côté de la tangente.

Le lecteur vérifiera la proposition avec un fil de fer tordu, en examinant son ombre portée sur un plan.

411. Hélice osculatrice.

L'hélice est donc la courbe gauche la plus simple, puisque ses rayons de courbure sont constants ; deux arcs quelconques de la courbe sont exactement superposables.

Sans entrer dans la théorie complète de l'*osculation* des courbes gauches, on conçoit possible de se représenter l'allure d'une courbe quelconque au voisinage d'un de ses points, au moyen d'une hélice convenablement choisie.

On donnera à la courbe et à l'hélice même tangente, même plan osculateur et même rayon de courbure ρ. On impose ainsi une relation entre le rayon r du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, et l'inclinaison θ : $\qquad r = \rho \cos^2 \theta. \qquad (1)$

On se servira de l'arbitraire qui reste pour identifier les torsions des deux courbes. Soit ρ_1 le rayon de torsion de la courbe gauche donnée. On a :

$$r = \rho_1 \sin \theta \cos \theta, \qquad \rho = \rho_1 \operatorname{tg} \theta, \qquad (2)$$

La seconde équation (2) (qui peut être toujours satisfaite, puisque la tangente varie de 0 à ∞) détermine θ ; l'équation (1) donne r.

Le contact entre la courbe et l'hélice est du second ordre. Mais il existe un commencement de contact du troisième ordre, puisque la torsion dépend des dérivées troisièmes des coordonnées par rapport à la variable, et qu'elle est la même pour les deux courbes.

412. Hélicoïde développable.

On appelle *hélicoïde développable* le lieu des tangentes d'une hélice.

Comme la question des surfaces réglées développables est capitale,

nous insisterons sur ce cas simple ; la théorie générale (§ 415) en deviendra parfaitement claire.

1°. — Déterminons le lieu des intersections des tangentes à l'hélice avec le plan yOz.

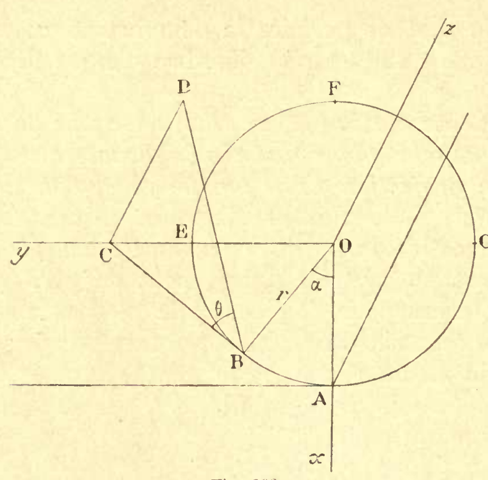


Fig. 266.

Supposons d'abord que le plan de l'angle CBD $= \theta$ (fig. 266) reste tangent au cylindre, le côté BC se maintenant dans le plan xOy. Déterminons le lieu du point D. On a :

$$\overline{OC} = y = \frac{r}{\sin \alpha},$$

$$\overline{BC} = y \cos \alpha = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\overline{CD} = \frac{r \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{H}{2\pi \operatorname{tg} \alpha}.$$

Conformément à ce que nous venons de supposer, la tangente à l'hélice fait bien un angle constant avec le plan xOy ; mais son point de tangence s'élève de H quand α croît de 2π.

D'où :
$$y = \frac{r}{\sin \alpha}, \qquad z = \frac{H}{2\pi}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \alpha\right).$$

Telle est la courbe qu'il faut construire (fig. 267). On a :

$$dy = -\frac{r \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha, \qquad dz = -\frac{H}{2\pi}\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha ; \qquad \frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \theta \cos \alpha.$$

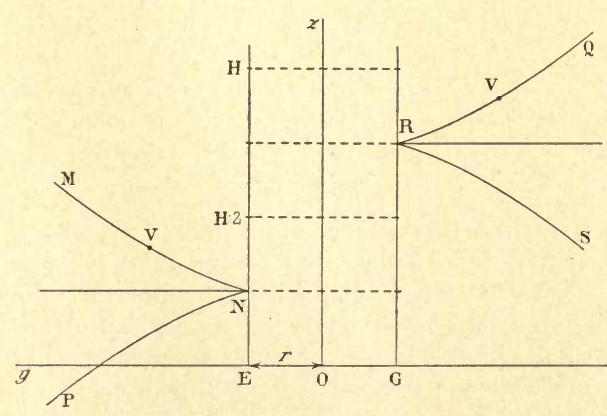


Fig. 267.

Donc la courbe cherchée MN est à l'infini pour $\alpha = 0$; elle aboutit pour $\alpha = \pi : 2$, au point N de coordonnées $y = r$, $z = H : 4$.

Sa pente, égale à $\operatorname{tg}\theta$ pour $\alpha=0$, diminue constamment et s'annule au point N. Elle possède en N une tangente horizontale.

2°. — Tant que $\alpha < \pi : 2$, le plan yOz est rencontré par la partie de la tangente qui est *au-dessus* du point de contact, pour $\alpha > \pi : 2$, il est rencontré par la partie qui est *au-dessous* du point de contact. Quand α varie de $\pi : 2$ à π, on obtient la courbe NP symétrique de MN. La courbe entière MNP possède donc en N un point de rebroussement : sa tangente de rebroussement est horizontale.

Il est évident que la même courbe est tracée dans tous les plans passant par Oz. On obtiendra donc l'hélicoïde développable par une rotation du plan de la courbe MNP autour de Oz et par un glissement simultané le long de Oz, de manière que le point N décrive l'hélice. Autrement dit, l'hélicoïde développable est une vis de pas H dont la courbe MNP est le profil.

Tout point V de la courbe engendre une hélice de pas H, qui se trouve tout entière sur l'hélicoïde.

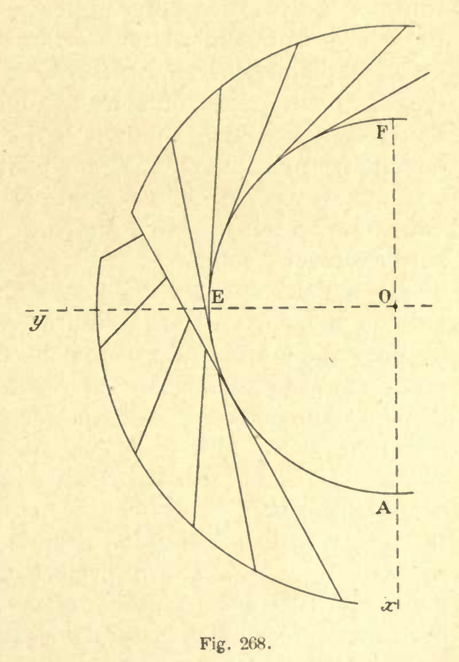


Fig. 268.

3°. — On peut considérer l'hélicoïde développable (c'est le cas de toutes les surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche, surfaces dites *réglées développables*) comme formée de deux nappes tangentes entre elles suivant l'hélice qui est l'*arête de rebroussement*. L'une des nappes contient toutes les portions des tangentes qui se trouvent *avant* les points de contact; l'autre, les portions des tangentes qui sont *après* les points de contact. La figure 268 montre la disposition des deux nappes au moyen de la projection sur xOy. L'intersection de la surface par un plan normal au tableau et passant par Oy, est précisément la courbe MNP de la figure 267.

413. Hélice générale. Surfaces d'égale pente, cônes d'éboulis, remblais.

1°. — Reprenons la figure 265, mais posons que le cylindre sur lequel nous opérons n'est plus circulaire; il coupe le plan xOy suivant une courbe quelconque C. Nous pouvons encore enrouler dessus un triangle rectangle ABD; nous traçons ainsi sur le cylindre

une courbe qui est une *hélice générale*. Elle conserve de l'*hélice* la propriété que sa tangente fait avec le plan xOy un angle invariable.

2°. — La surface développable engendrée par les tangentes à cette hélice est *d'égale pente*. Sa ligne de plus grande pente a une inclinaison invariable. Ses plans tangents, déterminés par deux génératrices voisines, rencontrent sous un angle constant le plan xOy qui est supposé horizontal. Si par un point quelconque on mène des droites parallèles aux tangentes, on obtient un cône (appelé *directeur*) de révolution autour d'une verticale; le résultat est évidemment le même pour l'*hélicoïde développable*.

3°. — Les surfaces d'égale pente se présentent chaque fois qu'une route doit avoir ses talus réglés à une pente uniforme. Les éboulis prenant spontanément une pente très sensiblement invariable, ce qu'on appelle généralement *cône d'éboulis* est en réalité une surface d'égale pente. Un cône de révolution autour d'un axe vertical, et dont on astreint le sommet à décrire une courbe gauche, a pour enveloppe une surface d'égale pente. Le plan tangent à la surface enveloppe est le même tout le long d'une génératrice : nous verrons plus loin (§ 416) que cette condition suffit à caractériser une surface développable.

4°. — Voici une propriété remarquable des surfaces d'égale pente : l'aire d'une portion finie, limitée par une courbe quelconque, est à sa projection horizontale dans un rapport constant, égal à l'inverse du cosinus de l'inclinaison. La quadrature d'une surface d'égale pente ne dépend donc que de l'évaluation de l'aire limitée par une courbe plane.

414. Représentation topographique des surfaces d'égale pente.

1°. — Les lignes de plus grande pente des surfaces d'égale pente sont des droites. Leurs projections sur le plan horizontal sont naturellement des droites; elles sont tangentes à la projection horizontale de l'hélice générale, c'est-à-dire à la courbe C, intersection du cylindre avec xOy (voir le *1°* du paragraphe précédent). Les projections des lignes de niveau sont donc les développantes de la courbe C.

2°. — En particulier, les lignes de niveau de l'hélicoïde développable sont des développantes de cercle, ce qu'il est facile de prouver directement.

Surfaces développables.

415. Manière d'effectuer le développement.

1°. — Les surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche sont dites *surfaces développables*, parce qu'on peut les *développer*, c'est-à-dire en amener les éléments dans un plan *sans déchi-*

rure ni duplicature. Nous développerons successivement chacune des nappes de la surface (§ 412, *3°*).

Soit *abcde l'arête de rebroussement,* c'est-à-dire la courbe gauche dont les tangentes constituent la surface. Décomposons-la en éléments *ab*, *bc*, ... dont les prolongements *du même côté* sont les droites G_1, G_2, ... Nous déterminons ainsi les éléments E_1, E_2, ... d'un polyèdre qui remplacera la surface (fig. 269).

Pour effectuer le développement, appliquons l'élément E_1 sur le plan. Faisons tourner toute la surface, *sauf* E_1, autour de G_2; amenons l'élément E_2 dans le plan. Faisons tourner toute la surface, *sauf* E_1 *et* E_2, autour de G_3; amenons l'élément E_3 dans le plan. Et ainsi de suite. L'opération a lieu *sans déchirure ni duplicature,* parce que les tangentes infiniment voisines se coupent, autrement dit, parce qu'elles *enveloppent* une courbe. A cette condition seulement la surface peut être remplacée par un *polyèdre développable.*

2°. — Une courbe tracée sur une surface développable et sa conjuguée sur le plan coupent chaque génératrice sous le même angle. Car la rotation autour de cette génératrice, rotation nécessaire au développement, ne modifie pas cet angle.

D'où résulte que l'angle compris entre les tangentes de deux lignes qui se coupent, conserve également sa grandeur, parce qu'il est la somme ou la différence d'angles qui ne sont pas modifiés.

3°. — Le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée plane est égal au cosinus de l'angle ω *que fait le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent à la surface.*

Je ne démontre pas cette proposition : en voici deux cas particuliers utiles.

4°. — Quand une courbe tracée sur une surface développable est tangente à une génératrice, son rayon de courbure au point de contact n'est pas altéré par le développement. En effet, des deux tangentes infiniment voisines qui servent à définir le rayon de courbure, l'une coïncide avec la génératrice, l'autre tourne autour de cette génératrice; leur angle n'est pas altéré par le développement. C'est une application de la proposition précédente : l'angle ω est infiniment petit, le plan osculateur est tangent à la surface.

D'où le corollaire : *dans le développement, l'arête de rebroussement conserve sa courbure en tous ses points.* En effet, elle est en tous ses points tangente aux génératrices.

5°. — Par exemple, nous savons que le rayon de courbure d'une hélice est constant et égal à :

$$\rho = r : \cos^2 \theta.$$

Nous concluons que, dans le développement d'un hélicoïde développable, l'hélice (arête de rebroussement) se transforme en une circon-

férence de rayon ρ. Comme la longueur d'une spire est $2\pi r : \cos\theta$, l'angle ψ (en radians) occupé sur le cercle de rayon ρ par la transformée d'une spire est :

$$\psi = 2\pi r : \rho\cos\theta = 2\pi\cos\theta.$$

6°. — Un plan, normal en M *à la surface développable, coupe cette surface suivant une courbe dont la conjuguée plane possède un point d'inflexion au conjugué du point* M (fig. 269).

Pour s'en assurer, que le lecteur suppose l'élément E_1 au-dessous du plan du tableau pris pour plan de l'élément E_2 auquel le plan P est normal.

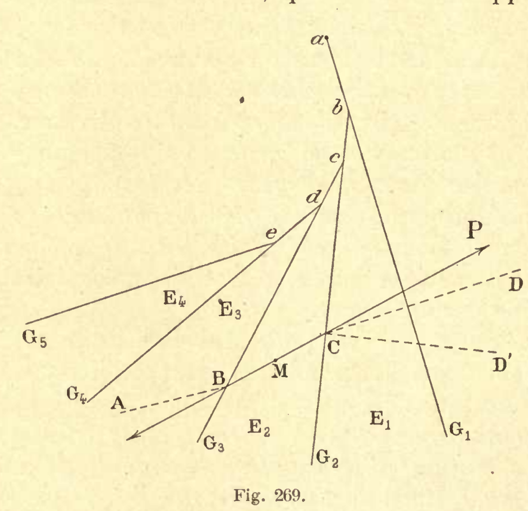


Fig. 269.

Si E_1 faisait avec E_2 un angle droit, l'intersection de P et de E_1 serait normale à G_2; son rabattement sur le tableau serait CD'. Si l'angle E_1E_2 était nul, le rabattement de l'intersection serait la trace même du plan P. Par suite, quel que soit l'angle de E_1 avec E_2, le rabattement *nécessairement compris entre les limites qui viennent d'être déterminées* sera dans l'angle obtus de la trace de P avec G_2.

Même raisonnement pour G_3. D'où résulte que la courbe ABCD passe de part et d'autre de sa tangente au point M *qui est un point d'inflexion.*

C'est un cas particulier de la proposition *3°*; l'angle ω est droit.

Le raisonnement tombe en défaut quand P est à la fois normal à la surface en M et à la génératrice qui passe par M. La conjuguée de l'intersection dans le plan présente avec sa tangente un contact du troisième ordre.

416. Équation aux dérivées partielles des surfaces développables.

1°. — D'après la manière dont nous réalisons les surfaces développables, le plan tangent est nécessairement le même tout le long d'une génératrice : en effet, deux génératrices infiniment voisines se coupant, elles déterminent un plan qui devient tangent à la surface lorsqu'à la limite elles se confondent.

Soit : $$z - Z = p(x - X) + q(y - Y),$$

l'équation du plan tangent ; X, Y, Z, sont les coordonnées courantes ;

x, y, z, sont les coordonnées du point de tangence. Il résulte de ce que nous venons de rappeler que les coefficients :

$$p, \qquad q, \qquad z - px - qy,$$

sont constants tout le long d'une génératrice.

Quittons cette génératrice sans quitter la surface. Que la surface soit développable ou non, si p et q sont constants, $z - px - qy$ est constant ; car la variation de cette quantité est alors :

$$dz - pdx - qdy = dz - \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = dz - dz = 0.$$

Revenons aux surfaces développables. Montrons qu'alors p et q ne peuvent généralement pas varier l'un sans l'autre. Supposons, en effet, q variable et p constant. La trace du plan tangent sur $x\mathrm{O}z$ est :

$$\mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} - p\mathrm{X} = z - px - qy ;$$

elle se déplace parallèlement à elle-même ; la surface est donc nécessairement un cylindre, puisque c'est l'enveloppe de plans parallèles à une droite fixe (§ 418). Même conclusion si p est variable et q constant. Donc, *pour les surfaces développables et en dehors du cylindre*, p et q ne peuvent pas varier l'un sans l'autre ; conséquemment $z - px - qy$, ne peut varier que si p et q varient.

En définitive, on a :

$$q = \mathrm{F}(p), \qquad z - px - qy = \mathrm{F}_1(p) = \mathrm{F}_2(q).$$

Telles sont les relations qui définissent une surface développable *quelconque*.

2°. — Dans la relation : $\quad q = \mathrm{F}(p), \qquad\qquad (1)$

intervient une fonction arbitraire F. Choisir cette fonction, c'est choisir la surface développable. Nous pouvons trouver une relation équivalente à la condition (1) et d'où la fonction arbitraire a disparu.

Dérivons (1) successivement par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s = \frac{d\mathrm{F}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\mathrm{F}}{dp} r,$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = t = \frac{d\mathrm{F}}{dp}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{d\mathrm{F}}{dp} s.$$

Des deux relations :

$$\frac{d\mathrm{F}}{dp} s = t, \qquad s = \frac{d\mathrm{F}}{dp} r,$$

on tire :

$$s^2 - rt = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \qquad (2)$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui s'applique à toutes les surfaces développables. Nous verrons plus loin (§ 461) ce qu'elle exprime.

417. Autre manière de définir les surfaces développables. Cônes directeurs.

Reprenons la définition des surfaces développables.

1°. — En général, les trois constantes qui entrent dans l'équation du plan tangent : $p, \quad q, \quad z - px - qy,$ dépendent de deux variables (x, y, par exemple). Étudions ce qui arrive dans le cas où elles ne sont fonction que d'une variable. Nous avons alors un faisceau de plans :

$$Z = pX + qY + c,$$

dont les constantes p, q, c, sont fonction d'un paramètre : *ils enveloppent une surface que nous allons montrer développable.*

Il est d'abord évident que l'intersection de deux plans voisins du faisceau, *la caractéristique* (§ 397), est une droite. Donc la surface enveloppe des positions du plan mobile est *réglée* : elle peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut.

Trois positions infiniment voisines 1, 2, 3, du plan mobile déterminent deux caractéristiques qui appartiennent toutes deux au plan 2; par conséquent, elles se coupent. On peut donc considérer les caractéristiques comme tangentes à une courbe gauche.

En général, une enveloppée touche l'enveloppe tout le long de la caractéristique correspondante : donc la surface enveloppe que nous étudions, est tangente au même plan tout le long de chacune de ses génératrices rectilignes. Elle possède donc tous les caractères propres aux surfaces développables précédemment définies.

2°. — Cones directeurs.

Une surface réglée quelconque est engendrée par une droite qui se meut.

On appelle *cône directeur* d'une surface réglée, en particulier d'une surface développable, le cône obtenu en menant par un point S des parallèles à toutes les génératrices rectilignes; nous avons déjà vu que les cônes directeurs de l'hélicoïde développable et des surfaces d'égale pente sont de révolution (§ 413, *2°*).

Le plan tangent à une surface développable le long d'une génératrice est évidemment parallèle au plan tangent au cône directeur qui correspond à la même génératrice transportée parallèlement à elle-même de manière à passer par le point S.

En général, les plans tangents d'une surface, transportés parallèlement à eux-mêmes de manière à passer par un point S, ne sont pas tangents à un cône. En d'autres termes, les normales à ces plans menées par le point S ne forment pas un cône ; elles remplissent complètement l'espace entier ou une portion de l'espace. Cela vient de ce que les deux constantes p, q, qui entrent dans l'équation du plan tangent (nous prenons le point S pour origine des coordonnées) :

$$Z = pX + qY,$$

ne sont pas fonction d'un seul paramètre. Lorsqu'ils le sont, la surface est développable; les plans parallèles aux plans tangents enveloppent un cône qui est *directeur* pour cette surface. C'est dire qu'il contient les parallèles aux génératrices rectilignes menées par son sommet.

418. Cylindres.

1°. — La plus simple des surfaces développables est le *cylindre*, surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une courbe appelée *directrice*. Les génératrices passent toutes par un point à l'infini; il est loisible de les considérer comme tangentes à une courbe gauche évanouissante qui est ce point.

Les équations des génératrices ont la forme :

$$x = lz + P(u), \qquad y = mz + Q(u); \tag{1}$$

l et m sont des constantes, P et Q sont des fonctions du paramètre variable u. La droite a une direction invariable : elle s'appuie sur la courbe tracée dans le plan xOy :

$$z = 0, \qquad x = P(u), \qquad y = Q(u).$$

Éliminons u entre les équations (1); on a l'équation générale du cylindre *en quantités finies :*

$$x - lz = f(y - mz). \tag{2}$$

2°. — Cherchons l'équation *aux dérivées partielles* de la surface cylindrique, c'est-à-dire une relation s'appliquant indifféremment à tous les cylindres.

La fonction f peut être considérée comme dépendant de la variable auxiliaire $t = y - mz$, qui est fonction de x et de y, puisque z est fonction de ces variables. On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = -m\frac{\partial z}{\partial x}\frac{df}{dt} = -m\frac{\partial z}{\partial x}f',$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \left(1 - m\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{df}{dt} = \left(1 - m\frac{\partial z}{\partial y}\right)f',$$

en écrivant $df : dt = f'$. Bien entendu, une fois la dérivation totale effectuée par rapport à t, nous remplacerons la variable auxiliaire par $y - mz$.

Ceci posé, dérivons (2) successivement par rapport à x et à y :

$$1 - l\frac{\partial z}{\partial x} = -m\frac{\partial z}{\partial x}f', \qquad -l\frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - m\frac{\partial z}{\partial y}\right)f'. \tag{3}$$

Divisons membre à membre les équations (3) ; il reste :

$$1 = l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad 1 = lp + mq. \tag{4}$$

3°. — L'équation (4) exprime une propriété absolument générale des cylindres, indépendante des conditions particulières de direction des génératrices et du choix de la directrice; *à savoir que le plan tangent est parallèle à une direction invariable.*

En effet, le plan tangent a pour équation :

$$z - Z = p(x - X) + q(y - Y).$$

Le plan parallèle mené par l'origine est :

$$Z = pX + qY.$$

Il passe par la droite invariable :

$$X = lZ, \qquad Y = mZ,$$

si l'on a identiquement :

$$1 = pl + qm.$$

4°. — Réciproquement, pour savoir si une surface est cylindrique, on cherche à mettre son équation sous la forme (4). On exprime que *la somme des dérivées partielles de z par rapport à x et à y, multipliées par des constantes, est une constante.*

Pour éviter certaines difficultés, prenons la droite sous la forme plus générale :

$$\frac{x - P}{l} = \frac{y - Q}{m} = \frac{z - R}{n},$$

et soit $F(x, y, z) = 0$, l'équation de la surface.

On a identiquement :

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

L'équation (4) prend la forme :

$$l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} + n\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{4'}$$

Soit, par exemple, la surface (§ 337, *2°*) :

$$x^2 + 2az = 0.$$

On a : $$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2a.$$

L'équation à satisfaire identiquement est :

$$lx + na = 0; \qquad \text{d'où :} \qquad l = n = 0.$$

La droite à laquelle toutes les génératrices sont parallèles est Oy, dont les équations sont $x = 0$, $z = 0$.

5°. — L'équation (4) est un cas particulier de l'équation (2) du § 416. Dérivons-la successivement par rapport à x et à y, en remarquant que l et m sont des constantes :

$$l\frac{\partial p}{\partial x} + m\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad l\frac{\partial p}{\partial y} + m\frac{\partial q}{\partial y} = 0;$$

$$lr + ms = 0, \qquad ls + mt = 0; \qquad s^2 - rt = 0.$$

Le cylindre est une surface développable qui n'a qu'une nappe à distance finie.

419. Développement du cylindre.

1°. — Pour développer un cylindre quelconque, nous le fendrons suivant une génératrice et nous le déroulerons sur le plan. Cette opération est bien un cas particulier de la méthode générale du § 415 : l'arête de rebroussement évanouissante est un point à l'infini; les éléments E de la surface développable sont des bandes comprises entre deux génératrices voisines. Ceci, quel que soit le cylindre.

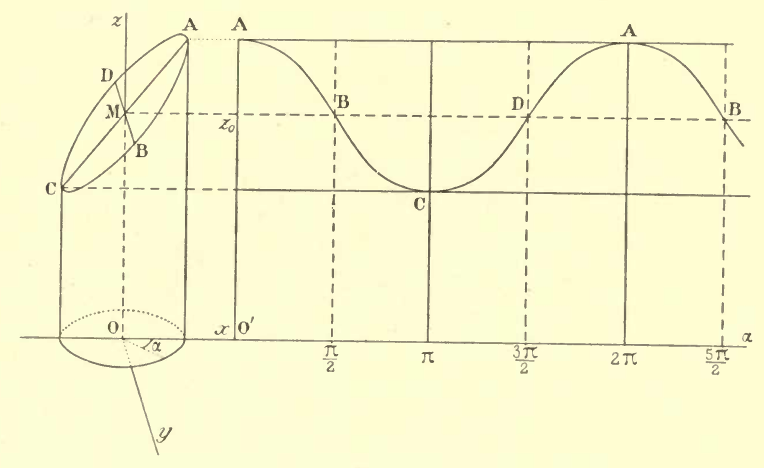


Fig. 270.

2°. — Comme exemple, soit à développer une *section plane* d'un cylindre droit à base circulaire (fig. 270).

Déterminons le développement par le calcul.

Il faut couper le cylindre :

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \text{par le plan :} \qquad z = z_0 + ax.$$

Nous avons :

$$x = r \cos \alpha\,; \qquad z = z_0 + ar \cos \alpha.$$

Le développement est une *sinusoïde*. La courbe a des points d'inflexion qui correspondent aux points du cylindre (projetés *orthogonalement* sur le point M du plan zOx) où le plan sécant (projeté en AC) coupe normalement le cylindre (§ 415, *6°*).

Remarque.

On peut supposer le cylindre formé d'une infinité d'épaisseurs de papier infiniment mince. Le développement s'étend en une courbe périodique indéfinie; la période est la longueur de la circonférence de base, soit $2\pi r$.

420. Cônes.

1°. — On appelle *cône* la surface engendrée par une droite qui passe par un point fixe S et s'appuie sur une courbe appelée *directrice.*

Le cylindre est donc un cas particulier du cône : le *sommet* S est à l'infini.

Soit a, b, c, les coordonnées du sommet ; les équations d'une génératrice sont :

$$(x-a)=\mathrm{P}(u).(z-c), \qquad y-b=\mathrm{Q}(u).(z-c); \qquad (1)$$

u est un paramètre variable.

2°. — Cherchons l'équation *aux dérivées partielles* des surfaces coniques. Éliminons u entre les équations (1).

On a l'équation générale du cône *en quantités finies :*

$$\frac{x-a}{z-c}=f\left(\frac{y-b}{z-c}\right); \qquad (2)$$

a, b, c, sont des constantes ; f est une fonction de x et de y, qu'on peut aussi considérer comme fonction de la variable auxiliaire :

$$t=(y-b):(z-c).$$

On a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{df}{dt}\frac{y-b}{(z-c)^2}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{df}{dt}\left[\frac{1}{z-c}-\frac{y-b}{(z-c)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Ceci posé, dérivons successivement (2) par rapport à x et à y, multiplions par $(z-c)^2$:

$$(z-c)-(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}=-(y-b)f'\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$-(x-a)\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left[(z-c)-(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Éliminons f' entre ces équations. Il reste :

$$z-c=(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}. \qquad (4)$$

3°. — La propriété indépendante du cône considéré qu'exprime l'équation (4), est que *le plan tangent passe par un point fixe.* L'équation de ce plan est en effet :

$$z-\mathrm{Z}=p(x-\mathrm{X})+q(y-\mathrm{Y}).$$

Écrivons que cette équation est *identiquement* satisfaite par :

$$\mathrm{X}=a, \qquad \mathrm{Y}=b, \qquad \mathrm{Z}=c;$$

nous retrouvons l'équation (4).

4°. — L'équation (4) est un cas particulier de l'équation (2) du § 416.

Dérivons successivement par rapport à x et par rapport à y, en observant que a, b, c, sont des constantes ; il vient les conditions :

$$(x-a)r+(y-b)s=0, \qquad (x-a)s+(y-b)t=0\,;$$

d'où :

$$s^2-rt=0.$$

Les deux nappes de la surface développable qu'est le cône, sont les deux cônes opposés par le sommet.

421. Étude particulière du cône du second degré.

1°. — Le cône du second degré est engendré par une droite qui passe par un point fixe S et s'appuie sur une conique ; le point S est hors du plan de la conique. Si la conique est une ellipse ou une parabole, elle est tout entière sur une des nappes du cône ; si c'est une hyperbole, elle est moitié sur une nappe, moitié sur l'autre.

2°. — Plaçons la conique (supposée centrée) dans le plan xOy ; donnons-lui l'origine pour centre, les axes de coordonnées pour axes. Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Soit x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point S.

Écrivons que la droite :

$$x-x_0=l(z-z_0), \qquad y-y_0=m(z-z_0), \qquad (2)$$

qui passe par S, s'appuie sur la conique. Faisons $z=0$, substituons dans (1) les valeurs de x et de y tirées de (2) ; nous trouvons entre l et m la condition :

$$\frac{(x_0-lz_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y_0-mz_0)^2}{b^2}=1.$$

Remplaçons l et m par leurs valeurs (2) ; l'équation du cône est :

$$\frac{z_0^2}{a^2}\left(\frac{x_0}{z_0}-\frac{x-x_0}{z-z_0}\right)^2\pm\frac{z_0^2}{b^2}\left(\frac{y_0}{z_0}-\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)^2=1,$$

équation du second degré qui est de la forme (2) du paragraphe précédent.

3°. — Quand la conique est une parabole, on procède de même. Il est évident que le cône a l'une de ses génératrices parallèle au plan de la parabole (§ 104).

4°. — En définitive, quelle que soit la conique, nous trouvons pour le cône une équation du second degré ; c'est donc une quadrique. Nous savons (§ 336) que parmi les quadriques, les cônes (qui sont nécessairement des quadriques centrées) peuvent se ramener à la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}. \qquad (3)$$

Cherchons les sections cycliques de cette surface dont le sommet

est à l'origine. Utilisons la méthode du § 340. La sphère que nous emploierons a un rayon nul :

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=0. \tag{4}$$

Retranchons (4) de (3) ; il vient :

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)=z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right),$$

équation satisfaite si l'on pose :

$$r=a, \qquad y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}=\pm z\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}, \tag{5}$$

Les deux plans (5) et tous les plans parallèles coupent le cône suivant des cercles.

Donc tout cône du second degré peut être considéré de deux manières différentes comme *cône oblique à base circulaire.*

Si le cône est de révolution autour de Oz $(a=b)$, ses sections cycliques (5) sont confondues entre elles et avec le plan xOy $(z=0)$: *on a le cône droit à base circulaire.*

422. Développement du cône.

1°. — Pour développer un cône quelconque, nous le fendons suivant une génératrice ; l'arête de rebroussement est ici évanouissante ; elle se réduit au sommet. Sa conjuguée dans le développement est un point.

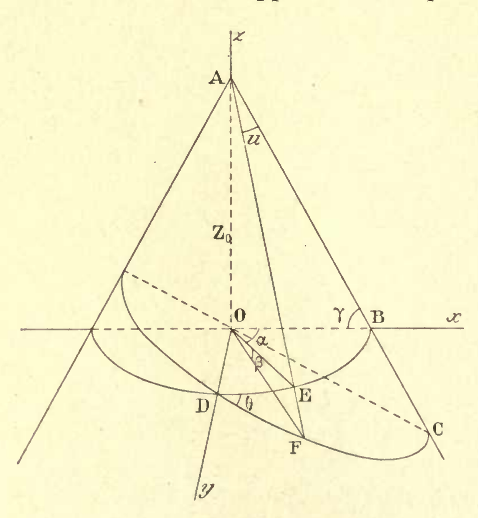


Fig. 271.

2°. — Comme exemple, développons une section plane CFD d'un cône droit à base circulaire, section inclinée de l'angle θ sur la section droite. Supposons qu'elle ne touche qu'une des nappes de la surface développable : la section est une ellipse ; cherchons sa conjuguée dans le plan (fig. 271).

Menons par l'axe un plan AOE défini par l'angle α. Soit u l'angle correspondant des génératrices AB, AE, *angle mesuré sur le cône.*

Posons $\overline{AB}=\rho_0$, $\overline{OB}=r_0$. On a évidemment :

$$\rho_0\, u=r_0\, \alpha.$$

Calculons : $$\overline{EF}=\rho-\rho_0.$$

Dans le triangle sphérique formé par les droites OE, OD, OF, triangle rectangle en E, on a (§ 73, quatrième formule) :

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\theta \, . \cos\alpha .$$

Dans le triangle OEF, on a :

$$\frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{OE}}} = \frac{\rho - \rho_0}{r_0} = \frac{\sin\beta}{\sin(\gamma - \beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\theta\cos\alpha}{\sin\gamma - \operatorname{tg}\theta\cos\alpha . \cos\gamma} .$$

Dans le triangle AOB, on a :

$$\cos\gamma = r_0 : \rho_0, \qquad \sin\gamma = Z_0 : \rho_0 .$$

Substituant dans la formule précédente, il vient :

$$\rho = \frac{\rho_0 Z_0}{Z_0 - r_0 \operatorname{tg}\theta . \cos\alpha} = \rho_0 Z_0 : \left[Z_0 - r_0 \operatorname{tg}\theta . \cos\frac{\rho_0 u}{r_0} \right] . \quad (1)$$

Telle est l'équation en coordonnées polaires ρ et u de la conjuguée de la section plane.

3°. — Comme nous pouvons supposer le cône formé d'une infinité d'épaisseurs de papier infiniment mince, la courbe obtenue se répète un nombre infini de fois. Elle reste comprise entre deux cercles de rayon : $\rho_0 Z_0 : [Z_0 \pm r_0 \operatorname{tg}\theta]$. Chaque période est limitée par deux droites, passant par l'origine des coordonnées et faisant entre elles l'angle :

$$U = 2\pi r_0 : \rho_0 .$$

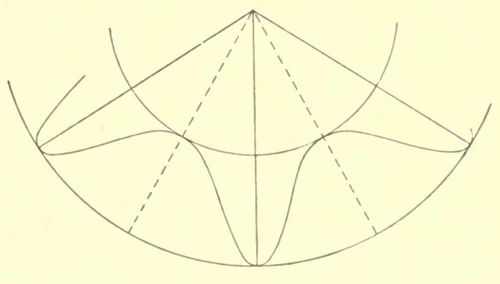


Fig. 272.

Pour $\theta = 0$, la courbe se réduit à un cercle, ce qui est évident.

Pour les valeurs de θ comprises entre 0 et le demi-angle au sommet du cône, la courbe a partout une courbure de même sens. Il ne peut exister de point d'inflexion en vertu du § 415, *6°*.

Pour θ égal au demi-angle au sommet du cône, le plan d'intersection est normal au cône pour ρ minimum et simultanément normal à la génératrice : la courbe conjuguée présente un contact du troisième ordre avec sa tangente pour le minimum du rayon vecteur (§ 415, *6°*).

Enfin, pour les valeurs supérieures de θ, le plan d'intersection est normal au cône pour deux points ; la courbe plane a donc deux points d'inflexion. Elle ressemble à une sinusoïde (fig. 272) en coordonnées polaires.

Nous laissons au lecteur le soin de discuter le cas où le plan

sécant coupe les deux nappes du cône. La courbe possède naturellement des branches infinies.

423. Application du développement conique : construction des cartes.

1°. — Pour représenter les points d'une sphère sur un plan, on les projette sur un cône qu'on développe.

On prend le cône tangent à la sphère suivant le parallèle de latitude v_0, par conséquent le long d'un cercle de longueur $2\pi R \cos v_0$. Les méridiens se projettent sur ce cône suivant des génératrices. Le canevas principal de la carte se composera donc après développement : 1° de droites concourantes au point S qui correspondent aux méridiens ; 2° de cercles ayant ce point S comme centre qui correspondent aux parallèles (fig. 273).

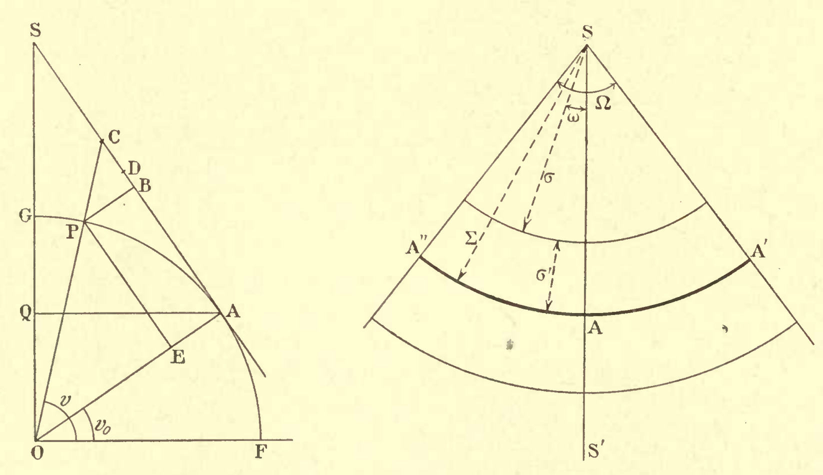


Fig. 273.

Appelons R, non le rayon terrestre, mais le rayon de la sphère sur laquelle nous opérons. On a :

$$\overline{SA} = \Sigma = R \operatorname{cotg} v_0, \qquad \overline{A'AA''} = 2\pi R \cos v_0 ;$$

d'où :

$$\Omega = \overline{A'AA''} : \overline{SA} = 2\pi \sin v_0.$$

Par exemple, si le cercle de tangence correspond à la latitude 45°, on a :

$$\Omega = \pi\sqrt{2} = 4{,}443, \qquad \text{soit sensiblement } 255°.$$

Sur le développement, les points sont rapportés à des coordonnées polaires. Nous apprendrons tout à l'heure à évaluer le rayon vecteur σ ; quant à l'angle ω, compté à partir du méridien origine SS', on a :

$$\omega = u \sin v_0,$$

où u est la longitude. En effet, pour $u = 2\pi$, ω doit être égal à Ω.

Spécifions maintenant le mode de projection des parallèles.

2°. — PERSPECTIVE.

Pour point de vue prenons le centre O de la sphère.

Le point P vient en C. Dans le triangle OAC, on a :

$$\sigma' = \overline{AC} = R\,\text{tg}\,(v - v_0), \qquad \sigma = \Sigma - \sigma' = R\left[\text{cotg}\,v_0 - \text{tg}\,(v - v_0)\right].$$

La carte s'étend jusqu'au sommet S.

3°. — PARALLÈLES ÉQUIDISTANTS. CARTES PLATES.

On porte suivant la génératrice une longueur $\overline{AD} = \text{arc}\,\overline{AP}$.

On a donc :

$$\sigma' = R\,(v - v_0), \qquad \sigma = R\left[\text{cotg}\,v_0 - (v - v_0)\right].$$

La carte ne se prolonge pas jusqu'au sommet S; le pôle G correspond à un cercle fini dont on calculera facilement le rayon (fig. 274).

Nous reviendrons plus loin (§ 425) sur une altération de ce système utilisé dans les cartes de l'État-major français.

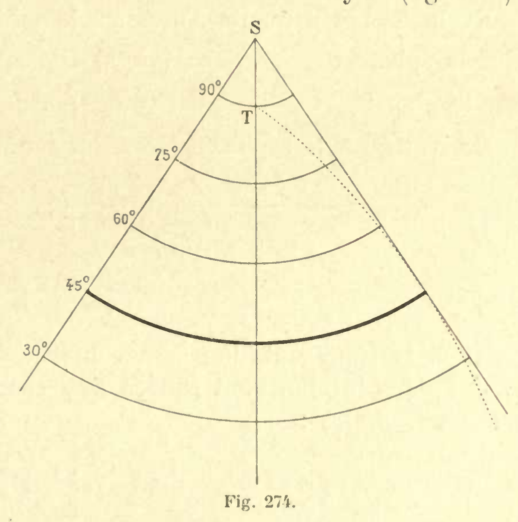


Fig. 274.

Comme cas particulier, projetons sur le cylindre (limite du cône) qui correspond à $v_0 = 0$. Les méridiens et les parallèles sont représentés par deux faisceaux de droites équidistantes et se coupant à angle droit. Le canevas général se compose d'un quadrillage formé de carrés.

Comme altération de ce système, on prend des équidistances différentes pour les deux faisceaux rectangulaires. Afin d'éviter les altérations de surface trop grandes, on choisit pour rapport des longueurs qui représentent un degré de longitude et un degré de latitude, celui qui correspond exactement à la latitude *moyenne* v_1 des pays représentés :

$$\frac{\text{longueur d'un degré de longitude}}{\text{longueur d'un degré de latitude}} = \cos v_1.$$

Par exemple, si la latitude moyenne est 60°, le canevas se compose de rectangles deux fois plus hauts que larges.

Les cartes construites dans ce système sont dites *cartes plates ;* après une grande faveur, elles ont été abandonnées.

4°. — PROJECTION ORTHOGONALE.

Enfin on peut projeter le point P orthogonalement sur le cône en B. On a :

$$\sigma' = R\sin(v - v_0), \qquad \sigma = R\left[\text{cotg}\,v_0 - \sin(v - v_0)\right].$$

La carte ne se prolonge pas jusqu'au sommet S. Le cercle correspondant au pôle G a pour rayon :

$$\mathrm{R} \cot v_0 (1 - \sin v_0).$$

424. Projections coniques.

1°. — REPRÉSENTATION CONFORME : SYSTÈME DE GAUSS.

Sans rien préciser de plus, posons que les méridiens sont représentés par des droites concourantes et les parallèles par des cercles ayant pour centre commun le point de concours : les deux faisceaux de lignes de repère sont orthogonaux.

Posons donc : $\omega = ku, \quad \sigma = f(v).$

Évaluons les éléments d'arcs sur la sphère et sur le plan.

Sur la sphère : $ds^2 = \mathrm{R}^2 dv^2 + \mathrm{R}^2 \cos^2 v\, du^2$;

sur le plan : $ds^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\omega^2$.

Écrivons que la représentation est conforme. On doit avoir (§ 387) :

$$\frac{d\sigma}{dv} = -\frac{\sigma d\omega}{\cos v\, du} = -\frac{k\sigma}{\cos v}; \qquad \frac{d\sigma}{\sigma} = -k\frac{dv}{\cos v}.$$

$$\sigma = \sigma_0 \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)\right]^k.$$

Ainsi la représentation sera conforme si les coordonnées polaires ω et σ dans le plan sont reliées aux coordonnées sphériques u et v par les formules :

$$\omega = ku, \qquad \sigma = \sigma_0 \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)\right]^k.$$

Pour des valeurs égales et de signes contraires de v, la tangente et par suite le quotient $\sigma : \sigma_0$ prennent des valeurs inverses.

Pour $v = \pi : 2$, on a $\sigma = 0$; pour $v = -\pi : 2$, on a $\sigma = \infty$.

Telle est la condition pour que la représentation soit *conforme*. Nous disposons de deux arbitraires σ_0 et k. Profitons-en pour rendre la représentation *exacte*, par exemple, sur l'équateur. Il faut écrire que les figures infiniment petites sont non seulement semblables, mais identiques.

Posons donc pour $v = 0$:

$$d\sigma = -\mathrm{R}dv, \qquad \sigma d\omega = \mathrm{R} \cos v \, . \, du.$$

On trouve aisément la condition :

$$\sigma_0 k = \mathrm{R}.$$

Pour bizarre que paraisse ce système, *qui revient à représenter la terre sur un éventail,* on obtient des résultats remarquables. John Herschel a construit une carte dans l'hypothèse $k = 1 : 3$ (l'éventail

a une ouverture de 120°) où les déformations sont étonnamment petites. La figure 275 en représente le canevas.

2°. — Projection conique avec conservation des aires : système de Lorgna.

Posons comme plus haut :

$$\omega = ku, \qquad \sigma = f(v).$$

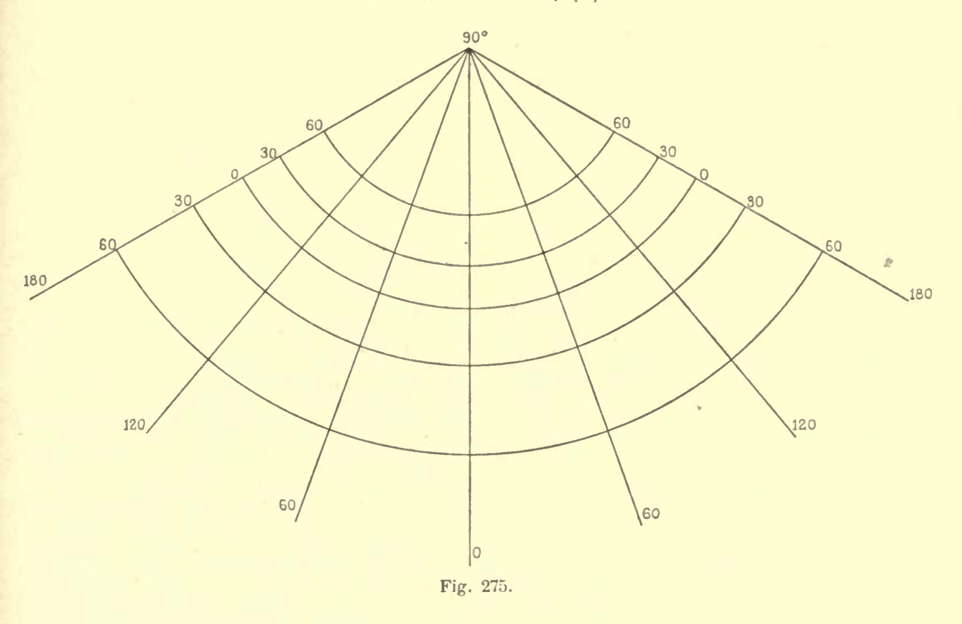


Fig. 275.

Écrivons que les aires élémentaires sont identiques (§§ 174 et 378) :

$$\sigma\, d\omega d\sigma = \mathrm{R}^2 \cos v \,.\, du\, dv$$

D'où immédiatement :

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{k}} \,.\, \mathrm{R}\sqrt{1 - \sin v}\,.$$

La constante d'intégration est déterminée par la condition que pour le pôle ($v = \pi : 2$), le rayon vecteur σ soit nul. Ainsi les aires sont conservées si les coordonnées polaires ω et σ dans le plan sont reliées aux coordonnées sphériques u et v par les formules :

$$\omega = ku, \qquad \sigma = \sqrt{1 : k} \,.\, \mathrm{R}\sqrt{2(1 - \sin v)}\,.$$

On vérifiera que $\mathrm{R}\sqrt{2(1 - \sin v)}$, est la corde de l'arc de grand cercle compris entre le pôle et le parallèle de latitude v.

425. Cartes de l'État-major français.

Le système de l'État-major est une combinaison de la projection conique *3°* du § 423, et du système de Flamsteed (§ 384). Les parallèles sont représentés par des cercles concentriques *équidistants*,

mais les méridiens ne le sont plus par des droites concourantes. Les courbes correspondantes aux méridiens sont déterminées par la condition que les parallèles conservent des longueurs exactes.

Déterminons les coordonnées σ, ω, sur la carte (fig. 276) d'un point de longitude u et de latitude v. On a comme précédemment :

$$\sigma = R[\operatorname{cotg} v_0 - (v - v_0)].$$

Le cercle de latitude v, ayant une longueur $2\pi R \cos v$ pour une variation 2π de longitude, la longueur de l'arc $\overline{QP}$ qui correspond à la longitude u, est :

$$u R \cos v.$$

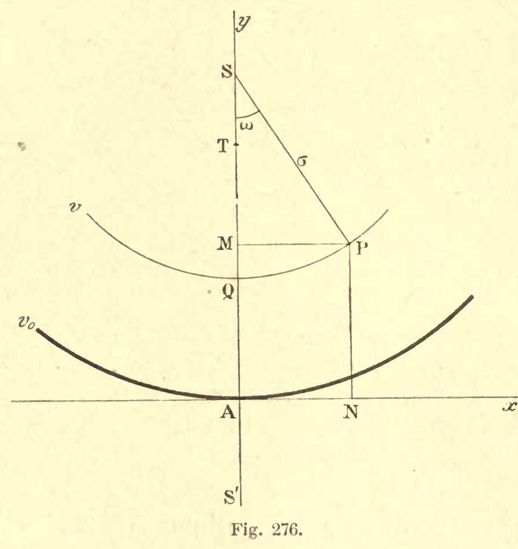


Fig. 276.

L'angle ω est égal au quotient de l'arc par le rayon ; d'où :

$$\omega = \frac{u \cos v}{\operatorname{cotg} v_0 - v + v_0}.$$

Les coordonnées cartésiennes sont :

$$x = \sigma \sin \omega,$$

$$y = \Sigma - \sigma \cos \omega.$$

On a $\omega = 0$, quel que soit u, pour $v = \pi : 2$. L'autre coordonnée a pour valeur :

$$\sigma = \operatorname{cotg} v_0 - (\pi : 2) + v_0.$$

Donc les courbes qui représentent les méridiens concourent en un point T placé par rapport à S, comme le montre la figure 276. Elles coupent orthogonalement le parallèle v_0. On se rend compte aisément de quelle manière elles diffèrent d'être rectilignes (voir la courbe en pointillé de la figure 274).

426. Hélices coniques ; loxodromies coniques.

1°. — Au § 415, *2°*, nous montrons que dans le développement d'une surface développable les angles se conservent. Au § 201, nous établissons que la spirale logarithmique fait un angle constant avec le rayon vecteur issu d'un certain point S (pôle).

Reliant ces deux propositions, nous concluons que pour obtenir les *hélices coniques,* courbes faisant avec les génératrices d'un cône *quelconque* un angle constant, il faut tracer dans un plan un faisceau de spirales logarithmiques admettant S comme pôle, couper le plan suivant une demi-droite aboutissant en S, puis l'enrouler en forme de cornet *quelconque* admettant S pour sommet.

2°. — Les hélices coniques comprennent les *loxodromies coniques.* Au § 409, nous définissons les loxodromies des surfaces de révolution : elles font avec tous les méridiens un angle invariable.

Pour obtenir une loxodromie conique, il suffit donc de déformer le cornet jusqu'à obtenir un cône de révolution.

Comme ces courbes sont utilisées dans la Théorie de la Conductibilité (Étude des symétries, § 235), nous en dirons quelques mots.

Reprenons les notations du § 422.

L'équation de l'hélice *sur le cône* est :

$$\rho = e^{ku}.$$

On a : $\rho_0 u = r_0 \alpha, \qquad r = \rho \cos\gamma.$

D'où : $r = \cos\gamma \,.\, \exp(k\alpha\cos\gamma).$

La projection de l'hélice sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône est une nouvelle spirale logarithmique.

On peut donc considérer les loxodromies coniques comme obtenues par l'intersection du cône par des cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe du cône et s'appuient sur des spirales logarithmiques tracées sur un plan normal à cet axe.

On démontre aisément que l'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices de ce cylindre. Elle est donc aussi bien une hélice cylindrique générale (§ 413); d'où le nom d'hélice *cylindro-conique* qu'on lui donne quelquefois.

427. Développantes d'une courbe gauche.

Une courbe gauche a, comme une courbe plane, une infinité de développantes : elles sont engendrées chacune par un point d'une tangente qui roule sur la courbe sans glisser. Elles forment, sur la surface développable lieu des tangentes, le faisceau des courbes orthogonales à ces tangentes. Elles ont naturellement un point de rebroussement sur l'arête de rebroussement de cette surface (courbe gauche donnée).

Quand on développe la surface sur un plan, les développantes de la courbe gauche deviennent les développantes de la transformée de l'arête de rebroussement. Par exemple, les développantes de l'hélice deviennent des développantes de cercle (§ 415, *3°*).

Le lecteur se reportera au § 329, où il est déjà parlé des développantes des courbes gauches.

CHAPITRE XX

SURFACES RÉGLÉES NON DÉVELOPPABLES

Étude générale des systèmes de droites.

428. Surfaces réglées ; congruences, complexes de droites. Soit les équations d'une droite (§ 323) :

$$\frac{x-p}{l}=\frac{y-q}{m}=\frac{z-r}{n}, \qquad \text{ou encore :}$$

$$x=p+lt, \qquad y=q+mt, \qquad z=r+nt. \qquad (1)$$

Quand les quantités l, m, n, p, q, r, dépendent d'un paramètre u, les coordonnées x, y, z, sont exprimées en fonction de deux variables u, t. Les équations (1) représentent une surface évidemment réglée, c'est-à-dire constituée par les positions successives d'une droite qui se déplace. Si u est constant et t variable, on décrit une *génératrice ;* si u est variable et t constant, on décrit une certaine courbe empruntant un point à chaque génératrice.

Quand les quantités l, m,.... dépendent de deux paramètres u, v, on a une *congruence de droites.* Chaque point A de l'espace est traversé par une ou plusieurs droites de la congruence.

Remplaçons x, y, z, par les coordonnées du point A ; nous avons trois équations à trois inconnues u, v, t, qui sont généralement satisfaites par un nombre fini de valeurs de ces variables.

Quand il existe trois paramètres, on a un *complexe de droites.* Chaque point de l'espace est le sommet d'un cône dont les génératrices appartiennent au complexe.

S'il existait plus de trois paramètres, toutes les droites possibles appartiendraient au système de droites. Nous n'aurons à considérer par la suite que des surfaces réglées et des congruences.

429. Relations de deux droites voisines d'un système de droites.

Soit les équations de deux droites voisines :

$$x=p+lt, \qquad y=q+mt, \qquad z=r+nt;$$

$$x=p+dp+(l+dl)t, \qquad y=q+dq+(m+dm)t,$$

$$z=(r+dr)+(n+dn)t.$$

Posons : $A=mdn-ndm, \quad B=ndl-ldn, \quad C=ldm-mdl.$

1°. — Déterminons l'angle θ des deux droites. Nous ne pouvons pas nous servir du cosinus de cet angle, car le cosinus d'un angle petit est égal à l'unité, aux quantités du deuxième ordre près. Nous utiliserons donc la formule donnant $\sin\theta=\theta$ (§ 316, 4°) ; on trouve en négligeant les quantités infiniment petites devant les quantités finies :

$$\theta=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{l^2+m^2+n^2}. \tag{1}$$

2°. — La plus courte distance des deux droites est immédiatement donnée par la formule du § 327 :

$$\delta=\frac{Adp+Bdq+Cdr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2}$$

On appelle *paramètre de distribution* le rapport :

$$\chi=\frac{\delta}{\theta}=\frac{(Adp+Bdq+Cdr)(l^2+m^2+n^2)}{A^2+B^2+C^2}. \tag{3}$$

C'est généralement une quantité finie.

3°. — Calculons les cosinus directeurs λ, μ, ν, de la perpendiculaire commune. On a (§ 28) :

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0, \qquad (l+dl)\lambda+(m+dm)\mu+(n+dn)\nu=0.$$

D'où : $$\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4}$$

4°. — Enfin déterminons le point I où la perpendiculaire commune touche les génératrices. Il est caractérisé par une certaine valeur de la variable t. Appliquons les formules du § 328 ; elles deviennent, aux quantités négligeables près :

$$P_1=P=mdr-ndq,$$

$$Q_1=Q=ndp-ldr,$$

$$R_1=R=ldq-mdp;$$

$$t=\tau=\frac{AP+BQ+CR}{A^2+B^2+C^2}. \tag{5}$$

430. Surfaces réglées ; point central, ligne de striction.

1°. — Jusqu'à présent on ne suppose que la petitesse des quantités dl, dm,... Admettons avoir affaire à une surface réglée : dl, dm,... sont alors des différentielles : elles correspondent à la variation infiniment petite du paramètre u qui définit la surface. Nous pouvons leur substituer dans toutes les formules (qui sont homogènes et de degré 0 par rapport aux accroissements) les dérivées $\frac{dl}{du}$, $\frac{dm}{du}$,...

2°. — Le point d'une génératrice dont la distance aux génératrices voisines est minimum, point déterminé par la formule (5), s'appelle *point central*. Son lieu est *la ligne de striction*. Nous pouvons dire que *toutes les génératrices voisines d'une génératrice* D *coupent perpendiculairement un même élément de droite qui passe par le point central* I *de* D. Cet élément est généralement incliné sur la ligne de striction; en d'autres termes, cette courbe n'est généralement pas une trajectoire orthogonale des génératrices.

3°. — Les *surfaces développables* sont engendrées par les tangentes à une courbe gauche. Il revient au même de dire que les génératrices infiniment voisines se coupent, *que leur distance est nulle.* L'équation différentielle des surfaces développables est donc :

$$A dp + B dq + C dr = 0.$$

Remplaçons partout les différentielles par les dérivées, dl par l', dm par m',... ; on trouve la condition :

$$(mn' - nm')p' + (nl' - ln')q' + (lm' - ml')r' = 0.$$

En particulier, prenons z pour variable t ; nous devons poser :

$$r = r' = 0, \qquad n = 1, \qquad n' = 0.$$

La condition se simplifie et devient :

$$m'p' = l'q'.$$

431. Plan tangent aux surfaces réglées.

1°. — Un plan qui contient une génératrice G, coupe la surface réglée suivant une autre courbe C. En effet, les génératrices voisines de G et situées de part et d'autre rencontrent le plan chacune en un point ; l'ensemble de ces points forme une courbe. Comme cas particulier, cette courbe est une droite (paraboloïdes, hyperboloïdes).

2°. — Il résulte de là que tout plan contenant une génératrice est tangent à la surface en un point P ; c'est celui où la courbe C déterminée par le plan coupe la génératrice G. Le plan contient, en effet, autour du point P deux éléments de courbes tracés sur la surface ; il contient, par suite, tous les points voisins de P ; car ceux-ci forment un plan quand on se limite aux infiniment petits du premier

ordre. Un cas fait exception, celui des surfaces développables, où le plan tangent est unique et le même tout le long de la génératrice.

3°. — Cherchons l'équation du plan tangent au point P défini par les valeurs, u, t, des paramètres.

Écrivons d'abord que le plan passe par le point de contact choisi : X, Y, Z. Son équation est :

$$a(x - X) + b(y - Y) + c(z - Z) = 0.$$

Écrivons qu'il contient la génératrice passant par le point de contact. On a :

$$X = p + lt, \qquad Y = q + mt, \qquad Z = r + nt ;$$

$$a(x - p - lt) + b(y - q - mt) + c(z - r - nt) = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite quel que soit t, il faut écrire :

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0. \tag{1}$$

$$al + bm + cn = 0. \tag{2}$$

Exprimons enfin que le plan passe par le point P′ voisin de P obtenu en laissant t invariable et en remplaçant u par $u + du$; par conséquent, P′ se trouve sur la génératrice G′ voisine de G.

On a comme condition :

$$a\left(x - X - \frac{\partial X}{\partial u}\,du\right) + b\left(y - Y - \frac{\partial Y}{\partial u}\,du\right) + c\left(z - Z - \frac{\partial Z}{\partial u}\,du\right) = 0.$$

$$a\,(p' + l't) + b\,(q' + m't) + c\,(r' + n't) = 0. \tag{3}$$

L'élimination de a, b, c, entre les équations (1), (2), (3), donne l'équation du plan cherché.

432. Paramètre de distribution.

1°. — Pour discuter commodément la façon dont le plan tangent varie le long d'une génératrice G, (c'est-à-dire quand t varie, les quantités l, m, n, p, q, r, et leurs dérivées par rapport à u restant constantes), prenons cette génératrice G pour axe Oz ; mettons son point central O à l'origine des coordonnées ; choisissons pour axe Oy la perpendiculaire commune aux génératrices voisines de G (fig. 277).

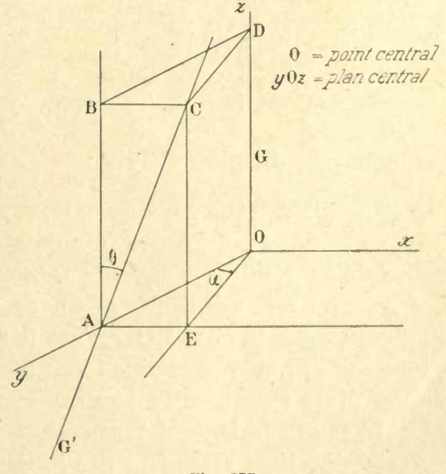


Fig. 277.

x et y devant rester constamment nuls quel que soit t, on a pour la génératrice G :

$$p = q = l = m = 0.$$

Prenons z pour la variable t. Cela revient à poser :

$$z = t; \quad r = 0, \quad n = 1; \quad \text{par suite,} \quad r' = 0, \quad n' = 0.$$

La génératrice G′ voisine de D a pour équations :

$$x = dp + zdl, \qquad y = dq + zdm.$$

Par hypothèse, elle rencontre Oy. Pour $z = 0$, on a donc :

$$x = dp = 0, \qquad y = dq = \delta = \overline{\text{OA}}.$$

Par hypothèse, encore, elle est normale à Oy et fait avec Oz l'angle θ :

$$dm = 0, \qquad \text{tg}\,\theta = \overline{\text{BC}} : \overline{\text{AB}} = x : z = dl.$$

2°. — Écrivons l'équation du plan tangent. La condition (2) donne $c = 0$. La condition (3) donne : $atdl + bdq = 0$.

Le plan devant passer par l'origine, son équation est :

$$y = \frac{dq}{dl}\frac{x}{t} = \frac{\delta}{\theta}\frac{x}{Z} = \chi\frac{x}{Z}. \tag{4}$$

Z est le z variable du point de contact ; y et x sont les coordonnées courantes.

3°. — Mettons l'équation sous une autre forme. Remplaçons dq et dl par leurs valeurs : $\quad y = \frac{\overline{\text{OA}}}{\overline{\text{BC}}}\cdot\frac{\overline{\text{AB}}}{Z}x.$

Soit D le point pour lequel on demande le plan tangent. Menons le plan normal à Oz ; il coupe la génératrice G′ au point C et détermine le triangle DBC. Menons CE parallèlement à Oz ; on a :

$$\overline{\text{AB}} = \overline{\text{OD}} = Z, \qquad \overline{\text{BC}} = \overline{\text{AE}}, \qquad \overline{\text{AE}} = \overline{\text{OA}}\,.\,\text{tg}\,\alpha.$$

L'équation du plan s'écrit : $\quad x = y\,\text{tg}\,\alpha, \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{Z}{\chi}.$

Sa trace sur xOy est donc OE.

Nous aurions pu déduire immédiatement ce résultat du § 431, c'est-à-dire de la définition du plan tangent.

4°. — Ici une remarque s'impose sans laquelle on irait au-devant d'idées fausses (§ 431) : DC n'est pas la tangente à la seconde courbe d'intersection suivant laquelle le plan EOD coupe la surface réglée ; s'il en était ainsi, cette courbe serait normale à la génératrice G, ce qui est généralement faux.

Mais $\overline{\text{AC}}$, EC, $\overline{\text{OD}}$, sont des longueurs finies ; $\overline{\text{OA}}$ est un infiniment petit. Toute courbe partant de D et rencontrant G′, coupe donc G′ en un point qui ne diffère de C que d'un infiniment petit, c'est-à-dire une quantité négligeable devant AC. Le point E et par suite l'angle α sont donc *à la limite* aussi bien déterminés par la perpendiculaire DC à Oz que par n'importe quelle oblique.

433. Rotation du plan tangent.

1°. — Discutons l'équation (4). Pour $z=0$, on a $x=0$; le plan tangent se confond avec yOz, ce qui résulte immédiatement du choix de Oy. Le plan tangent au point central d'une génératrice s'appelle *plan central*.

A mesure que le point de contact s'éloigne de l'origine O, le plan tangent tourne autour de Oz. Quand Z varie de $-\infty$ à $+\infty$, son azimut passe de $-\pi : 2$ à $+\pi : 2$. Tout plan mené par Oz est tangent en un point et en un seul, comme nous l'avons déjà conclu de considérations géométriques (§ 431).

2°. — Si la surface est développable, on a : $\delta=0$, $\chi=0$, $\operatorname{tg}\alpha=\infty$. Le plan tangent se confond avec xOz quel que soit Z ; il est le même le long de la génératrice G. La génératrice G' est tout entière dans le plan xOz qui devient osculateur à l'arête de rebroussement pour le point O, intersection de G et G'.

Lorsque les génératrices sont parallèles (cylindre), la condition $\theta=0$ donne identiquement $x=0$; le plan tangent coïncide avec yOz tout le long de la génératrice G. Ce résultat, en contradiction apparente avec le précédent, tient à ce que l'arête de rebroussement est à l'infini.

434. Raccordement de deux surfaces réglées.

Soit deux surfaces réglées ayant une génératrice commune que nous prenons pour axe Oz. Le point central de la première est O ; la perpendiculaire commune avec les génératrices voisines est Oy. Le point central de la seconde est O' ; la perpendiculaire commune avec les génératrices voisines est O'B ; posons $AO'B=\alpha_0$, $\overline{OO'}=Z_0$.

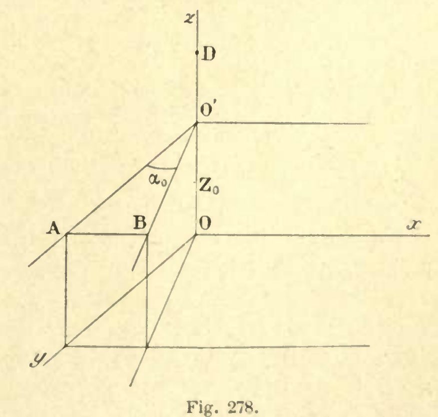


Fig. 278.

Les angles α et α' que font avec Oy les traces des plans tangents sur xOy, sont fournis par les relations :

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{Z}{\chi},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha_0)=\frac{Z-Z_0}{\chi'}.$$

Cherchons les points D tels que les plans tangents soient communs : $\alpha=\alpha'$.

On tire de la seconde équation :

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(Z-Z_0)+\chi'\operatorname{tg}\alpha_0}{\chi'-(Z-Z_0)\operatorname{tg}\alpha_0},$$

quantité qu'il faut égaler à $Z : \chi$.

On trouve l'équation du second degré :

$$Z^2 \operatorname{tg} \alpha_0 - Z(Z_0 \operatorname{tg} \alpha_0 - \chi + \chi') - \chi(Z_0 - \chi' \operatorname{tg} \alpha_0) = 0. \qquad (1)$$

Donc les deux surfaces ont leur plan tangent commun en deux points de la génératrice commune. Si le nombre des plans tangents communs est supérieur à deux, l'équation (1) est identiquement satisfaite : les deux surfaces ont leurs plans tangents communs tout le long de la génératrice : *elles se raccordent suivant cette droite.* Il faut pour cela :

$$Z_0 = 0, \qquad \operatorname{tg} \alpha_0 = 0, \qquad \chi = \chi'.$$

Les points centraux doivent coïncider, ainsi que les plans tangents en ces points (plans centraux) ; enfin les paramètres de distribution χ et χ' des deux surfaces doivent être égaux *pour la génératrice commune considérée.*

435. Congruences ; caustiques.

Quand les droites forment une congruence, les quantités l, m, n, p, q, r, dépendent de deux paramètres u, v. Tout point de l'espace appartient à une ou plusieurs droites du système.

Le problème est de grouper ces lignes de la manière la plus commode.

1°. — Demandons-nous d'abord si l'on ne pourrait pas effectuer ce groupement de manière que la distance d'une génératrice aux génératrices voisines *du même groupe* soit nulle, ou soit infiniment petit d'ordre supérieur par rapport aux variations du, dv, prises comme infiniment petits principaux. Nous devons écrire (§ 429) :

$$\delta = 0, \qquad A dp + B dq + C dr = 0. \qquad (1)$$

On a :

$$A = m\left(\frac{\partial n}{\partial u} du + \frac{\partial n}{\partial v} dv\right) - n\left(\frac{\partial m}{\partial u} du + \frac{\partial m}{\partial v} dv\right);$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv.$$

Effectuant les calculs, l'équation (1) se met évidemment sous la forme suivante, du second degré en du, dv :

$$\mathcal{A} du^2 + \mathcal{B} dv^2 + \mathcal{C} du\, dv = 0.$$

Nous avons donc généralement, pour chaque système de valeurs de u et de v, deux valeurs du rapport $du : dv$ qui annulent δ. Mais, nous donner u et v, c'est choisir une droite D du système. Prendre une valeur $du : dv$, c'est grouper autour de D *certaines* droites du système. Nous venons donc de démontrer qu'il est possible de choisir, parmi les droites voisines de D, deux systèmes pour chacun desquels la plus courte distance δ s'annule. Ce qui revient à dire que chacun de ces systèmes forme un élément de surface développable, ou que les droites de chacun de ces systèmes sont tangentes à un élément de courbe gauche, arête de rebroussement de la surface développable.

Le lecteur réfléchira sur le raisonnement précédent ; il éclaire ce que signifie la locution si souvent employée dans les pages précédentes, que *pour les surfaces développables, les génératrices voisines se coupent*. Nous supposons que leur position dépend d'un paramètre ; nous comparons la distance δ de deux génératrices à la variation Δ du paramètre ; nous disons que les génératrices se coupent si le rapport $\delta : \Delta$ tend vers zéro quand Δ s'annule.

2° Chaque droite D du système fait donc partie de deux surfaces développables, ou, ce qui revient au même, est tangente à deux courbes gauches. On appelle *foyers* les points de tangence, et *surface caustique* la surface *à deux nappes* lieu de ces foyers. Elle est à deux nappes, puisque sur chaque droite il y a deux foyers.

On peut encore dire que les surfaces *caustiques* sont engendrées par les arêtes de rebroussement de toutes les surfaces développables; d'où résulte que toute droite du système est tangente à l'une et à l'autre nappes de la caustique.

Nous n'en dirons pas plus long sur les congruences que nous retrouverons plus loin sous un aspect plus concret. Les droites normales à une surface forment en effet une congruence. Nous voulions seulement donner au lecteur une idée de la nature du problème général des systèmes de droites.

Conoïdes.

436. Conoïdes.

On appelle *conoïdes* les surfaces engendrées par une droite qui s'appuie sur deux courbes *directrices* et reste parallèle à un plan directeur. Pour obtenir une génératrice du conoïde, on mène un plan parallèle au plan directeur et on joint les points où il est percé par les deux courbes directrices (fig. 279).

Si l'une des directrices est une *droite* D normale au plan directeur, le conoïde est *droit;* si c'est une *droite* oblique au plan directeur, le conoïde est *oblique*. La *ligne de striction* du conoïde droit est évidemment la droite D elle-même : c'est la normale commune à toutes les génératrices.

437. Équation générale du conoïde droit ou oblique.

1°. — Prenons la directrice rectiligne pour axe Oz, et soit xOy le plan directeur. Si le conoïde est droit, Oz est normal à xOy ; mais les équations générales sont les mêmes dans le cas du conoïde oblique.

Les équations de la courbe directrice sont :

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z). \qquad (1)$$

Coupons par le plan $z=h$; les coordonnées des intersections de la directrice (1) avec ce plan sont :

$$z=h, \qquad x=\varphi(h), \qquad y=\psi(h).$$

Les équations des génératrices du conoïde sont :

$$z=h, \qquad \frac{y}{x}=\frac{\psi(h)}{\varphi(h)}.$$

Éliminons h entre ces deux équations, il reste :

$$\frac{y}{x}=\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}=F_1(z), \qquad z=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Telle est l'équation du conoïde droit ou oblique *en termes finis.*

2°. — Cherchons l'équation aux dérivées partielles.

Considérons F comme fonction de la variable auxiliaire $t=y:x$.

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\frac{dF}{dt},$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dF}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{dF}{dt}.$$

D'où :
$$px+qy=0. \qquad (2)$$

3°. — Interprétons cette équation.

L'équation du plan tangent est généralement :

$$z-Z=p(x-X)+q(y-Y),$$

où $X, Y, Z,$ sont les coordonnées courantes, $x, y, z,$ les coordonnées du point de contact. Pour le conoïde, l'équation se réduit à :

$$Z-pX-qY=z.$$

Si l'on pose $X=Y=0$, il vient $Z=z$. Ce qui signifie simplement que pour tous les points de la surface qui ont le z, même le plan tangent coupe Oz au même point : ce qui est évident *a priori*, puisque le plan tangent à une surface réglée contient toute la génératrice qui passe par le point de contact et qu'ici cette génératrice est parallèle à xOy.

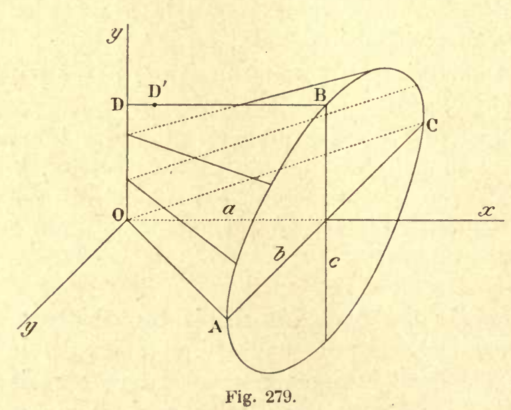


Fig. 279.

438. Voûte d'arête en tour ronde.

1°. — Voici un exemple simple de conoïde droit.

On choisit pour directrice courbe une ellipse d'équations (fig. 279) :

$$x=a, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On peut la mettre sous la forme :

$$y = b\cos\varphi, \qquad z = c\sin\varphi.$$

Les génératrices rectilignes du conoïde ont pour équations :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b\cos\varphi}, \qquad z = c\sin\varphi. \qquad (1)$$

En effet, si je pose $x = a$, je trouve les équations de l'ellipse ; au surplus, les droites (1) sont horizontales et passent par Oz.

2°. — Cherchons le paramètre de distribution. Pour cela ramenons aux notations du § 429 ; construisons le tableau :

l	m	n	l'	m'	n'
a	$b\cos\varphi$	0	0	$-b\sin\varphi$	0
p	q	r	p'	q'	r'
0	0	$c\sin\varphi$	0	0	$c\cos\varphi$

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = -ab\sin\varphi ;$$

$$\chi = -\frac{c}{ab}\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}(a^2 + b^2\cos^2\varphi).$$

Discutons ce résultat. La ligne de striction est Oz ; les plans tangents en tous les points de cette ligne passent par Oz. Le plan central sur une génératrice quelconque est donc vertical.

Le paramètre de distribution nous apprend comment il tourne.

Sur la génératrice OA, on a $\varphi = 0$, $\chi = \infty$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Effectivement le plan tangent est vertical tout le long de la génératrice.

Sur la génératrice DB, on a $\varphi = \pi : 2$, $\chi = 0$. Le plan tangent tourne de $\pi : 2$ avec une rapidité infinie. Il est vertical en D, il est quasiment horizontal au point D′ infiniment voisin ; après quoi il reste horizontal, puisque sa rotation complète d'un côté du point central est toujours égale à $\pi : 2$.

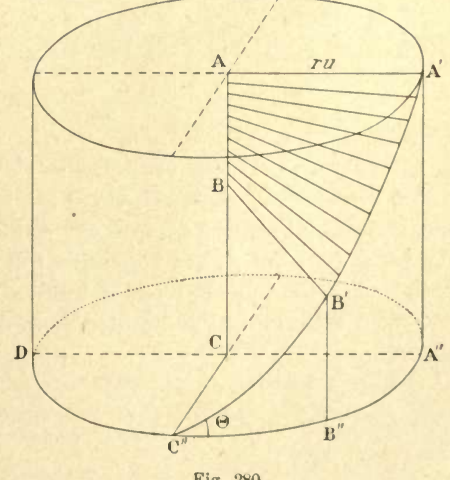


Fig. 280.

439. Hélicoïde gauche ou à plan directeur.

1°. — On appelle *hélicoïde gauche ou à plan directeur* un conoïde droit admettant pour directrice courbe une hélice dont l'axe coïncide avec la directrice rectiligne.

On se reportera à la figure 280.

Les coordonnées d'un point de l'hélice étant (§ 409) :

$$x = r\cos\frac{2\pi s}{S}, \qquad y = r\sin\frac{2\pi s}{S}, \qquad z = \frac{H}{S}s,$$

les équations à deux paramètres u, s (§ 372) de l'hélicoïde gauche sont :

$$x = ru\cos\frac{2\pi s}{S}, \qquad y = ru\sin\frac{2\pi s}{S}, \qquad z = \frac{H}{S}s.$$

Si $u > 1$, les points sont hors du cylindre sur lequel l'hélice directrice est tracée; si $u < 1$, ils sont dans ce cylindre.

2°. — Inversement pour une valeur donnée de u et pour s variable, on décrit sur l'hélicoïde une hélice. Toutes ces hélices ont même pas H. Leurs inclinaisons Θ et la longueur Σ de l'arc qui correspond à un tour, sont fournies par les formules :

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{H}{2\pi ru}, \qquad \Sigma^2 = H^2 + 4\pi^2r^2u^2.$$

Il est indifférent de prendre l'une ou l'autre de ces hélices pour directrice courbe de l'hélicoïde.

Changer l'hélice revient à remplacer les quantités s et S par les quantités proportionnelles σ et Σ.

3°. — Nous retrouvons immédiatement le théorème fondamental sur la distribution des plans tangents. En un point quelconque P de l'hélicoïde, le plan tangent passe par la génératrice rectiligne et est tangent à une des hélices que nous avons définies au *2°*. Si P est à une distance ru de l'axe, l'inclinaison de cette hélice, par suite celle du plan tangent est :

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{H}{2\pi ru}.$$

Θ mesure l'angle avec le plan horizontal. Mais le plan central est vertical; donc l'angle α du plan tangent en P avec le plan central correspondant est le complément de Θ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi ru}{H}.$$

$\operatorname{tg}\alpha$ est donc bien proportionnel à la distance ru du point P au point central correspondant. Le plan tangent, vertical sur Oz, devient horizontal à l'infini; ce qui est évident *a priori*, puisqu'une surface de plus en plus grande occupe toujours la même hauteur verticale. Nous verrons tout à l'heure l'inconvénient *industriel* de ce résultat.

4°. — Calculons l'élément d'arc a d'une courbe tracée sur l'hélicoïde (§ 374).

Un calcul facile donne :

$$da^2 = r^2du^2 + \frac{\Sigma^2}{S^2}\,ds^2.$$

La forme de cette équation nous apprend que les génératrices de l'hélicoïde et les hélices définies au *2°* forment un système de courbes orthogonales. En choisissant convenablement la loi de variation du paramètre u [ce qui revient à prendre une variable $U = f(u)$], on

obtient un système d'*isothermes* (§ 385) découpant la surface en carrés infiniment petits. On posera :

$$U = rS \int \frac{du}{\sqrt{H^2 + 4\pi^2 r^2 u^2}} = \frac{S}{2\pi} \log \left(2\pi ru + \sqrt{4\pi^2 r^2 u^2 + H^2}\right).$$

440. Hélices de propulsion.

L'hélice propulsive est constituée par plusieurs fragments d'un hélicoïde à plan directeur (fig. 280).

Le pas est $H = 4\,AC$. L'inclinaison est :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{H}{2\pi ru} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{AB}{A''B''}.$$

Chaque fragment AA'B'B de l'hélicoïde èst une *aile*. Soit n leur nombre ; on a généralement $n = 2$ pour les hélices aériennes, $n = 2$ ou 3 pour les hélices marines. En réalité, les divers fragments appartiennent à des hélicoïdes identiques, mais qui ont tourné de 180° ou de 120° l'un par rapport à l'autre.

On appelle *fraction de pas partielle* le rapport $AB : H = f : n$.

On appelle *fraction de pas total*, le produit f de la fraction précédente par le nombre d'ailes : c'est la fraction de pas obtenu en plaçant toutes les ailes sur le même hélicoïde.

Le *pas relatif* est le rapport $h = H : D$, du pas au diamètre de l'hélice. L'inclinaison *minima* des éléments est :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{H}{\pi D} = \frac{h}{\pi}.$$

Dans les hélices marines, on a moyennement $h = 1,25$, $\Theta = 22°$. Dans les hélices aériennes, h est de l'ordre de 0,50 ; Θ est de l'ordre de 10°.

L'inconvénient de l'hélicoïde à plan directeur est que l'inclinaison du plan tangent sur l'axe augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe ; autrement dit, l'inclinaison Θ de l'hélice extérieure A'B'C'' diminue à mesure qu'augmente le diamètre : il en résulte des défauts mécaniques que nous étudions dans le tome I[er] de notre Cours de Physique. Pour les corriger, on peut faire croître le pas du moyeu à l'extrémité de l'aile : la surface cesse d'être un hélicoïde à plan directeur.

En raison de leur importance pratique, nous dirons plus loin quelques mots des hélicoïdes à génératrices inclinées sur l'axe (§ 452).

441. Paraboloïde hyperbolique.

1°. — Soit $f(x, y, z) = 0$, l'équation d'une surface.

Coupons par la droite :

$$x = lz + p, \qquad y = mz + q. \tag{1}$$

Éliminons x et y entre ces trois équations; nous obtenons une équation en z qui fournit les coordonnées z des points d'intersection. Pour que la droite soit située tout entière sur la surface, il faut que l'équation en z soit indéterminée : il faut donc que les coefficients de toutes les puissances de z (la puissance zéro comprise) soient nuls.

On obtient ainsi certaines relations entre les paramètres l, p, m, q; pour que la surface soit *réglée,* il faut que ces relations soient compatibles et que les solutions soient réelles.

2°. — Appliquons au *paraboloïde hyperbolique* (§ 337,4°).

Son équation est : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$

L'équation en z est :

$$\frac{(lz+p)^2}{a^2} - \frac{(mz+q)^2}{b^2} = 2z.$$

D'où les conditions :

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{m^2}{b^2}, \qquad \frac{lp}{a^2} - \frac{mq}{b^2} = 1, \qquad \frac{p^2}{a^2} = \frac{q^2}{b^2}.$$

On y satisfait en posant :

$$\frac{l}{a} = \pm \frac{m}{b}, \qquad \frac{p}{a} = \mp \frac{q}{b} = \frac{a}{2l}.$$

D'où les équations des génératrices, où l est le paramètre variable :

$$\frac{x}{a} = \frac{l}{a} z + \frac{a}{2l}, \qquad \pm \frac{y}{b} = \frac{l}{a} z - \frac{a}{2l}.$$

En retranchant les carrés de ces équations, on retrouve celle du paraboloïde. *Il y a deux systèmes de génératrices* qui correspondent à l'un ou l'autre signe. On se reportera au § 337, où les propriétés générales du paraboloïde sont étudiées.

442. Génératrices des paraboloïdes hyperboliques.

Nous les prendrons sous la forme :

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda, \qquad \frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = \frac{2z}{\lambda}, \tag{1}$$

ce qui revient à poser $a : l = \lambda$.

1°. — *Les génératrices de chaque système sont respectivement parallèles aux plans directeurs* P_1 *et* P_2 (fig. 215).

En effet, les projections sur xOy ont une direction invariable, parallèle à l'une des droites : $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$, (1)

suivant lesquelles la surface est coupée par le plan $z = 0$. Les plans directeurs sont définis par ces droites et l'axe Oz. L'intersection de

ces plans par un plan $z = z_0$, détermine les asymptotes de l'hyperbole d'intersection du paraboloïde avec le même plan :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z_0.$$

2°. — Les projections des génératrices sur xOy et xOz enveloppent les paraboles d'intersection du paraboloïde par ces plans.

C'est un cas particulier de la proposition du § 401 que nous laissons au lecteur le soin de démontrer directement.

La proposition ne s'applique pas au plan xOy ; nous savons que l'intersection est réduite aux droites (1) ; mais les projections des génératrices sont des droites parallèles qui n'ont pas d'enveloppe (ou, si l'on veut, qui admettent pour enveloppe un point à l'infini).

3°. — Deux génératrices quelconques de systèmes différents se coupent ; deux génératrices du même système ne se coupent pas.

Soit les génératrices de systèmes différents :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2z}{\lambda};$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2z}{\mu}.$$

Les quatre équations à trois inconnues x, y, z, sont compatibles et donnent : $2z = \lambda\mu$, équation qui détermine le point d'intersection.

Pour deux génératrices *différentes* du même système, les équations ne sont pas compatibles. Cela revient à dire que le paraboloïde hyperbolique n'est pas développable.

4°. — Le plan tangent au paraboloïde contient les deux génératrices qui passent par le point de contact.

C'est évident d'après le § 431. Nous laissons au lecteur le soin d'une démonstration directe. Nous lui conseillons de construire avec du fil et une carcasse métallique un paraboloïde et de se rendre compte de la rotation du plan tangent. Les paragraphes suivants lui faciliteront la besogne.

443. Surfaces engendrées par une droite satisfaisant à certaines conditions.

1°. — La droite s'appuie sur deux droites quelconques et reste parallèle a un plan P.

Prenons pour axe Oz la direction B ; pour axe Oy, l'une des génératrices ; pour plan xOy le plan directeur P, enfin pour plan zOx un plan parallèle à la directrice A (fig. 281).

Les équations des projections A′ et A″ de la directrice A sont :

$$y = \overline{OD}\, a, \qquad x = mz.$$

Cherchons les projections de la génératrice MN.

La projection sur xOz est parallèle à Ox d'après l'énoncé. On a $z=\lambda$; par suite, les coordonnées du point P sont :

$$z=\lambda, \qquad x=m\lambda.$$

Les coordonnées du point N sont :

$$x=m\lambda, \qquad y=a, \qquad z=\lambda.$$

Donc l'équation de OE projection de MN sur xOy est :

$$y : a = x : m\lambda.$$

La surface réglée est définie par cette équation et par $z=\lambda$, où λ est la variable. Éliminons ce paramètre ; il reste :

$$myz=ax.$$

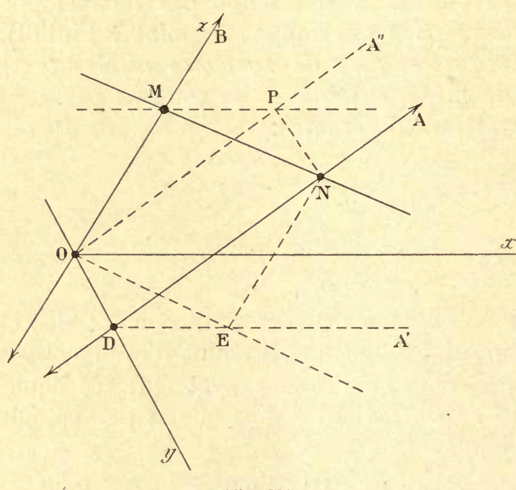


Fig. 281.

La surface est du second degré ; elle n'a pas de centre ; ce n'est pas un cylindre parabolique (§ 337).

Donc c'est un paraboloïde hyperbolique.

Il résulte immédiatement de ce mode de génération *qu'une génératrice d'un des systèmes découpe sur deux génératrices de l'autre système des longueurs proportionnelles ; réciproquement, si une droite mobile s'appuie sur deux droites fixes en y découpant des longueurs proportionnelles, elle reste parallèle à un plan et engendre un paraboloïde hyperbolique.*

2°. — La droite s'appuie sur trois droites parallèles a un plan P.

Prenons la directrice A comme axe Oz, le plan P comme plan xOz, une position de la génératrice comme axe Oy ; enfin choisissons arbitrairement l'axe Ox (fig. 282).

On a pour équations des projections des directrices :

$$B', \quad y=a ; \qquad B'', \quad z=mx ;$$

$$C', \quad y=b ; \qquad C'', \quad z=nx.$$

Donnons-nous la projection OG' d'une génératrice quelconque G : $x=\lambda y$. Cherchons l'équation de la projection G'' sur le plan xOz.

Les coordonnées du point M' sont :

$$y_0=a, \qquad x_0=\lambda a.$$

Celles du point M qui appartient à la directrice B, sont :

$$x_0 = \lambda a, \qquad y_0 = a, \qquad z_0 = mx_0 = ma\lambda.$$

Les coordonnées du point N′ sont :

$$y_1 = b, \qquad x_1 = \lambda b.$$

Celles du point N qui appartient à la directrice C, sont :

$$x_1 = \lambda b, \qquad y_1 = b, \qquad z_1 = nx_1 = nb\lambda.$$

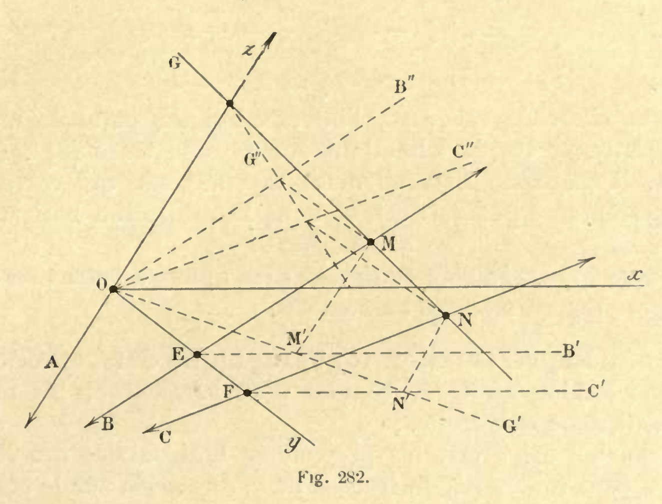


Fig. 282.

Écrivons que la projection G″ de G passe par les projections des points M et N : $\dfrac{x - \lambda a}{\lambda b - \lambda a} = \dfrac{z - ma\lambda}{nb\lambda - ma\lambda}$.

Éliminons λ entre cette équation et $x = \lambda y$:

$$(y^2 - ay)(nb - ma) = (zx - may)(b - a).$$

La surface est une quadrique dépourvue de centre ; elle contient des droites non parallèles. *C'est un paraboloïde hyperbolique.*

444. Ligne de striction du paraboloïde hyperbolique. Écrivons l'un des systèmes de génératrices sous la forme :

$$\frac{1}{a}\left(x - \frac{a\lambda}{2}\right) = \frac{1}{b}\left(y + \frac{b\lambda}{2}\right) = \frac{z}{\lambda} = t.$$

Pour revenir aux notations du § 429, dressons le tableau :

l	m	n	l'	m'	n'
a	b	λ	0	0	1
p	q	r	p'	q'	r'
$a\lambda : 2$	$-b\lambda : 2$	0	$a : 2$	$-b : 2$	0

$$A = b, \quad B = -a, \quad C = 0 ; \quad P = \frac{b\lambda}{2}, \quad Q = \frac{a\lambda}{2}, \quad R = -ab.$$

D'où (§ 429, 4°) : $$t = \frac{b^2 - a^2}{2(b^2 + a^2)} \lambda. \qquad (1)$$

Telle est l'équation de la ligne de striction ; elle établit une relation entre la variable λ qui définit la génératrice, et la variable t qui définit les points de cette génératrice. La génératrice une fois choisie, le point où elle coupe la ligne de striction est déterminé.

Éliminons t et λ au moyen des relations :

$$x = at + \frac{a\lambda}{2}, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda ;$$

il vient : $$ax + by = 0. \qquad (2)$$

La ligne cherchée est donc l'intersection du paraboloïde par un plan passant par Oz et admettant sur xOy la trace (2) : *c'est une parabole.* Il en existe naturellement une seconde qui correspond à l'autre système de génératrices et dont la projection horizontale est la droite : $$ax - by = 0. \qquad (2')$$

Si $a = b$, (*paraboloïde équilatère*) les lignes de striction sont les génératrices qui se croisent au sommet.

445. Représentation topographique des conoïdes.

Prenons le plan directeur comme plan horizontal ; les lignes de niveau sont donc des droites.

Si le conoïde est droit, les projections horizontales des lignes de niveau passent toutes par la trace O de la directrice sur le plan directeur. Les lignes de plus grandes pentes qui coupent à angle droit toutes les lignes de niveau, sont, en projection, des cercles qui ont le point O pour centre.

En particulier il résulte de là que les lignes de plus grande pente d'un hélicoïde à plan directeur sont des hélices, intersections de la surface par des cylindres circulaires qui ont le même axe que l'hélicoïde.

Si le conoïde est oblique, les droites, projections horizontales des lignes de niveau, enveloppent une courbe : les lignes de plus grande pente admettent comme projections les développantes de cette courbe.

Surfaces gauches générales.

446. Surfaces gauches générales.

On appelle *surfaces gauches* celles qui, étant réglées, ne sont pas développables ; on appelle *surfaces gauches générales* celles qui ne sont ni *développables*, ni *conoïdes*. Elles sont engendrées par une droite assujettie à s'appuyer sur *trois courbes directrices quelconques* D_1, D_2, D_3. Prenons un point A sur D_1 ; le point A et la directrice D_2 définissent un cône qui est généralement coupé par D_3 en un nombre

fini de points. Ces traces déterminent avec le point A une ou plusieurs génératrices de la surface.

Si, par un point O, on mène les droites parallèles à toutes les génératrices, on détermine *le cône directeur* (§ 417).

Il est clair que la manière dont nous avons défini au § 430 la surface réglée générale, conduit exactement au même résultat. Si les paramètres l, m, n, p, q, r, sont fonction d'une variable u, on définit une surface sur laquelle il est loisible de choisir trois courbes directrices quelconques D_1, D_2, D_3. Elles définissent complètement la surface. Tout ce que nous avons dit sur le point central, la ligne de striction et le paramètre de distribution, s'applique évidemment.

447. Exemple : biais passé.

Voici un exemple de surface gauche générale qu'on rencontre dans la *coupe des pierres* sous le nom de *biais passé*.

Soit deux cercles parallèles ABCD, A'B'C'D', de même rayon R, situés dans les plans $y = \pm b$, et dont les centres ont pour coordonnées :

$$x = \pm a,$$
$$y = \mp b,$$
$$z = 0.$$

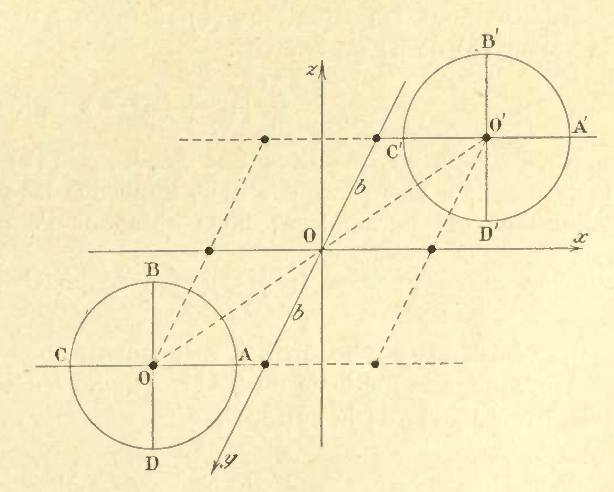


Fig. 283.

Nous pouvons les relier par une infinité de surfaces réglées. En particulier, nous pouvons utiliser : 1° *le cylindre* dont les génératrices sont parallèles à OO' et qui fait correspondre aux points ABCD les points A'B'C'D'; 2° *le cône* de centre O qui fait correspondre aux points ABCD les points C'D'A'D'.

Nous emploierons une surface dont les génératrices s'appuient sur l'axe Oy choisi comme troisième directrice. Aux points ABCD correspondent les points A'D'C'B'.

Les équations des cercles sont :

$$y = -b, \qquad (x-a)^2 + z^2 = R^2, \tag{1}$$
$$y = +b, \qquad (x+a)^2 + z^2 = R^2. \tag{2}$$

Les génératrices devant toutes rencontrer Oy, leurs équations peuvent être prises sous la forme :

$$z = \alpha x, \qquad y = \beta x + \gamma. \tag{3}$$

Deux des paramètres α, β, γ, sont fonction du troisième; donc deux conditions restent à déterminer. Pour cela écrivons que la génératrice (3) s'appuie sur le cercle (1). Nous avons quatre équations entre les trois quantités x, y, z; d'où une condition à satisfaire. De même écrivons que la génératrice (3) s'appuie sur le cercle (2). On obtient :

$$\left.\begin{aligned}(b+\gamma+a\beta)^2+\alpha^2(b+\gamma)^2&=\beta^2R^2,\\ (b-\gamma+a\beta)^2+\alpha^2(-b+\gamma)^2&=\beta^2R^2.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Retranchons les équations (4) membre à membre :

$$\gamma(b+a\beta+\alpha^2 b)=0.$$

La solution $\gamma=0$ correspond au cône, nous la laissons de côté ; il reste donc :

$$\beta=-(b:a)(1+\alpha^2). \quad (5)$$

Additionnons les équations (4) membre à membre et substituons la valeur (5) de β; on trouve :

$$\gamma^2=\frac{b^2}{a^2}\left[R^2+(R^2-a^2)\alpha^2\right]. \quad (6)$$

Nous avons en définitive une génératrice (3) contenant les paramètres α, β, γ, entre lesquels nous imposons les conditions (5) et (6). Éliminons ces paramètres; nous obtenons l'équation de la surface réglée :

$$\left(\frac{ayx}{b}+x^2+z^2\right)^2=R^2x^2+(R^2-a^2)z^2.$$

448. Hyperboloïde à une nappe.

Appliquons la méthode du § 441, 1°, pour déterminer les génératrices rectilignes de la surface :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (1)$$

qui est un *hyperboloïde à une nappe* (§ 336, 2°).

L'équation en z est :

$$\frac{(lz+p)^2}{a^2}+\frac{(mz+q)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Pour que l'équation soit identiquement satisfaite, on doit avoir :

$$\frac{c^2l^2}{a^2}+\frac{c^2m^2}{b^2}=1, \qquad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1, \qquad \frac{lp}{a^2}+\frac{mq}{b^2}=0.$$

On satisfait à ces conditions en posant :

$$\frac{cl}{a}=\cos\varphi, \qquad \frac{cm}{b}=\sin\varphi\,; \qquad \frac{p}{a}=\mp\sin\varphi, \qquad \frac{q}{b}=\pm\cos\varphi.$$

D'où les deux systèmes de génératrices rectilignes :

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\varphi\mp\sin\varphi, \qquad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi\pm\cos\varphi. \quad (2)$$

Additionnons les carrés de ces équations (en choisissant les signes supérieurs ou inférieurs) ; nous retrouvons bien l'équation de l'hyperboloïde. Cela prouve qu'un point qui appartient simultanément aux plans (2), par suite qui appartient à leur intersection, est aussi sur la surface (1).

449. Génératrices de l'hyperboloïde.

1°. — Les génératrices de l'hyperboloïde sont parallèles à celles du cône asymptotique (§ 336) *qui se confond avec le cône directeur* (§ 446).

En effet, la somme des carrés des équations :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi,$$

qui représentent des droites parallèles aux génératrices de l'hyperboloïde menées par le centre, donne l'équation du cône :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Sur le cône, les deux systèmes de génératrices sont confondus.

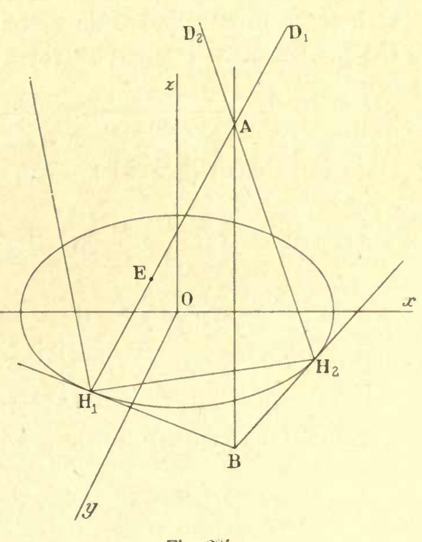
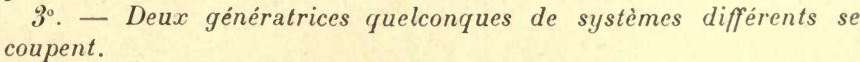


Fig. 284.

2°. — Les projections des génératrices sur les plans principaux enveloppent les coniques d'intersection de l'hyperboloïde par ces plans (fig. 284).

C'est un cas particulier du § 401, dont la démonstration directe ne présente aucune difficulté.



3°. — Deux génératrices quelconques de systèmes différents se coupent.

Soit les génératrices :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\psi + \sin\psi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\psi - \cos\psi.$$

Ces quatre équations à trois inconnues sont compatibles :

$$\frac{z}{c} = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = -\frac{\cos\varphi + \cos\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \operatorname{cotg}\frac{\psi - \varphi}{2}.$$

La rencontre peut avoir lieu à l'infini : les génératrices sont parallèles.

4°. — Deux génératrices du même système ne se coupent pas.

Le procédé de calcul est le même ; les équations ne sont plus compatibles.

Il résulte de là que l'hyperboloïde n'est pas développable.

450. Plan tangent à l'hyperboloïde.

1°. — Il est d'abord évident qu'en tout point de l'hyperboloïde le plan tangent renferme les deux génératrices (§ 431). Le lecteur démontrera la proposition directement.

Calculons le paramètre de distribution.

On peut mettre les génératrices d'un des systèmes sous la forme :

$$\frac{x - a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = \frac{y + b\cos\varphi}{b\sin\varphi} = \frac{z}{c} = t.$$

D'où le tableau (§ 429) :

l	m	n	l'	m'	n'
$a\cos\varphi$	$b\sin\varphi$	c	$-a\sin\varphi$	$b\cos\varphi$	0
p	q	r	p'	q'	r'
$a\sin\varphi$	$-b\cos\varphi$	0	$a\cos\varphi$	$b\sin\varphi$	0

$$A = -bc\cos\varphi, \qquad B = -ac\sin\varphi, \qquad C = ab;$$

$$P = -bc\sin\varphi, \qquad Q = ac\cos\varphi, \qquad R = 0.$$

Portant dans la formule du § 429, *2°*, il vient :

$$\chi = abc\,\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2}{b^2c^2\cos^2\varphi + c^2a^2\sin^2\varphi + a^2b^2}.$$

On vérifiera, à l'aide des formules du § 325, qu'en appelant d la distance de la génératrice au centre de l'hyperboloïde, le paramètre de distribution prend la forme :

$$\chi = abc : d^2.$$

Pour l'hyperboloïde de révolution, on a :

$$d = a = b \qquad \chi = c.$$

2°. — Point central. — Les formules du § 429, *4°*, donnent :

$$t = \frac{c^2(b^2 - a^2)\cos\varphi\sin\varphi}{b^2c^2\cos^2\varphi + c^2a^2\sin^2\varphi + a^2b^2}.$$

La ligne de striction est généralement compliquée, sauf quand l'hyperboloïde est de révolution. On a alors : $a = b$, $t = 0$; c'est le *cercle de gorge*. Conformément à la remarque du § 430, *2°*, il ne coupe pas orthogonalement les génératrices.

451. Surface réglée à directrices rectilignes quelconques.

1°. — Prenons pour directrices trois droites *quelconques* A, B, C. Par A menons un plan parallèle à C ; il coupe B en D. Par B,

menons un plan parallèle à A; il coupe C en E. Enfin, par C, menons un plan parallèle à B; il coupe A en F.

Achevons le parallélipipède. Par son centre O, menons trois droites parallèles à A, B, C; elles nous serviront d'axes *obliques*. Les équations des trois droites sont :

A	$y=b,$	B	$z=c,$	C	$x=-a,$
	$z=-c;$		$x=a;$		$y=-b.$

2°. — Cherchons l'équation d'une droite qui s'appuie sur A, B, C.

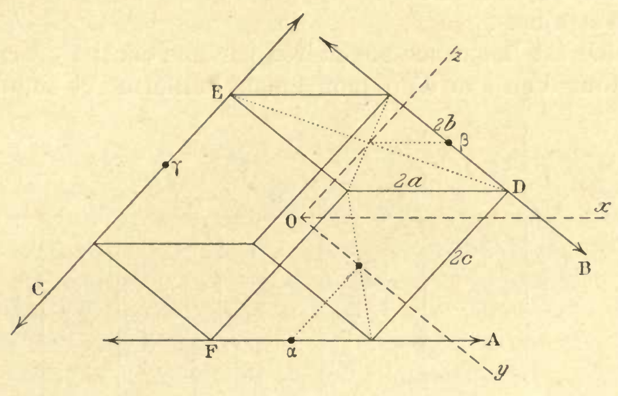


Fig. 285.

Sa projection sur xOz doit passer par la trace β sur ce plan de la droite B; donc l'équation de cette projection est de la forme :

$$x-a=\lambda(z-c), \quad (1)$$

où λ est un paramètre à déterminer.

Sa projection sur yOz doit passer par la trace α sur ce plan de la droite A; donc l'équation de cette projection est de la forme :

$$y-b=\mu(z+c), \quad (2)$$

où μ est un paramètre à déterminer.

Enfin sa projection sur xOy doit passer par la trace γ sur ce plan de la droite C; donc l'équation de cette projection est la forme :

$$x+a=\nu(y+b) \quad (3)$$

Remplaçons dans (3) x et y par leurs valeurs tirées de (1) et de (2); nous obtenons une équation en z *qui doit être identiquement vérifiée*. D'où les conditions :

$$2a-\lambda c-2b\nu-\nu\mu c=0, \qquad \lambda=\mu\nu;$$

ou encore :

$$a-\lambda c-b\nu=0.$$

Substituons à λ et ν leurs valeurs tirées de (1) et de (3); il vient :

$$azy-cxy-bzx+abc=0.$$

C'est une surface *centrée*, puisque rien n'est modifié dans l'équation quand on change x, y, z, en $-x$, $-y$, $-z$. Le degré ne change pas si on la rapporte à des axes rectangulaires (§ 318, 2°). Ce n'est pas un cône : donc c'est un *hyperboloïde à une nappe*.

3°. — Il résulte de là que trois droites *quelconques* font partie de l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde qui par là même se trouve déterminé.

452. Hélicoïdes; hélicoïdes réglés généraux; vis, hélices de propulsion.

1°. — Hélicoïdes.

L'*hélicoïde* est la surface engendrée par une courbe *génératrice* qui tourne autour d'un axe d'un mouvement uniforme et simultanément

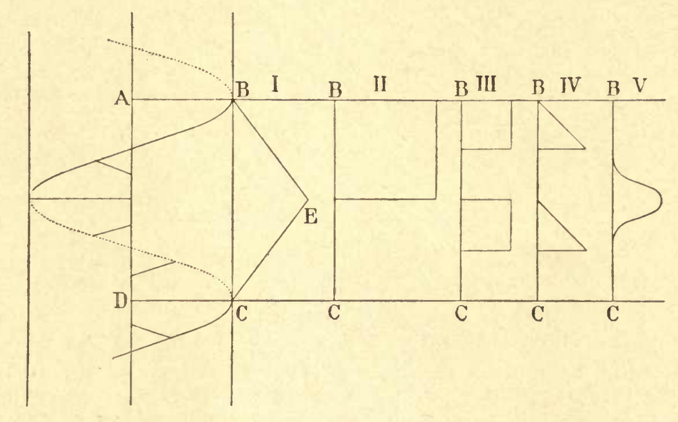


Fig. 286.

se déplace parallèlement à lui avec une vitesse constante. L'enveloppe d'une surface invariable dont tous les points décrivent des hélices coaxiales et de même pas, est un hélicoïde (par exemple, le serpentin, § 398) : la *caractéristique* évidemment invariable peut être choisie comme génératrice.

La section d'un hélicoïde par un cylindre circulaire coaxial est une hélice.

2°. — Hélicoïdes réglés généraux.

Si la génératrice est une droite (ne passant généralement pas par l'axe), l'hélicoïde est *réglé*. L'*hélice de gorge* est le lieu du pied de la perpendiculaire commune à l'axe et à la génératrice. De toutes les hélices de même pas décrites par les points de la génératrice, c'est elle dont les tangentes font le plus grand angle θ avec le plan P normal à l'axe.

Si la génératrice (dont l'angle avec le plan P est ψ) est tangente à l'hélice de gorge (tracée sur un cylindre de rayon r), l'hélicoïde est développable (§ 412) ; on a : $\psi = \theta$, $H = 2\pi r \,.\, \mathrm{tg}\,\psi$, où H est le pas.

Si la génératrice passe par l'axe et lui est normale $(\theta = 0)$, l'hélicoïde est un conoïde droit (§ 439).

On démontrera que *l'hélice de gorge est la ligne de striction; le paramètre de distribution est :*

$$\pm \chi = \frac{H}{2\pi} - r \operatorname{tg} \psi.$$

On retrouve bien $\chi = 0$, pour la surface développable; $\chi = H : 2\pi$, pour le conoïde. Pour $H = 0$, l'hélicoïde dégénère en hyperboloïde de révolution; le paramètre de distribution est $r \operatorname{tg} \psi$, résultat conforme à celui du § 450. Pour $\psi = \pi : 2$, l'hyperboloïde lui-même dégénère en un cylindre; le paramètre devient infini (§ 433).

3°. — Vis (fig. 286).

Imaginons une figure ABECD, de hauteur $\overline{AD} = H$, se déplaçant de manière que AD soit toujours sur l'axe du cylindre et que le point B décrive une hélice. La saillie BEC engendre le filet d'une vis. Les figures I, II, ..., V, montrent divers profils.

Si le profil contient des droites normales à l'axe de l'hélice, elles décrivent des *hélicoïdes à plan directeur* (§ 439); c'est ce qui a lieu pour II et III qui donnent *des vis à filets carrés.* La figure III représente une vis *double;* le cylindre est entouré de deux hélices de même pas, décalées d'un demi-pas l'une par rapport à l'autre.

Si le profil contient des droites inclinées (I et IV, vis triangulaires simple et double), la surface est *gauche générale.* Elle est engendrée par une droite qui s'appuie sur trois directrices : l'axe de l'hélice, l'hélice, et une seconde hélice de même axe et *de même pas* que la première, tracée sur un cylindre de rayon plus grand. La droite BE prolongée passe par l'axe; elle s'appuie sur l'hélice et, entre autres, sur une seconde hélice décrite par le point E.

4°. — Hélices de propulsion.

Au § 439, *3°*, nous avons dit les défauts de l'hélice propulsive ordinaire qui est un hélicoïde à plan directeur. On la remplace quelquefois par une surface réglée obtenue en prenant pour directrices une droite et deux hélices admettant cette droite pour axe : la première de rayon r et de pas H, la seconde de rayon $2r$ et de pas 2H.

Les deux hélices sont disposées de manière que la génératrice du milieu de l'aile soit normale à l'axe.

CHAPITRE XXI

COURBURES DES SURFACES.

453. Indicatrice.

1°. — Cherchons les propriétés d'une surface autour d'un point O. Prenons ce point pour origine des coordonnées, la normale à la surface (§ 375) pour axe des z (fig. 287). Posons comme d'habitude :

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}; \qquad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Puisque le plan xOy est tangent à la surface au point O, nous y avons : $p=q=0$. Coupons la surface par un plan infiniment voisin de xOy. La formule de Maclaurin appliquée à la fonction $z=f(x,y)$, et bornée aux termes du second degré (les termes du premier disparaissent en vertu du choix des axes), donne :

$$2z=rx^2+2sxy+ty^2. \qquad (1)$$

r, s, t, doivent être traitées comme des constantes : ce sont les valeurs des fonctions r, s, t, pour les valeurs $x=y=0$, des variables.

Couper la surface par un plan parallèle à xOy, c'est prendre une valeur constante de z ; d'où la proposition : *l'intersection de la surface par un plan parallèle au plan tangent et très voisin de ce plan est une conique,* si le point O n'a pas de propriétés particulières.

Donnons à z différentes valeurs : nous obtenons des coniques homothétiques et *ayant leurs centres sur l'axe* Oz *qui est la normale à la surface.* Ceci demande une explication.

2°. — Quand nous coupons une surface du second degré par des plans P parallèles au plan tangent relatif à un point O et situés à distance finie de ce point, nous obtenons des coniques semblables (§ 338, 2°), *mais dont les centres sont sur une droite* (diamètre conjugué des plans P) *qui n'est généralement pas normale à la surface* (§ 341). Comment, pour une surface *quelconque,* trouvons-nous les centres des coniques sur la normale ?

La contradiction se résout par le fait que z est un infiniment petit

du second ordre par rapport à x et à y considérés comme du premier. Pour obtenir une conique dont les rayons vecteurs sont du premier ordre, il faut couper par un plan dont la distance au plan tangent est un infiniment petit du second. L'erreur commise en plaçant le centre des coniques sur la normale, erreur proportionnelle à z, est donc négligeable devant x et y.

C'est exactement pour la même raison que nous pouvons remplacer (fig. 69) un élément de courbe plane voisin d'un point O par un élément de cercle *symétrique par rapport à la normale en* O (§ 92, 3° et § 10, 3°).

On résume ce qui précède en disant qu'*on peut assimiler une surface quelconque au voisinage d'un de ses points, non seulement à un élément de la surface d'une quadrique, mais plus précisément à l'élément qui admet comme centre l'extrémité d'un des axes de symétrie d'une quadrique.*

La conique (1) est l'*indicatrice* de la surface pour le point O.

3°. — Si l'élément de surface est assimilable à l'élément voisin d'un des axes d'un ellipsoïde, la conique est une ellipse. On pourrait aussi bien l'assimiler à l'élément de surface voisin de l'extrémité de l'axe réel d'un hyperboloïde à deux nappes ou d'un paraboloïde elliptique.

Comme cas particulier, l'ellipse est un cercle : le point correspondant de la surface est appelé *ombilic;* la quadrique est de révolution.

Si l'élément de surface est assimilable à l'élément voisin d'un des axes réels d'un hyperboloïde à une nappe, ou du point où l'axe Oz rencontre un paraboloïde hyperbolique (fig. 215), la conique est une hyperbole. Le plan xOy coupe la surface suivant deux droites qui sont les asymptotes des hyperboles d'intersection. Pour $z > 0$, elles ont leurs axes réels suivant deux certaines directions ; pour $z < 0$, elles sont *conjuguées des précédentes* (§ 121) et ont leurs axes réels suivant les mêmes directions. Toutes ces courbes admettent les mêmes asymptotes.

Rappelons que la courbe d'intersection par un plan voisin de xOy peut s'étendre loin du point O et avoir plusieurs branches (c'est ce qui arrive, par exemple, pour les plans voisins du plan tangent qui coupe le tore suivant une lemniscate, § 399); mais nous n'avons à considérer que les portions de l'intersection qui sont infiniment voisines du point O ; ce sont elles qu'on peut assimiler à une hyperbole.

4°. — La conique peut enfin se réduire à deux droites *parallèles :* le second membre de (1) est un carré parfait ; le point correspondant de la surface est dit *parabolique.*

Ici encore une explication est nécessaire.

Quand on coupe un cylindre par un plan voisin d'un plan tangent, l'intersection se réduit effectivement à deux droites parallèles. Mais si l'on coupe un cône par un plan voisin d'un plan tangent, on ne voit pas tout d'abord comment l'intersection est assimilable à deux

droites *parallèles*. Si le cône est du second degré, nous savons (§ 421, *3°*) que c'est une *parabole*.

La réponse à cette difficulté est la même qu'au *2°*. Un déplacement z du second ordre suffit à obtenir pour l'intersection des dimensions transversales du premier. Par exemple, dans le cas d'un cône du second degré, la parabole est infiniment allongée; *au voisinage du point considéré,* elle se réduit avec autant d'approximation qu'on veut à deux droites parallèles.

454. Rayons de courbure des sections normales à la surface.

On appelle *sections normales* les sections AOB par un plan mené par la normale à la surface (c'est ici l'axe Oz). Elles sont définies par l'angle φ que fait avec Ox la trace OD du plan sécant sur le plan xOy (fig. 287).

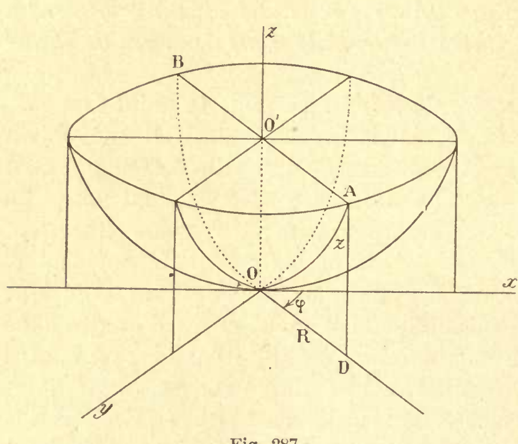


Fig. 287.

Évaluons le rayon vecteur $\overline{O'A} = R$, de l'indicatrice ; cela revient à exprimer son équation en coordonnées polaires :

$$2z = R^2 (r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi).$$

Nous avons montré au § 92, *3°*, que le rayon de courbure ρ d'une courbe AOB est la limite du rapport $R^2 : 2z$. Par suite, les rayons de courbure ρ des sections normales de la surface sont donnés par la formule :

$$1 : \rho = r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi.$$

De là résultent plusieurs théorèmes fondamentaux connus sous le nom de théorèmes de Meusnier.

2°. — Les rayons de courbure sont respectivement maximum et minimum pour les sections rectangulaires qui correspondent aux axes de l'indicatrice ; on les nomme *sections principales*.

Si l'indicatrice est une ellipse (I, fig. 288), les centres de courbure des sections normales sont tous du même côté de la surface. Ils sont compris entre les centres C_1 et C_2 qui correspondent aux sections principales. Si la conique dégénère en cercle (ombilic), les points C_1 et C_2 sont confondus ; toutes les sections ont même centre de courbure.

Si l'indicatrice est une hyperbole (III, fig. 288), les centres de courbure des sections normales sont de part et d'autre de la surface.

Comme le rayon vecteur R est infini pour les sections qui correspondent aux asymptotes de l'indicatrice, ρ est également infini : le centre de courbure est à l'infini sur la normale. Donc les centres de courbures sont tous au delà des points C_1 et C_2. Ils vont de C_1 à $+\infty$ sur la normale, quand la section est comprise dans un des angles des asymptotes ; ils vont de $-\infty$ à C_2, quand la section est comprise dans l'autre angle.

Enfin quand l'indicatrice se réduit à deux droites (*point parabo-*

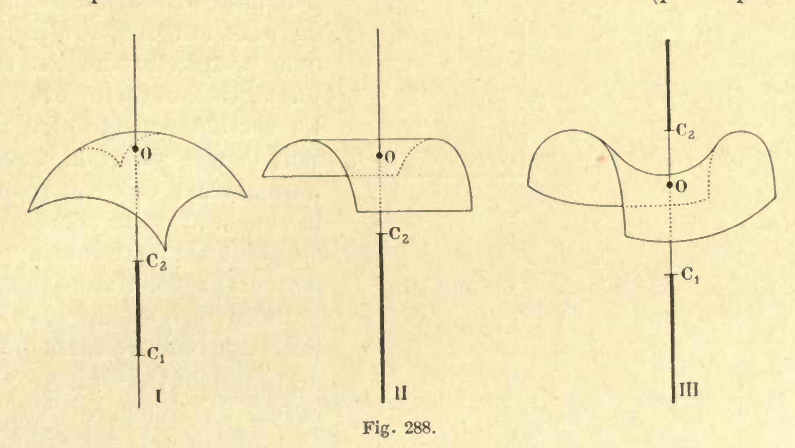


Fig. 288.

lique ; II, fig. 288), les centres de coubure, tous du même côté de la surface, sont au delà d'un point C_2 qui correspond à la section normale aux deux droites. Ils occupent sur la normale toutes les positions depuis C_2 jusqu'à ∞. On peut assimiler l'indicatrice réduite à deux droites parallèles, à une ellipse dont un des axes devient infini, l'autre axe restant fini et à distance finie.

3°. — Étudions la variation ρ quand φ varie. Pour le faire commodément, rapportons l'indicatrice à ses axes. Soit ρ_1 le maximum, ρ_2 le minimum de ρ. On peut écrire :

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\varphi}{\rho_1}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}.$$

Deux sections également inclinées sur une section principale ont des rayons de courbure égaux et de même signe. On obtient, en effet, la même valeur de ρ pour $\pm\varphi$. Ce résultat tient à ce que la surface est assimilable à l'élément voisin d'un axe de symétrie d'une quadrique. Nous savons que par un tel axe passent deux plans rectangulaires *de symétrie* qui sont précisément les sections principales.

La somme des courbures de deux sections rectangulaires est constante. En effet, remplaçons φ par $\varphi+\pi:2$. On a :

$$\frac{1}{\rho'}=\frac{\sin^2\varphi}{\rho_1}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho_2}; \qquad \text{d'où :} \quad \frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}.$$

Pour un point parabolique, on a : $\rho_1=\infty$, $\rho=\rho_2:\cos^2\varphi$.

Soit, par exemple, les sections normales d'un cylindre circulaire droit. Quand la section normale est une section droite ($\varphi = 0$), le rayon de courbure ρ_2 est le rayon du cercle de base. A mesure que la section normale fait un angle plus grand avec la section droite, ρ croît ; il devient infini quand $\varphi = \pi : 2$.

455. Sections inclinées.

Considérons les sections de la surface par des plans passant tous par une droite quelconque du plan tangent, droite que nous prendrons pour axe Oy. La section normale est OB. La section par un plan faisant l'angle θ avec la section normale est OC. Cherchons la courbure de la courbe OC au point O ; pour cela, appliquons la proposition du § 92, *3°*.

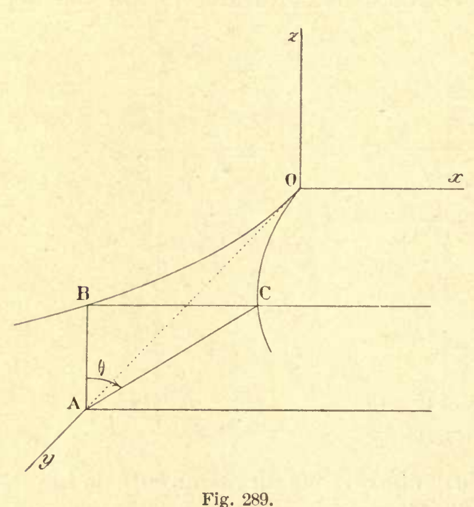


Fig. 289.

Le rayon de courbure ρ' de la section inclinée est la limite du quotient $\overline{OA}^2 : 2\,\overline{AC}$; le rayon de courbure ρ de la section normale est la limite du quotient $\overline{OA}^2 : 2\,\overline{AB}$. Donc le rapport $\rho' : \rho$ a pour limite :

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \cos\theta\,; \qquad \rho' = \rho\cos\theta.$$

Le rayon de courbure d'une section oblique est la projection sur le plan de cette courbe du rayon de courbure de la section normale correspondante. Autrement dit, considérons les sections par des plans passant par la droite Oy menée dans le plan tangent à la surface (fig. 290) : le lieu de leurs centres de courbure C′ est une circonférence menée dans le plan xOz normal à Oy ; elle a comme diamètre le segment déterminé par le point O et par le centre de courbure C de la section normale passant par Oy.

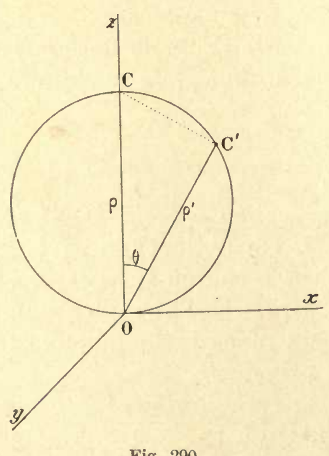


Fig. 290.

Pour $\theta = \pi : 2$, on a $\rho' = 0$. Une section très inclinée a naturellement un rayon de courbure quasi nul. Nous conseillons au lecteur de bien fixer dans son esprit le sens de cette proposition en coupant un pain qui est une surface courbe maniable et peu coûteuse.

456. Congruence des normales, normalies.

Écrivons l'équation de la normale à la surface en un point de coordonnées x,y,z ; X Y Z, sont les coordonnées courantes (§ 375) :

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=-(Z-z), \quad \text{ou encore :}$$

$$(X-x)+p(Z-z)=0, \qquad (Y-y)+q(Z-z)=0.$$

x, y, z, p, q, sont des fonctions des deux variables x, y ; *les normales forment donc une congruence.* A la vérité, cette congruence n'est pas la plus générale ; toute congruence ne peut pas être considérée comme formée par les normales à une surface. Mais les théorèmes généraux s'appliquent évidemment à la congruence des normales comme aux autres.

Donc par toute normale passent deux surfaces développables formées d'autres normales ; on les appelle *normalies* (§ 435).

Il s'agit de grouper les normales suivant les normalies.

Ces normalies coupent la surface suivant deux faisceaux de courbes qu'on appelle *lignes de courbure ;* par tout point de la surface passent donc deux lignes de courbure. Il revient au même de déterminer les normalies ou les lignes de courbure (fig. 291).

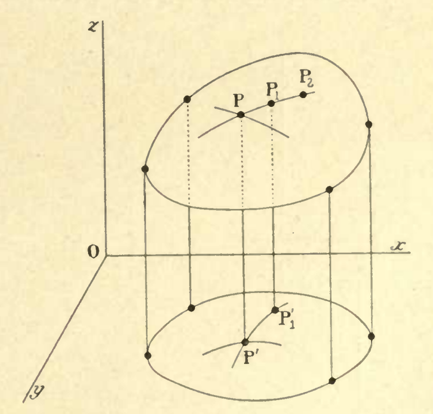


Fig. 291.

Puisque nous prenons x et y comme variables indépendantes, tout point P de la surface est déterminé par un point P′ du plan xOy ; nous élevons en ce point une perpendiculaire sur laquelle nous prenons une longueur P′P convenable. Déterminer les lignes de courbure revient donc à tracer leurs projections sur xOy ; en particulier, à déterminer à partir de tout point P′ de ce plan les pentes $dy : dx$ de ces projections.

Écrivons donc que les normales voisines du point P, *dont les pieds sont sur une certaine courbe* PP_1 de projection $P'P'_1$, se coupent. Rappelons qu'on pose :

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial q}{dy}.$$

457. Lignes de courbure.

1°. — On a pour deux points voisins :

$$(X-x)+p(Z-z)=0, \tag{1}$$

$$(X - x - dx) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right)\left(Z - z - \frac{\partial z}{\partial x} dx - \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = 0. \quad (2)$$

Remplaçons les quotients différentiels par les notations convenues. Posons $I = dy : dx$; retranchons (1) de (2); négligeons les quantités du second ordre. Il reste :

$$-1 + (r + sI)(Z - z) - p(p + qI) = 0,$$

$$Z - z = (1 + p^2 + pqI) : (r + sI). \quad (3)$$

Recommençons les mêmes calculs pour la seconde équation de la normale :

$$(Y - y) + q(Z - z) = 0. \quad (4)$$

On trouve :

$$Z - z = [pq + (1 + q^2) I] : (s + tI). \quad (5)$$

2°. — L'équation (1) représente un plan M parallèle à Oy; l'équation (2) représente un plan voisin M' également parallèle à Oy. Ils se coupent suivant une droite D évidemment parallèle à Oy.

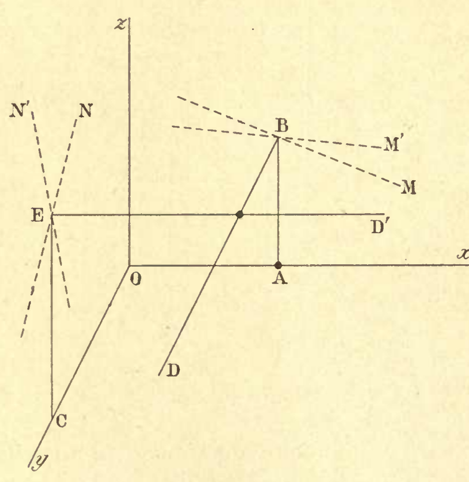


Fig. 292.

L'équation (4) représente un plan N parallèle à Ox; son intersection avec le plan voisin est une droite D' parallèle à Ox. Pour que les normales se coupent, il faut que D et D' se coupent, par suite que les équations (3) et (5) fournissent les mêmes valeurs pour

$$Z = \overline{AB} = \overline{CE}.$$

En effet, si quatre plans passent par un point, leurs intersections prises deux à deux passent toutes par ce point.

On a donc la condition :

$$[pq + (1 + q^2) I](r + sI) = (1 + p^2 + pqI)(s + tI).$$

$$[(1 + q^2)s - pqt] I^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] I + [pqr - (1 + p^2)s] = 0. \quad (6)$$

3°. — Comme nous l'avons prévu, nous trouvons pour chaque point P de la surface deux directions (correspondantes aux directions I sur le plan xOy) pour lesquelles les normales infiniment voisines se coupent : elles déterminent par définition les éléments *des lignes de courbure* qui passent par le point P. De P nous allons en P_1.

Recommençons le calcul pour P_1 : nous déterminons un nouvel

élément P_1P_2 de la même ligne de courbure. Et ainsi de suite. Nous traçons ainsi une ligne tout le long de laquelle les normales à la surface rencontrent les normales infiniment voisines.

4°. — Les normales à une surface forment donc deux faisceaux de surfaces développables. Les arêtes de rebroussement de ces surfaces constituent une surface à deux nappes qui est la *caustique* (§ 435) de la surface primitive. L'Optique géométrique se réduit à

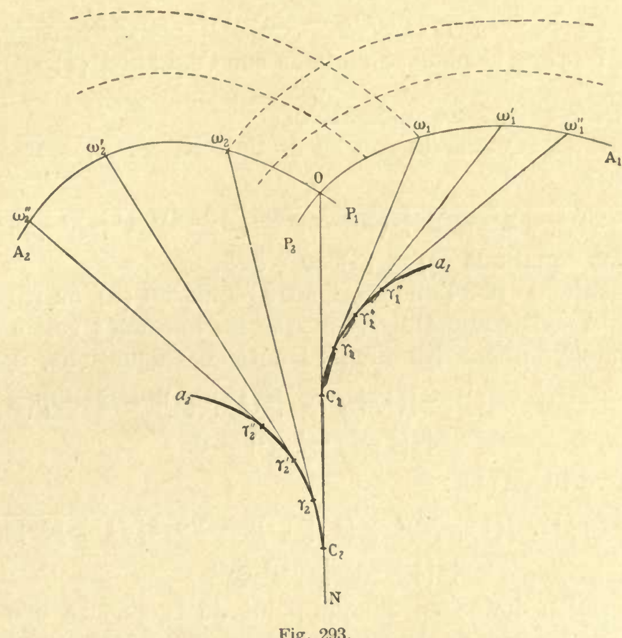


Fig. 293.

l'étude des caustiques de surfaces particulières dites *surfaces d'onde*.

5°. — Le calcul fournit l'équation des lignes de courbure.

Résolvons (6) par rapport à I :

$$I = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Intégrons ; nous obtenons, *grâce à la constante arbitraire d'intégration*, un faisceau de courbes qui sont les projections sur xOy de l'un des faisceaux des lignes de courbure.

La figure 293 représente une surface, les faisceaux des lignes de courbure et les arêtes de rebroussement qui correspondent à deux d'entre elles. Elle est complétée par la figure 300.

458. Propriétés des lignes de courbure.

1°. — Prenons l'axe Oz pour normale à la surface ; on a $p = q = 0$. L'équation (6) se simplifie et devient :

$$sI^2 + (r - t)\,I - s = 0. \qquad (1)$$

Le produit des racines est égal à -1.

Donc les lignes de courbure se coupent à angle droit.

2°. — Montrons qu'en tous leurs points elles sont tangentes aux sections principales. Déterminons les directions qui correspondent aux axes de l'indicatrice (§ 453) ; il faut exprimer que :

$$r \cos^2\varphi + 2s \sin\varphi \cos\varphi + t \sin^2\varphi,$$

est maximum ou minimum. On trouve :

$$-r \cos\varphi \sin\varphi + s(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + t \sin\varphi \cos\varphi = 0.$$

Posons $I = \operatorname{tg}\varphi$; nous retombons sur l'équation (1).

459. Rayons de courbure.

Calculons les rayons de courbure. Soit X, Y, Z, leurs coordonnées. On a :

$$\rho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2} = (Z-z)\sqrt{1+p^2+q^2}, \quad (1)$$

en vertu des équations (2) et (3) du § 375.

$Z - z$ est donné par l'une ou l'autre équation (3) ou (5) du § 457, équations qui sont compatibles, puisque les normales voisines se rencontrent par hypothèse. Éliminons I entre ces équations, il vient :

$$(rt - s^2)(Z-z)^2 - [(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs](Z-z) + (1+p^2+q^2) = 0.$$

D'où en vertu de (1) :

$$(rt - s^2)\rho^2 - [(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs]\sqrt{1+p^2+q^2} \cdot \rho + (1+p^2+q^2)^2 = 0 \quad (2)$$

Cette équation donne en chaque point de la surface deux valeurs de ρ *qui sont les rayons de courbure principaux.* On a (§ 41) :

$$\rho_1\rho_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2},$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs}{rt-s^2}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Pour retrouver l'expression de la courbure d'une courbe plane tracée dans le plan xOz, considérons-la comme l'intersection avec xOz d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oy. On a :

$$rt - s^2 = 0, \qquad q = t = s = 0 ;$$

$$r\rho + (1+p^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \qquad \rho = -\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2z}{dx^2}.$$

460. Ombilics.

1°. — Cherchons les conditions pour qu'un point de la surface soit un *ombilic.* Il faut que l'indicatrice y soit un cercle, par conséquent que les sections principales ou les lignes de courbure y soient indéterminées.

Écrivons donc que dans l'équation (6) du § 457, les coefficients des puissances de I (y compris la puissance 0) sont nuls. On trouve les deux conditions : $\dfrac{1+p^2}{r}=\dfrac{1+q^2}{t}=\dfrac{pq}{s}$. (1)

2°. — Ellipsoïde. — Cherchons les ombilics de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On trouve aisément :

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z}, \qquad q=-\frac{c^2y}{b^2z}; \qquad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}.$$

$$t=-\frac{b^2c^2z^2+c^4y^2}{b^4z^3}, \qquad r=-\frac{a^2c^2z^2+c^4x^2}{a^4z^3}.$$

On vérifiera qu'il existe douze ombilics, quatre dans chacun des plans de symétrie.

Seuls sont réels ceux du plan xOz, dans l'hypothèse $a>b>c$.

Posons $y=0$; $q=s=0$; des équations (1), il ne reste que la première, puisque le rapport $pq:s$ est indéterminé. On trouve :

$$y=0, \qquad x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \qquad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

$$\frac{z}{x}=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

Cette formule concorde bien avec celle du § 340, qui donne les directions des traces sur xOz des sections circulaires. Les directions que nous venons de déterminer sont, en effet, les conjuguées des précédentes.

Or nous savons (§ 111) que le produit des pentes de deux directions conjuguées, dans une ellipse dont les axes sont a et c, est $-c^2:a^2$. Corrélativement on a :

$$-\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\cdot\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}=-\frac{c^2}{a^2}.$$

3°. — Paraboloïde elliptique.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

$$p=\frac{x}{a^2}, \qquad q=\frac{y}{b^2}; \qquad r=\frac{1}{a^2}, \qquad s=0, \qquad t=\frac{1}{b^2};$$

$$\frac{a^4+x^2}{a^2}=\frac{xy}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{0}=\frac{b^4+y^2}{b^2}.$$

Il faut poser $x=0$, ou $y=0$.

Pour $x=0$, on a : $\quad y=\pm\sqrt{b^2(a^2-b^2)}, \qquad z=(a^2-b^2):2.$

Il existe donc deux ombilics dans le plan yOz. Ils sont réels si $a>b$. Pour $y=0$, on trouve deux nouveaux ombilics évidemment imaginaires.

Ce résultat pouvait aisément se prévoir en cherchant à quelle condition les sections du paraboloïde elliptique sont circulaires (sections cycliques). Le plan tangent parallèle aux plans cycliques touche la surface suivant un ombilic.

4°. — La surface réelle dont tous les points sont des ombilics, est la sphère.

461. Points paraboliques; surfaces développables.

1°. — Aux points paraboliques, l'indicatrice se réduit à deux droites parallèles (§ 453, *4°*) :

$$rx^2 + 2sxy + ty^2,$$

est un carré parfait; d'où la condition $rt - s^2 = 0$.

Un des rayons de courbure *principaux* est infini; la section principale correspondante est parallèle aux deux droites qui constituent l'indicatrice.

2°. — Nous avons démontré, au § 416, qu'en tout point d'une surface développable la condition $rt - s^2 = 0$, est satisfaite. Elle exprime que tous les points d'une telle surface sont paraboliques, qu'en tous les points un des rayons de courbure *principaux* est infini. La section principale correspondante est la génératrice rectiligne.

Par suite, un des faisceaux de lignes de courbure des surfaces développables est constitué par les génératrices; les normalies correspondantes sont des plans. L'autre faisceau se compose des courbes orthogonales aux génératrices, si l'on veut, des développantes gauches de l'arête de rebroussement (§ 427).

Sur un cylindre, ces courbes sont des sections droites; sur un cône, ce sont les intersections par les sphères ayant leurs centres au sommet.

3°. — Sur l'arête de rebroussement, un des rayons de courbure principaux est nul, l'autre étant fini ou infini : tous les rayons de courbure sont donc nuls, sauf ce dernier. On peut considérer l'indicatrice comme formée de deux droites *confondues;* c'est pourquoi nous rapprochons ce cas des points paraboliques. Comme limite, tous les rayons de courbure peuvent être nuls; c'est ce qui arrive au sommet d'un cône.

462. Lignes asymptotiques.

1°. — Les *lignes asymptotiques* sont tangentes en chaque point de la surface à une asymptote de l'indicatrice : tout le long de ces lignes, le rayon de courbure de la section droite qui leur est tangente, est infini. D'après le § 455, on a $\rho' = \rho \cos\theta = \infty$, pour toute section inclinée passant par l'asymptote de l'indicatrice ($\rho = \infty$), excepté pour $\theta = \pi : 2$, où ρ est indéterminé. *Donc la ligne asymptotique a le plan tangent à la surface pour plan osculateur.* Écrivons donc que le plan tangent :

$$z - Z = p(x - X) + q(y - Y),$$

contient le point de tangence et *certains points voisins jusqu'au second ordre près*. On trouve immédiatement :

$$d^2z = pd^2x + qd^2y.$$

Mais on a identiquement : $dz = pdx + qdy$,

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + dpdx + dqdy.$$

D'où : $dpdx + dqdy = 0$;

$$(rdx + sdy)dx + (sdx + tdy)dy = 0, \qquad rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0.$$

Posons $\vartheta = dy : dx$. Les pentes des projections horizontales des lignes asymptotiques sont données par l'équation :

$$t\vartheta^2 + 2s\vartheta + r = 0. \tag{1}$$

2°. — Hyperboloïde a une nappe. — Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Utilisons les valeurs r, s, t, calculées au § 460, 2°, où nous changeons le signe de c^2. Remplaçons z par sa valeur. Des transformations faciles mettent (1) sous la forme :

$$b^2 + a^2\vartheta^2 = (y - x\vartheta)^2. \tag{2}$$

Nous obtenons une solution en considérant ϑ comme une constante; les projections sur xOy des lignes asymptotiques sont les deux faisceaux de droites :

$$y = x\vartheta \pm \sqrt{b^2 + a^2\vartheta^2}.$$

Pour démontrer (ce qui est évident *a priori*) que ce sont les projections des génératrices rectilignes, il suffit de prouver qu'elles enveloppent l'ellipse de gorge. Dérivons (2) par rapport à ϑ :

$$a^2\vartheta = -x(y - x\vartheta); \qquad \vartheta(a^2 - x^2) = -xy. \tag{3}$$

Éliminons ϑ entre (2) et (3) ; il vient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui est l'ellipse de gorge.

3°. — Paraboloïde hyperbolique. — Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

$$r = 1 : a^2, \qquad s = 0, \qquad t = -1 : b^2.$$

D'où : $\vartheta = \pm b : a$.

Les lignes asymptotiques sont encore les génératrices rectilignes, ce qui était évident *a priori*.

463. Surfaces gauches.

Nous savons que tout plan π qui passe par une génératrice, coupe la surface suivant une courbe C. La génératrice et la courbe C ont

un point P commun pour lequel le plan sécant π est tangent à la surface. La génératrice et la tangente à la courbe C au point P sont les deux asymptotes de l'indicatrice qui correspond au point P. En effet, la normale à la surface en P est normale au plan π; les sections normales déterminées comme nous venons de le dire, ont une courbure infinie, puisqu'elles sont dans le plan π.

Donc les surfaces gauches sont à courbures opposées. Cela revient à dire (§ 459) que $rt - s^2 < 0$. A la limite, on retrouve les surfaces développables pour lesquelles $rt - s^2 = 0$.

Les plans principaux au point P sont déterminés par les bissectrices des droites ci-dessus définies dans le plan π (génératrice, tangente à la courbe C).

464. Surfaces minima.

1°. — On désigne sous le nom de *surfaces minima* celles dont les rayons de courbure principaux sont en chaque point égaux et de signes contraires : $\rho_1 + \rho_2 = 0.$

L'indicatrice est partout une hyperbole équilatère.

D'après l'équation (2) du § 459, la condition à satisfaire identiquement est :

$$(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs = 0.$$

Nous reviendrons plus loin sur les surfaces de révolution minima. Étudions pour l'instant l'hélicoïde à plan directeur.

2°. — Hélicoïde a plan directeur.

L'équation de l'hélicoïde à plan directeur est (§ 439) :

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{z}{H}, \qquad z = \frac{H}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

On trouve :

$$p = -\frac{H}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad q = \frac{H}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$r = \frac{H}{2\pi}\frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad s = \frac{H}{2\pi}\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad t = -\frac{H}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Comme $t = -r$, la condition devient :

$$(q^2 - p^2)r = 2pqs,$$

qui est vérifiée.

Les rayons de courbure principaux sont :

$$\rho = \pm \frac{1 + p^2 + q^2}{\sqrt{s^2 - rt}} = \frac{2\pi}{H}(x^2 + y^2) + \frac{H}{2\pi}.$$

Effectivement pour $H = 0$, l'hélicoïde devient un plan normal à l'axe de l'hélice : $\rho = \pm\infty$. Pour $H = \infty$, l'hélicoïde devient un plan passant par l'axe de l'hélice ; on a encore $\rho = \pm\infty$.

Surfaces de révolution.

465. Lignes de courbure; normalies.

1°. — Par raison de symétrie, les lignes de courbure sont les méridiens (traces des plans passant par l'axe de révolution) et les parallèles (traces des plans normaux à l'axe de révolution). Les normalies correspondantes sont donc des plans et des cônes (fig. 294).

Dans le premier cas, les deux nappes de la surface développable sont repliées l'une sur l'autre, et sur le plan; leur arête de rebroussement est la développée FGHK de la courbe méridienne. Le lieu de ces arêtes de rebroussement (qui constitue l'une des nappes de la caustique, § 435) est la surface de révolution obtenue en faisant tourner FGHK autour de l'axe.

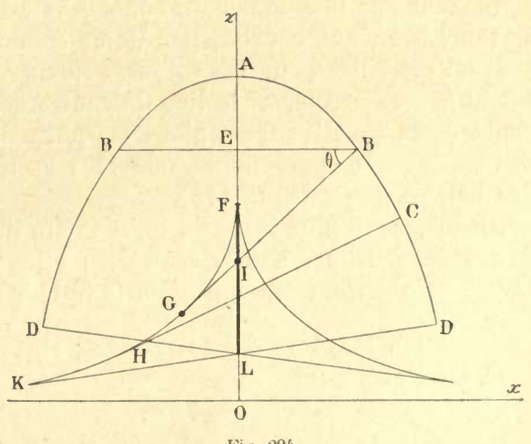


Fig. 294.

Dans le second cas, la surface développable est un cône dont le sommet est sur l'axe de révolution. Le lieu des sommets constitue la seconde nappe de la caustique qui se réduit à un morceau de l'axe de révolution.

Une remarque essentielle s'impose ici. Le lecteur serait tenté de croire qu'en tous points de la surface de révolution les sections principales sont le méridien *et le plan du parallèle*. C'est vrai pour le méridien qui est une section normale; c'est évidemment faux pour le plan du parallèle qui n'en est pas une. Les sections principales en chaque point sont un élément du méridien, et un élément de section droite *tangent au parallèle*.

2°. — Il peut arriver que les deux nappes de la caustique s'évanouissent en des courbes; la surface *supposée de révolution* est alors un *tore* engendré par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan (§ 399). L'une des courbes est un morceau de l'axe de révolution, comme dans le cas général; l'autre est le cercle lieu des centres du cercle mobile.

3°. — Les rayons de courbure au point B sont $\overline{BG}$ (rayon de

courbure de la méridienne) et $\overline{BI}$. Il est clair que le rayon de courbure du parallèle BEB est $\overline{BE}$; conformément au § 455, on a :

$$\overline{BE} = \overline{BI} \cdot \cos \theta.$$

4°. — Une surface de révolution peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère de rayon variable dont le centre décrit une droite (axe de révolution); les lignes de courbure formant l'un des systèmes sont circulaires (*parallèles*) (§ 378).

La proposition est plus générale : pour toute surface enveloppe d'une sphère dont les éléments dépendent d'un paramètre, les lignes de courbure de l'un des systèmes sont des cercles. La *caractéristique* (§ 397) est alors un cercle suivant lequel la sphère est tangente à la surface enveloppe; les normales menées à la sphère ou à l'enveloppe forment un cône de révolution (surface développable, *normalie*) et passent par le sommet du cône. L'une des nappes de la caustique s'évanouit en une courbe, lieu de ce sommet.

Il en est ainsi pour les *surfaces canaux* (§ 398); la caractéristique est un grand cercle. Si le lieu du centre des sphères (nappe évanouissante de la caustique) est plan, les normalies de l'autre système sont des surfaces d'égale pente dont les arêtes de rebroussement sont des hélices générales (§ 413).

Disons, sans plus insister, qu'il existe des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont circulaires; elles sont appelées *cyclides de Dupin* et obtenues par *inversion* (§ 391) à partir du tore.

466. Rayons de courbure ; lignes asymptotiques.

1°. — Posons :

$$p = \partial z : \partial x, \qquad p' = \partial p : \partial x.$$

Le rayon de courbure de la méridienne est (§ 459) :

$$\rho_1 = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} : p'.$$

La normale au point B de coordonnées x, y, a pour équation :

$$(X - x) + p(Z - z) = 0.$$

Le point I a pour coordonnées :

$$X = 0, \qquad Z - z = \frac{x}{p};$$

d'où :

$$\overline{IB} = \sqrt{x^2 + (Z - z)^2} = x\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} = \frac{x}{p}\sqrt{1 + p^2};$$

D'où les formules :

$$\rho_1 = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'}, \qquad \rho_2 = \frac{x}{p}\sqrt{1 + p^2};$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \sqrt{1 + p^2}\left[\frac{x}{p} + \frac{1 + p^2}{p'}\right], \qquad \rho_1\rho_2 = \frac{x}{pp'}(1 + p^2)^2.$$

2°. — Un des rayons de courbure principaux devient infini pour $p' = 0$ (la méridienne présente un point d'inflexion) ou pour $p = 0$ (la surface est tangente à un plan normal à l'axe de révolution). Suivant le parallèle d'inflexion AI et le parallèle de contact CD, les points de la surface sont paraboliques (fig. 295).

En tout point E du parallèle d'inflexion, les lignes asymptotiques aboutissent tangentiellement à la méridienne, c'est-à-dire viennent se confondre avec une des sections principales. Elles ne peuvent dépasser le parallèle, puisque leur existence est subordonnée à l'opposition des courbures. Ce parallèle est donc le lieu des points de rebroussement des lignes asymptotiques. Les deux branches du rebroussement appartiennent respectivement aux deux systèmes de lignes.

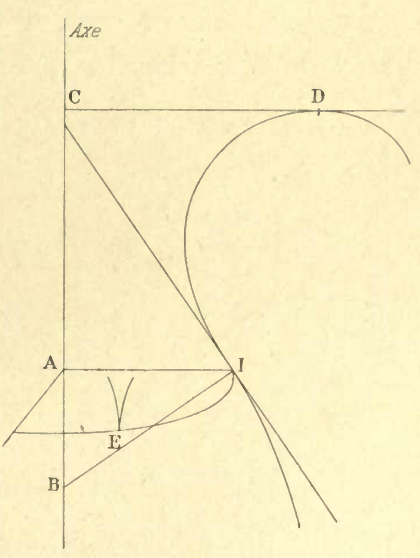


Fig. 295.

Les choses ne se passent pas de la même manière sur le cercle de contact qui est, non seulement un lieu de points paraboliques, mais une ligne asymptotique double. Les lignes asymptotiques lui sont toutes asymptotes.

Expliquons ce que cela signifie. Au point D les sections principales sont : 1° le méridien; 2° le plan normal au méridien et parallèle à l'axe. Ce dernier plan coupe le plan tangent CD suivant une tangente au cercle de contact D. Donc la courbure principale correspondante est bien infinie; le cercle de contact est une ligne asymptotique.

Elle est *double* en ce sens qu'elle appartient aux deux systèmes de lignes asymptotiques dont elle est une *solution particulière*. Les autres lignes asymptotiques ne peuvent l'atteindre, parce qu'en chacun de ses points le plan tangent est unique, ainsi que la section principale pour laquelle le rayon est infini. Il n'y a donc aucun procédé de bifurcation. Comme il faut que les lignes asymptotiques se terminent d'une manière ou d'une autre, il devient nécessaire qu'elles s'enroulent autour du cercle D qui est pour toutes un cercle asymptotique.

467. Onduloïde.

Cherchons l'équation des surfaces de révolution qui satisfont à l'équation :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{C} = \text{Constante.} \qquad (1)$$

Soit ABC la méridienne de la surface cherchée et FD son axe de révolution (fig. 296). Menons la tangente BF; posons : $EB = y$, angle $EFB = \theta$.

Soit s la longueur de la courbe comptée à partir d'un point quelconque dans le sens ABC.

ρ_1 est le rayon de courbure de la méridienne; on a $-\rho_1 d\theta = ds$; ρ_2 est égal à BD.

L'équation (1) s'écrit donc :

$$-\frac{d\theta}{ds} + \frac{\cos\theta}{y} = \frac{1}{C}. \qquad (2)$$

En vertu de la relation : $dy = ds \,.\, \sin\theta$, l'équation (2) devient :

$$C.d(y\cos\theta) = ydy, \qquad y\cos\theta = \frac{y^2}{2C} + D.$$

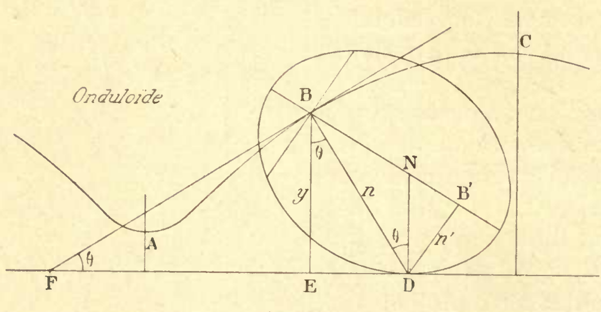


Fig. 296.

Posons $\overline{BD} = n$, $n\cos\theta = y$. L'intégrale s'écrit :

$$y^2\left(\frac{\cos\theta}{y} - \frac{1}{2C}\right) = D, \qquad y^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2C}\right) = D. \qquad (3)$$

Or c'est précisément la relation qui existe entre le rayon vecteur $BD = n$, d'une ellipse dont B est le foyer, et la longueur $\overline{BE} = y$, de la perpendiculaire abaissée de ce même foyer sur la tangente au point D. Les demi-axes de cette ellipse sont :

$$a = C, \qquad b = \sqrt{2DC}.$$

En effet, d'après les propriétés des foyers et des tangentes (§§ 5 et 109) :

$$y = n\cos\theta, \qquad n + n' = 2a,$$

$$\overline{BB'}^2 = 4(a^2 - b^2) = n^2 + n'^2 - 2nn'\cos 2\theta.$$

Éliminant θ et n' entre ces équations, il reste :

$$y^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{b^2}{2a}.$$

Donc la courbe cherchée est décrite par le foyer d'une ellipse qu'on fait rouler sur une droite. D'après les propriétés du *centre*

instantané de rotation (§ 139), BD est la normale à la courbe. Cette cycloïde raccourcie décrite par le foyer d'une ellipse s'appelle *onduloïde*. Il est clair que le calcul suppose $C > 0$.

Cas particuliers.

1°. — Pour $a = b$, l'ellipse devient un cercle; le foyer coïncide avec le centre; la courbe décrite est une droite : l'onduloïde se change en cylindre.

2°. — L'ellipse s'aplatit infiniment $(b = 0)$; les foyers sont aux extrémités du morceau de droite constituant l'ellipse évanouissante; la courbe devient une succession de demi-circonférences tangentes entre elles; l'onduloïde se transforme en une série de sphères égales, tangentes entre elles et dont les centres sont en ligne droite.

468. Surface de révolution minima : caténoïde.

Posons $C = \infty$; $\quad \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = 0.$

D'après le § 467, l'équation à satisfaire est : $y^2 = nD$.

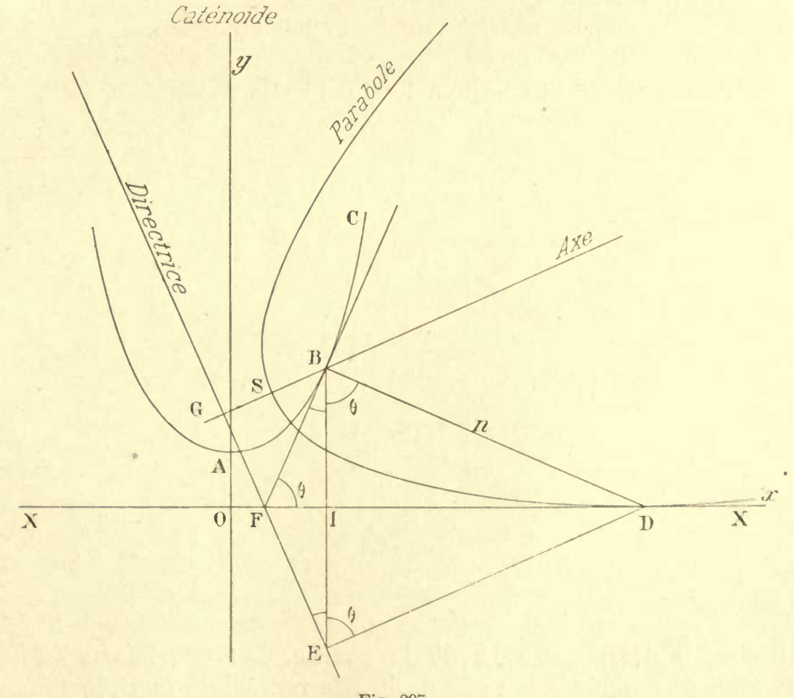


Fig. 297.

Montrons que la méridienne est la courbe décrite par le foyer B d'une parabole roulant sur une droite XX (fig. 277).

Soit, en effet, la parabole de paramètre p et de directrice GE.

En vertu des propriétés de la tangente (elle fait des angles égaux

avec la droite BD qui joint son point de tangence D au foyer, et avec la droite DE parallèle à l'axe) et des propriétés de la directrice (§ 127, *3°*, $\overline{DE} = \overline{DB}$), on a :

$$y = BI = n \cos \theta, \qquad 4y^2 = p^2 + \overline{GE}^2, \qquad 2y \sin \theta = \overline{EG}.$$

Éliminant $\overline{EG}$ et θ entre ces équations, il reste : $2y^2 = np$.

Il suffit de poser $p = 2D$, pour retrouver la condition à satisfaire.

La courbe obtenue est une *chaînette* (§ 216). En effet, posons $h = p : 2$, la condition réalisée devient : $n = y^2 : h$. C'est précisément la relation qui existe entre la normale à la chaînette et son ordonnée. Il est, du reste, géométriquement évident que la chaînette résout le problème, puisque le rayon de courbure de la section méridienne en B est égal et de signe contraire à $\overline{BD}$ (§ 216, *2°*), tandis que le rayon de courbure de la section principale normale au méridien est $\overline{BD}$.

469. Nodoïde.

Étudions la courbe décrite par le foyer d'une hyperbole roulant sur la droite XX (fig. 298).

Soit 1 le foyer de l'hyperbole 1. Quand elle roule dans le sens de

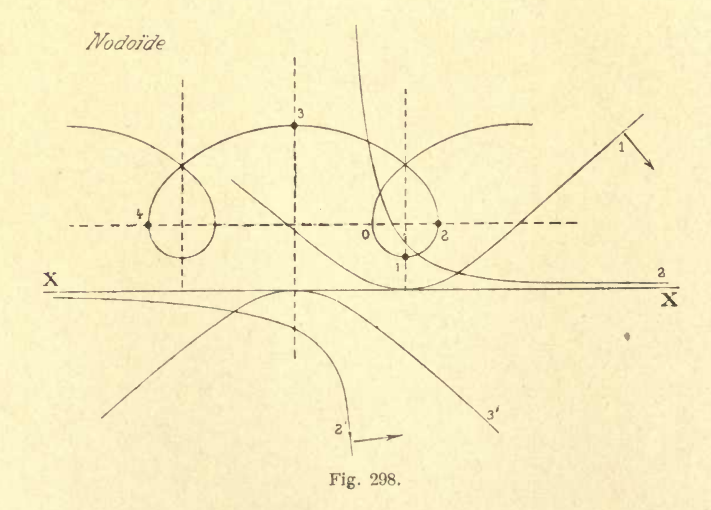


Fig. 298.

la flèche, il décrit l'arc 12 de la courbe. Lorsque l'asymptote de l'hyperbole se confond avec la droite, la normale à la trajectoire du foyer est parallèle à XX, puisqu'elle passe par le point de contact (centre instantané de rotation) qui est à l'infini (§ 138).

Le roulement de l'hyperbole en sens contraire donne l'arc 10.

Mais quand la branche 2 de l'hyperbole est tangente à l'infini avec XX, il en est de même de la branche 2'. Faisons rouler cette

branche 2′ dans le sens de la flèche, de 2′ en 3′ par exemple : le foyer décrit 23.

L'arc 34 correspond au roulement de cette même branche jusqu'à ce que l'asymptote vienne de nouveau coïncider avec XX.

Alors nous faisons rouler la branche 1, . . . et ainsi de suite.

Les portions de la surface de révolution autour de XX, engendrées soit par les arcs tels que 012, soit par les arcs tels que 234, ont des propriétés différentes relativement aux courbures principales. Pour les secondes, les courbures principales sont de même signe. Pour les premières, elles sont de signes contraires ; le plus petit des rayons de courbure principaux de la surface est celui de la méridienne.

Pinceaux de normales.

470. Pinceau de normales.

1°. — Considérons les normales à un élément S de la surface que, pour préciser, nous supposerons circulaire ou elliptique. Nous appellerons *normale moyenne* celle qui passe par le centre de l'ellipse.

A cause de la continuité, les normales d'un pinceau sont tangentes

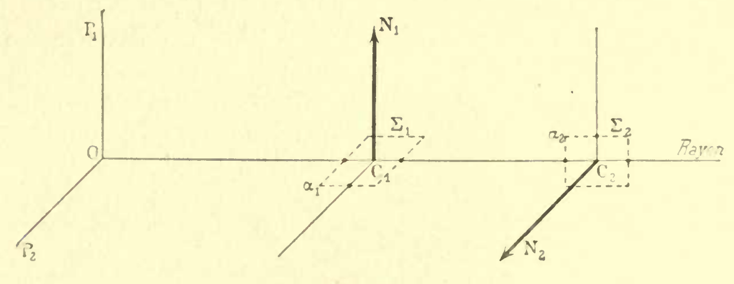


Fig. 299.

à chacune des nappes de la *caustique* (§ 457) en des points voisins. Elles touchent donc toutes une petite aire découpée sur chaque nappe, aire assimilable à un fragment de plan. Chaque pinceau a donc *deux aires d'amincissement* qui sont les régions où les normales du pinceau touchent les deux nappes de la caustique. Le pinceau s'y aplatit alors en formant approximativement deux petits morceaux de plans.

Ces petits plans Σ_1 et Σ_2 passent par la normale moyenne. Il est clair qu'ils font respectivement partie des sections principales P_2 et P_1 de la surface qui correspondent à cette normale, puisque les plans P_2 et P_1 sont respectivement tangents à l'une des nappes de la caustique. Les éléments Σ_1 et Σ_2 sont donc normaux l'un sur l'autre, comme les plans P_2 et P_1.

2°. — La figure 300 fera mieux comprendre de quoi il s'agit; on la comparera utilement à la figure 293 qu'elle complète. Elle montre une ligne de courbure P_2 et plusieurs lignes normales P'_1, P_1, P''_1. A ces lignes correspondent les arêtes de rebroussement a'_1, a_1, a''_1, qui engendrent la nappe Σ_1 de la caustique. A la ligne de courbure P_2 correspond l'arête de rebroussement a_2.

On voit immédiatement que la section principale P_2 au point O est tangente à la nappe Σ_1 de la caustique au point C_1 qui est le centre de courbure de la section principale P_1 au même point O.

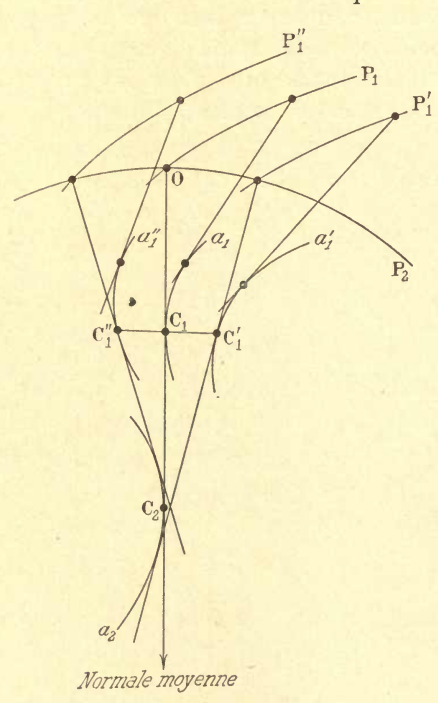


Fig. 300.

Si maintenant on ne considère qu'un pinceau de normales correspondant à une aire admettant O comme centre, on comprend qu'il ait une aire d'amincissement Σ_1 dans le plan P_2, au voisinage du centre de courbure C_1 de la section principale P_1.

Il aura une seconde aire d'amincissement Σ_2 dans le plan P_1, au voisinage du centre de courbure C_2 de la section principale P_2.

3°. — Considérons des droites quelconques, en nombre par conséquent infini, tracées sur les aires d'amincissement et passant par le point de tangence de la normale moyenne ; ce sont ce que les Physiciens appellent *les focales*. On peut dire que les normales du pinceau s'appuient toutes sur deux focales, l'une arbitrairement prise dans l'aire Σ_1, l'autre arbitrairement prise dans l'aire Σ_2.

Ces propositions ont une grande importance en Physique, parce que les rayons lumineux issus d'un point et ayant traversé autant de milieux isotropes qu'on veut, sont normaux à une surface qui est *la surface d'onde*.

471. Focales de Sturm.

On peut présenter les mêmes propositions d'une autre manière.

1°. — Menons la normale en O à la surface (fig. 301) et les sections principales P_1, P_2; soient C_1, C_2, les centres de courbure correspondants. Les normales très voisines de OO' et situées dans le

plan P_1, vont passer en C_1; les normales très voisines de OO' et situées dans le plan P_2, vont passer en C_2.

Faisons tourner la section A_1OB_1 autour d'une droite F_2 de son plan P_1, normale à OO' et passant par C_2. Le point O décrit la courbe A_2OB_2; la courbe A_1OB_1 engendre un élément S de la surface; enfin le point C_1 décrit un élément de la droite F_1 située dans P_2 et normale à OO'.

Faisons tourner la section A_2OB_2 autour d'une droite F_1 de son

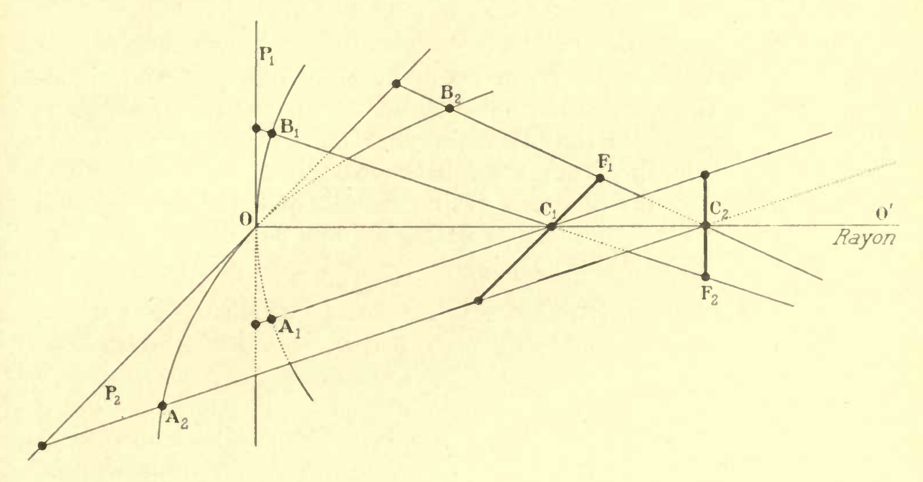


Fig. 301.

plan P_2, normale à OO' et passant par C_1. Le point O décrit la courbe A_1OB_1; la courbe A_2OB_2 engendre l'élément S de la surface; enfin le point C_2 décrit un élément de la droite F_2 située dans P_1 et normale à OO'.

Nous venons de prouver que toutes les normales à l'élément de surface S s'appuient à la limite sur deux éléments de droite F_1 et F_2, perpendiculaires à la normale moyenne et situées respectivement dans les sections principales P_1 et P_2.

On les appelle *focales de Sturm.*

Ces focales font naturellement partie des aires d'amincissement Σ_1 et Σ_2 définies au paragraphe précédent.

2°. — L'inconvénient grave du raisonnement que nous venons de faire est d'attribuer une importance exagérée à ces focales de Sturm; il a conduit en Optique géométrique à une infinité d'idées fausses et de conclusions erronées.

En effet, il est faux de croire que les focales de Sturm sont privilégiées par rapport à la manière dont les normales du pinceau s'appuient dessus. On s'en convainc par l'exemple des surfaces de révolution (§ 473); *les normales passent rigoureusement par l'axe de révolution auxquelles cependant elles ne sont généralement pas perpen-*

diculaires. La focale de Sturm qui coupe l'axe de révolution et qui est dans le plan méridien correspondant à l'élément de surface considéré, touche donc moins parfaitement les normales que l'élément de l'axe de révolution.

D'une manière générale, les normales s'appuient de la même manière sur toutes les droites tracées dans les aires d'amincissement. Quand leur distance à certaines de ces droites est un infiniment petit d'ordre supérieur, les focales privilégiées ne sont pas nécessairement celles de Sturm.

Du reste, on voit immédiatement en quoi le raisonnement prête à erreur. Il suppose que les normales le long de A_1OB_1 passent rigoureusement en C_1, que les normales à A_2OB_2 passent rigoureusement en C_2. C'est vrai à la limite ; mais alors le pinceau se réduit à la droite OO', et le théorème est quasiment illusoire. L'intérêt des considérations sur les pinceaux réside dans la discussion du phénomène quand le pinceau est très délié, et non pas de ce qui arrive quand les focales se réduisent rigoureusement à un point.

472. Section droite d'un pinceau ; variation de forme.

Coupons le pinceau par un plan perpendiculaire à la normale moyenne.

Prenons pour axe des z la normale moyenne, et pour axes des x et des y des perpendiculaires à cette normale parallèles aux aires d'amincissement. Limitons le pinceau par un écran fixe, disposé dans le plan xOy, normal par conséquent à la normale moyenne et percé d'un trou circulaire de rayon ρ. Le pourtour de la section droite du pinceau, à une distance z du trou, est représenté par l'équation :

$$\frac{X^2}{\left(1-\frac{z}{Z_1}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(1-\frac{z}{Z_2}\right)^2}=\rho^2, \tag{1}$$

où Z_1 et Z_2 sont les z des points de tangence de la normale moyenne avec les deux nappes de la caustique.

Pour $z=0$, on a le cercle : $X^2+Y^2=\rho^2$;
pour $z=Z_1$, on a la droite : $X=0$;
pour $z=Z_2$, on a la droite : $Y=0$;

enfin on a encore un cercle C pour une valeur Z' de z donnée par la relation :

$$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}=\frac{2}{Z'}. \tag{2}$$

Z' est compris entre Z_1 et Z_2. Le rayon du cercle correspondant est :

$$\rho'=\rho\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}.$$

La section droite du pinceau est donc toujours une ellipse qui se réduit à deux droites pour deux positions particulières du plan sécant.

La figure 302 représente les sections définies par l'équation (1).

Pour la construire, prenons deux points A et B tels que :

$$\overline{AC} = \overline{CB} = \rho.$$

Traçons deux droites AD et BD passant par le point D tel que $\overline{CD} = Z_1$; traçons deux autres droites AE et BE passant par le point E tel que $\overline{CE} = Z_2$.

Pour une distance z quelconque, les axes de l'ellipse d'intersection sont donnés : d'une part par la distance verticale des droites AD et

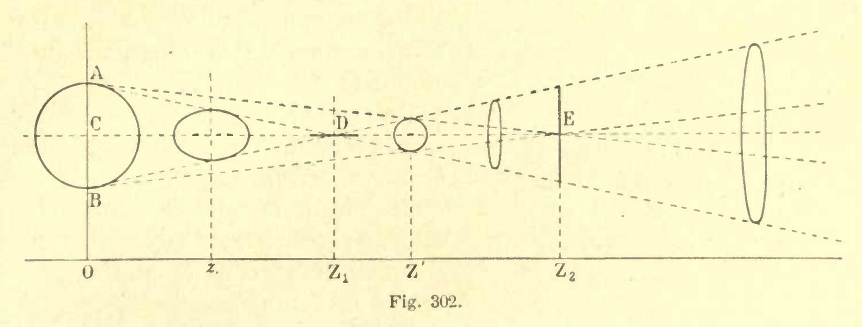


Fig. 302.

BD, de l'autre par la distance verticale des droites AE et BE. Les positions de l'ellipse évanouissante sont en D et en E.

Pour représenter les sections, on les a rabattues sur le plan du tableau par une rotation de 90° autour de verticales.

473. Cas des surfaces de révolution.

Nous savons (§ 465) que, dans ce cas, une des nappes de la caustique se réduit à une portion de l'axe de révolution. Une des aires d'amincissement d'un pinceau de normales s'appuie nécessairement sur l'axe de révolution qui constitue l'une des focales correspondant à cette aire. Il va de soi que l'axe de révolution n'est généralement pas perpendiculaire à la normale moyenne du faisceau (§ 471).

Coupons le pinceau par un plan perpendiculaire à la normale moyenne passant par l'aire d'amincissement ; *comme dans le cas général,* l'intersection est une droite. Elle devient *rigoureusement* une droite, *même pour des aires* S *finies,* si nous inclinons le plan sécant de manière qu'il passe par l'axe de révolution.

Lignes géodésiques.

474. Minimum de longueur des courbes joignant deux points.

1°. — Entre deux points A et B, le plus court chemin est la ligne droite. Mais on peut imposer une condition supplémentaire, par

exemple que la courbe soit sur une surface contenant les points A et B : le plus court chemin est une certaine courbe tracée sur la surface et qu'on appelle *ligne géodésique* (fig. 303).

Nous poserons comme évident que si on attache en A un fil parfaitement flexible et si la surface est parfaitement polie, le fil tendu et passant par B trace sur la surface une ligne géodésique allant de A à B. Puisque le fil n'est gêné en rien, *si ce n'est dans ses déplacements normaux à la surface,* il obéit le mieux possible à la force qui le tend ; le point d'application de cette force cède le plus possible, ce qui implique la diminution maxima de la longueur du fil comprise entre A et B.

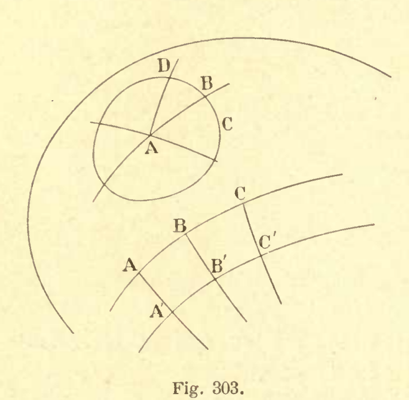


Fig. 303.

Puisque rien ne gêne les déplacements tangentiels, le plan osculateur à la courbe se dispose partout normalement à la surface. Autrement dit, *les éléments consécutifs du fil forment une suite de sections normales élémentaires.*

La ligne géodésique correspond parfois à un chemin maximum ; le fil tendu est encore en équilibre, mais son équilibre est instable.

2°. — De tout point A de la surface partent une infinité de géodésiques allant dans toutes les directions ; elles joignent le point A aux autres points de la surface.

Prenons une longueur quelconque de fil, $s = \overline{AB}$. Attachons une des extrémités en A, tendons le fil sur la surface et considérons la courbe C tracée par l'autre extrémité : on la nomme *cercle géodésique.*

Les *rayons* $\overline{AB}$, $\overline{AD}$,... du cercle géodésique sont constitués par les lignes géodésiques. Nous admettons *qu'ils aboutissent normalement au cercle ;* la propriété tient à ce que la distance de A au cercle est toujours un minimum.

3°. — Généralisons. Traçons sur la surface une courbe ABC quelconque. Par les points A,B,C,... menons des lignes géodésiques normales à ABC. Pour cela, attachons le fil en A, tendons-le sur la surface et déplaçons l'autre extrémité de manière que les angles en A deviennent droits. Nous déterminons une géodésique sur laquelle nous prenons une longueur fixe $s = \overline{AA'}$. La courbe A'B'C'... ainsi obtenue coupe normalement toutes les géodésiques.

475. Lignes géodésiques des surfaces de révolution.

Sur la sphère, les lignes géodésiques sont des arcs de grand cercle. Par un point A quelconque, menons le diamètre D ; considé-

rons tous les plans qui passent par ce diamètre. Ils coupent la sphère suivant des grands cercles qui constituent le faisceau des lignes géodésiques relatives au point A. Un *cercle géodésique* ayant A pour centre est un *cercle* dont le plan est normal au diamètre D. Si nous choisissons A pour pôle, c'est un *parallèle*.

Prenons un point A sur une surface de révolution. Parmi les lignes géodésiques relatives à ce point se trouve nécessairement le méridien correspondant.

Le parallèle n'est généralement pas une géodésique, puisque son plan osculateur n'est pas normal à la surface. Il n'est *ligne géodésique* que pour les points de la méridienne dont la distance à l'axe de révolution est maxima ou minima.

476. Lignes géodésiques des surfaces développables.

1°. — Sur le plan la ligne la plus courte entre deux points est la ligne droite. Le faisceau des lignes géodésiques issues d'un point A est l'ensemble des droites qui passent par ce point. Les *cercles géodésiques* sont les *cercles* de centre A.

Les lignes géodésiques des surfaces développables sont évidem-

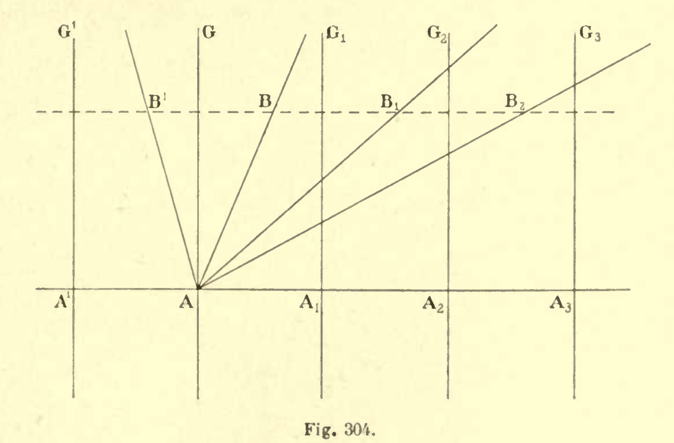


Fig. 304.

ment celles qui se transforment en droites dans le développement sur le plan. Soit A,B,C,... les points du plan ; A',B',C',... les points conjugués de la surface développable. Les lignes géodésiques relatives au point A' sont les conjuguées du faisceau de droites passant par A dans le plan.

2°. — Les lignes géodésiques du *cylindre droit à base circulaire* sont des *hélices*, puisqu'il résulte de la définition même de l'hélice que son développement est une droite. Au faisceau de droites AB, AB_1, AB_2... passant par un point A du plan, correspond un faisceau d'hélices passant par A' conjugué de A sur le cylindre et faisant

avec les génératrices du cylindre le même angle que les droites AB, AB_1,... avec les droites G conjuguées des génératrices sur le plan.

Mais une remarque s'impose. Soit AG, A_1G_1, les génératrices extrêmes du cylindre, celles qui sont confondues après enroulement. Nous pouvons considérer le cylindre comme un plan enroulé non pas seulement une fois, mais un nombre quelconque de fois, comme quand nous faisons un tube avec du papier. Le déroulement donnera donc une série de figures AG, A_1G_1 ; A_1G_1, A_2G_2 ;... de mêmes dimensions. Un point B' du cylindre, pouvant être considéré comme appartenant à tous les enroulements, aura pour conjugués sur le plan une infinité de points distincts B, B_1, B_2,...

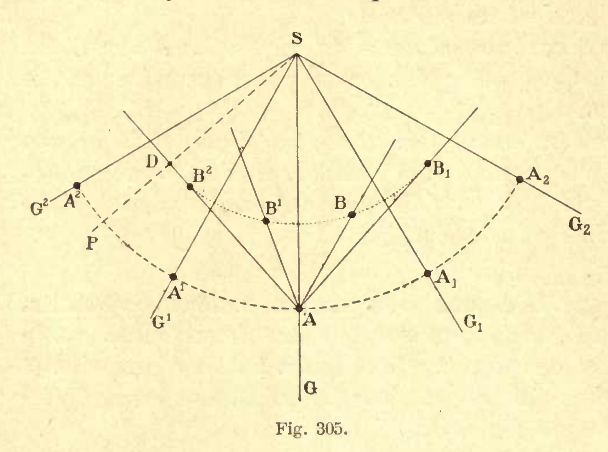


Fig. 305.

Réciproquement, traçons les droites AB, AB_1,... Enroulons sur le cylindre. Elles donneront une série d'hélices qui sont les lignes géodésiques de A'. Par suite, entre deux points A' et B' du cylindre existent une infinité de chemins minimums, *c'est-à-dire plus courts que les chemins voisins*. Ils correspondent à une fraction ε de tour, et à cette fraction *augmentée ou diminuée* d'un nombre quelconque de tours complets. Nous pouvons en effet décrire les hélices en sens contraires et en obtenir une nouvelle infinité passant par A' et B'. Elles correspondent aux droites AB^1, AB^2,... du plan.

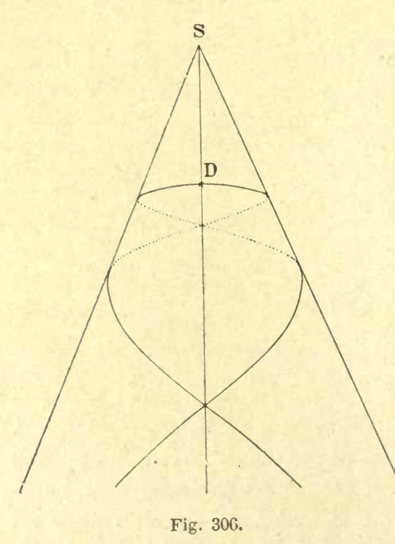


Fig. 306.

3°. — Pour le *cône* circulaire, les géodésiques sont des spirales dont il est facile de déterminer la forme. Représentons-nous le cône comme un cornet formé de plusieurs épaisseurs de papier. Son développement donnera une infinité de figures F identiques accolées, de notations G_iAG_{i+1}. Au point B du cône correspondent donc une

infinité de points $B_1, B_2, \dots$ $B^1, B^2, \dots$ qui sont sur un cercle de centre S et disposées d'une manière semblable par rapport aux génératrices extrêmes de chaque figure F. L'angle du cône étant quelconque, ces points ne se recouvrent généralement pas.

Inversement, traçons sur le plan les droites AB, $AB_1, \dots$ $AB^1, \dots$ Leurs conjuguées sur le cône sont les géodésiques relatives à A'.

Considérons une de ces lignes, AB^2 par exemple. Sa distance au point S est minima pour le point D. Elle coupe SG_1, mais ne coupe pas SG_2. On vérifierait qu'elle coupe SG^4, mais ne coupe pas SG^5. Donc la conjuguée sur le cône est une spirale infinie *dont le nombre de spires est fini*, et qui est symétrique par rapport au plan déterminé par l'axe du cône et par la génératrice SP (fig. 305).

Par tout point A' du cône passe une infinité de ces spirales. Pour l'une d'entre elles, le point A' est le point le plus rapproché du sommet ; la spirale coupe normalement la génératrice A'G'. Cette génératrice elle-même est une des géodésiques relatives au point A'.

Nous engageons vivement le lecteur à vérifier ce qui précède au moyen de cylindres et de cônes en papier calque sur lesquels il tracera des droites, après développement.

Surfaces applicables.

477. Définition des surfaces applicables.

On dit que deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre, lorsqu'on peut les superposer exactement sans déchirure ni duplicature. Les surfaces *développables* sont des surfaces *applicables sur un plan.*

Pour que deux surfaces soient applicables, il faut qu'à chaque point A de la première corresponde un point A_1 de la seconde, de manière que la distance AB de deux points infiniment voisins de la première soit égale à la distance $\overline{A_1B_1}$ des deux points correspondants de la seconde, et cela quel que soit le couple de points considéré.

Exprimons les coordonnées des points des deux surfaces par les équations (§ 372) :

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \chi(u,v), \qquad z = \psi(u,v);$$
$$x_1 = \varphi_1(u,v), \qquad y_1 = \chi_1(u,v), \qquad z_1 = \psi_1(u,v).$$

Un système de valeurs u, v, définit deux points correspondants. Les éléments d'arc correspondants ont pour expression (§ 374,2°) :

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$
$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\, dv + G_1 dv^2.$$

Pour qu'ils soient identiquement égaux, on doit avoir identiquement :

$$E = E_1, \qquad F = F_1, \qquad G = G_1.$$

A ces conditions analytiques correspondent des propriétés intimes des surfaces, propriétés indépendantes des variables particulières u, v, choisies. Elles expriment en définitive ce qui est invariable, quand on déforme une surface de toutes les manières possibles sans changer la grandeur des éléments linéaires (par exemple, quand on froisse une feuille d'un papier supposé inextensible).

478. Courbure des surfaces.

Nous nous contenterons d'énoncer le fameux théorème de Gauss, qui nous donnera l'occasion de définir la *courbure d'une surface en un point.*

1°. — Par les divers points du contour limitant une portion de surface, menons les normales à la surface. Par un point O quelconque, menons des parallèles à ces normales; elles forment un cône d'angle solide ω (§ 74). Soit S l'aire de la surface; on appelle *courbure moyenne* le rapport $\omega : S$. Diminuons indéfiniment l'aire S; l'angle solide ω diminue en même temps. Le rapport $\omega : S$ tend vers une limite qui est par définition la *courbure* au point qu'occupe l'élément d'aire quand il s'annule. *Nous admettrons que cette limite est la même, quelle que soit la forme de l'élément.*

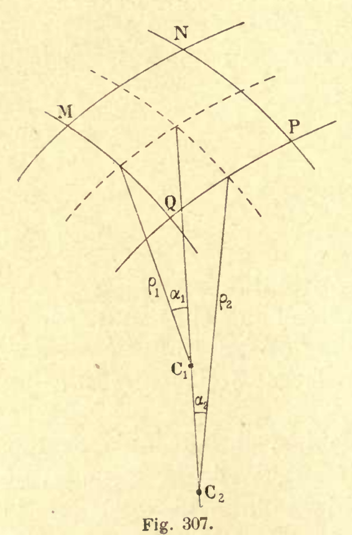


Fig. 307.

2°. — Il est aisé de trouver son expression. Considérons le petit rectangle formé par quatre lignes de courbure; elles sont deux à deux rectangulaires (§ 458). Les normales le long de chacune de ces lignes peuvent être considérées comme se coupant (§ 470).

Soient ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure principaux. On a (fig. 307) :

$$\overline{NP} = \overline{MQ} = 2\alpha_2\rho_2, \qquad \overline{MN} = \overline{QP} = 2\alpha_1\rho_1; \qquad S = 4\alpha_1\alpha_2\,\rho_1\rho_2.$$

Par le point O quelconque, menons des parallèles aux normales à la surface le long du pourtour MNPQ. Il résulte du raisonnement immédiatement précédent que l'aire découpée par le cône obtenu sur la sphère de rayon 1, est : $\omega = 4\alpha_1\alpha_2$.

D'où :
$$C = \frac{\omega}{S} = \frac{1}{\rho_1\rho_2}.$$

La courbure est mesurée par l'inverse du produit des rayons de courbure principaux.

Dans le cas où l'on prend x et y comme variables indépendantes, on a (§ 459) :

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

La courbure est évidemment constante en tout point d'une sphère ; elle est nulle en tout point d'une surface développable et en tout point parabolique d'une surface quelconque.

3°. — Voici maintenant l'énoncé du théorème de Gauss.

Dans la déformation d'une surface sans déchirure ni duplicature, on peut en tout point donner à l'un des rayons de courbure principaux ρ_1 *la valeur qu'on veut; l'autre prend alors une valeur telle, que le produit* $\rho_1\rho_2$ *reste invariable.*

D'où résulte que *deux surfaces ne sont applicables l'une sur l'autre que si le produit des rayons de courbure principaux est le même aux points correspondants des deux surfaces.*

Il va de soi que, dans la déformation, les sections principales prennent en chaque point les directions qu'on veut. On peut toujours rendre en un point donné l'indicatrice de la surface semblable à une section conique donnée et placée comme on voudra, pourvu toutefois que celle-ci soit du même genre que l'indicatrice primitive. En effet, les coniques :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

sont semblables quand on a (§ 365) : $a : a' = b : b'$, ce qui est une première condition à satisfaire. La seconde est de laisser au produit $a'b'$ la valeur caractéristique de la surface pour le point considéré.

4°. — L'application de deux surfaces l'une sur l'autre ne peut s'effectuer généralement que par superposition des points correspondants, c'est-à-dire de ceux pour lesquels les variables u, v, ont les mêmes valeurs. Au reste, on peut donner aux surfaces une infinité de formes communes.

Parfois la superposition peut s'effectuer d'une infinité de manières : par exemple, une sphère et un plan sont respectivement applicables sur eux-mêmes d'une infinité de manières. Cela tient à ce que leur courbure est constante, $1 : R^2$ pour la sphère, nulle pour le plan.

Les surfaces de révolution sont applicables pour une infinité de positions obtenues, les unes à partir des autres, par rotation d'un angle quelconque autour de l'axe.

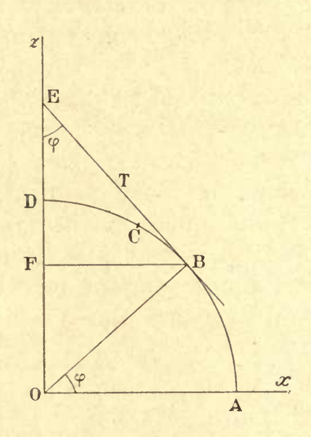
De même les surfaces développables, ayant une courbure partout nulle, sont applicables d'une infinité de manières sur un plan, par conséquent les unes sur les autres. Mais si l'on veut que les génératrices restent communes, la superposition exige que les arêtes de

rebroussement aient même transformée plane. C'est ce qui arrive pour deux cônes dont on fait coïncider les sommets, deux cylindres dont on fait coïncider les sections droites. C'est ce qui arrive pour les hélicoïdes développables dont les hélices arêtes de rebroussement ont même courbure (§ 415, 5°) :

$$\rho = r : \cos^2 \theta.$$

479. Cônes sphériques.

1°. — Enlevons à une sphère un fuseau; enroulons ce qui reste autour de la ligne des pôles : nous obtenons une surface de révolution qui s'appelle *un double cône sphérique*. Le lecteur fera l'expé-



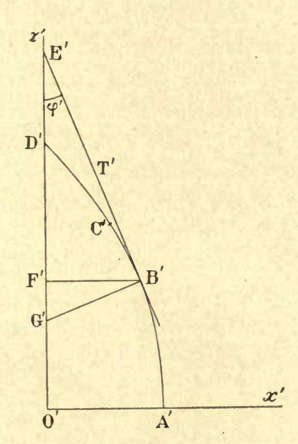


Fig. 308.

rience avec un ballon de caoutchouc ou de celluloïd, dont il supprimera, par exemple, un quadrant.

Cherchons l'équation de la nouvelle méridienne (fig. 308).

Soit R le rayon de la sphère; ses points sont déterminés par la longitude (dont nous n'aurons pas à nous occuper) et la latitude φ.

En supprimant un fuseau et en enroulant ce qui reste autour de Oz, nous remplaçons un parallèle BF par un parallèle B'F' plus court dans un rapport k, le même pour tous les parallèles; les rayons des parallèles correspondants sont dans le même rapport; d'où la première relation :

$$\overline{BF} = x = R\cos\varphi, \qquad \overline{B'F'} = x' = kR\cos\varphi; \qquad dx' = -kR\sin\varphi \,.\, d\varphi.$$

Écrivons que les arcs des méridiennes compris entre des points correspondants sont égaux :

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} = R d\varphi, \qquad dz'^2 + dx'^2 = R^2 d\varphi^2;$$

$$dz' = R\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi, \qquad z' = R\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi.$$

En définitive, les équations des méridiennes des deux courbes sont, pour la sphère :

$$x = R\cos\varphi, \qquad z = R\sin\varphi;$$

pour le cône sphérique :

$$x' = kR\cos\varphi, \qquad z' = R\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi.$$

z' s'exprime donc au moyen de l'*intégrale elliptique de seconde espèce* étudiée au § 183.

2°. — Évaluons les longueurs $\overline{BE} = T$, $\overline{B'E'} = T'$.

On a : $$\sin\varphi' = -\frac{dx'}{Rd\varphi} = k\sin\varphi;$$

les sinus des angles que font les tangentes avec l'axe de révolution, sont dans un rapport constant.

Au point D, on a $\sin\varphi = 1$; l'angle φ' au sommet D′ est donc fourni par la relation $\sin\varphi' = k$.

On a : $T'\sin\varphi' = x'$, $T\sin\varphi = x$; d'où : $T = T'$;

les distances des points correspondants à l'axe de révolution, distances comptées sur la tangente, sont égales.

3°. — Calculons les rayons de courbure principaux en B′.

L'un d'eux est égal à $\overline{B'G'}$. On a :

$$\overline{B'G'} = \rho_1 = \frac{x'}{\cos\varphi'}, \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{1 - k\sin^2\varphi}}{kR\cos\varphi}.$$

L'autre ρ_2 est le rayon de courbure de la méridienne ; il est donc égal (§ 92) à l'arc de méridienne divisé par la différence des angles que font avec une droite invariable ($O'z'$, par exemple) les tangentes aux extrémités de l'arc :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{d\varphi'}{Rd\varphi} = \frac{1}{R}\,\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}; \qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{1}{R^2}.$$

Conformément au théorème de Gauss, la courbure en tout point du cône sphérique est la même et égale à celle de la sphère génératrice.

4°. — La longueur du cône est :

$$\overline{O'D'} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi = E;$$

C'est l'intégrale complète de seconde espèce pour le module k.

Pour $k = 0$, on a : $\overline{O'D'} = \pi : 2$, ce qui est évident *a priori.*

5°. — Évaluons le volume. Il a pour expression (§ 382) :

$$V = \int_0^{\varphi}\pi k^2R^2\cos^2\varphi\,.\,dz = \pi k^2R^3\int_0^{\varphi}\cos^2\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi.$$

Cette intégrale se ramène aisément aux intégrales de première et de seconde espèces (§§ 183 et 184). On a :

$$3k^2\int \cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi = k^2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

$$+(1+k^2)\int d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-(1-k^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

ce qu'on vérifiera immédiatement par différentiation.

En particulier, le volume du cône sphérique entier est :

$$V=\frac{\pi R^3}{3}\left[(1+k^2)E-(1-k^2)F\right],$$

où E et F sont les intégrales complètes de seconde et de première espèces (§ 187).

479bis. Application des hélicoïdes.

On démontre que les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution. On vérifiera le théorème pour l'hélicoïde gauche à plan directeur (§ 464); il s'applique sur la caténoïde (§ 468). Les génératrices rectilignes se superposent aux méridiens; les hélices trajectoires orthogonales des génératrices se superposent aux parallèles.

Nous savons que les deux surfaces sont minima. Leurs rayons de courbure ont les expressions de même forme :

$$\pm\rho=\frac{s^2}{h}+h,\qquad \pm\rho=\frac{2\pi}{H}r^2+\frac{H}{2\pi}.$$

h est le paramètre de la chaînette (§ 216), s l'arc de méridien de la caténoïde; H est le pas de l'hélicoïde, r la distance à l'axe comptée sur la génératrice rectiligne. On réalise donc la condition : $H=2\pi h$. Ceci posé, on montre immédiatement que les éléments d'arcs tracés sur l'hélicoïde (§ 439, *4°*) et sur la caténoïde (§§ 216 et 378, *4°*) ont la même expression.

CHAPITRE XXII

FLUX ET CIRCULATION DES VECTEURS

480. Vitesse en un point d'un fluide. Ligne de courant, tubes de courant, surfaces de courant.

1°. — Les notions que nous avons à définir existent en dehors de leurs applications, du reste comme toutes les notions mathématiques. Mais pour faciliter leur compréhension, il est utile de les concrétiser. Nous emprunterons donc notre langage à l'Hydrodynamique.

Imaginons immergé dans un fluide indéfini de petits corps ayant même densité que lui. Supposons le fluide en mouvement; en chaque point et à chaque instant, chacun de ces corps a une vitesse de grandeur et de direction bien déterminées; le vecteur représentatif mesure la *vitesse géométrique*.

La *vitesse matérielle* est la vitesse géométrique multipliée par la densité; nous désignerons sa grandeur par le symbole U, ses composantes suivant trois axes rectangulaires par les symboles u, v, w. On a :

$$U^2 = u^2 + v^2 + w^2;$$

u, v, w, sont généralement des fonctions des coordonnées x, y, z, et du temps t. L'espace dans lequel le vecteur u, v, w, est défini, s'appelle *le champ du vecteur*. Il est clair que la vitesse géométrique et la vitesse matérielle ont même direction en tous les points du champ, direction généralement variable d'un point à l'autre. Leurs grandeurs seules diffèrent par un facteur fonction du point considéré. Pour exprimer le déplacement du fluide *supposé compressible*, la vitesse matérielle est nécessaire; car, suivant la densité, la même vitesse géométrique correspond à des déplacements de matière très différents.

Dans ce qui suit, nous ne considérons que la vitesse matérielle; nous supprimerons donc l'épithète, puisque l'ambiguïté n'est pas à craindre.

2°. — Nous disons que le mouvement est *permanent*, quand il s'effectue en tout point du champ avec une vitesse constante en gran-

deur et direction. Les composantes u, v, w, ne sont alors fonction que de x, y, z, tandis que dans le cas général elles dépendent aussi du temps. *Nous nous limiterons aux mouvements permanents.*

3°. — Une surface est une *surface de courant,* si le mouvement s'effectue suivant des lignes tracées sur elle.

Cherchons la condition à satisfaire.

Soit : $$\chi(x, y, z) = \lambda, \tag{1}$$

une surface de courant; λ est une constante. Écrivons que le vecteur u, v, w, relatif à tout point A de cette surface, est dans le plan tangent au point A. Il revient au même d'écrire que le vecteur est perpendiculaire à la normale à la surface (§ 322) :

$$u\frac{\partial \chi}{\partial x} + v\frac{\partial \chi}{\partial y} + w\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Si cette condition est identiquement vérifiée, l'équation (1) représente un faisceau de *surfaces de courant.* On obtient toutes les surfaces du faisceau en faisant varier le paramètre λ.

La couche comprise entre deux surfaces de courant est une *nappe de courant.*

4°. — Considérons un second faisceau de surfaces de courant :

$\psi(x, y, z) = \mu$, où μ est la cote de la surface.

Nous avons identiquement :

$$u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Les deux faisceaux de surfaces découpent l'espace *en tubes de courant.* Leurs intersections deux à deux sont des *lignes de courant,* trajectoires des mobiles qui servent à déterminer la vitesse géométrique du fluide.

Il est important de ne pas oublier que les surfaces, tubes, lignes de courant restent les mêmes, que l'on considère la vitesse *géométrique* ou la vitesse *matérielle.*

481. Flux ou débit à travers une surface.

1°. — On appelle *flux du vecteur* à travers un élément dS de surface, le produit : $U \cos\theta \,.\, dS$,

du vecteur U par l'aire dS de l'élément, et par le cosinus de l'angle θ que fait le vecteur U avec la normale à l'élément. Il est facile de voir que le flux du vecteur correspond exactement à l'idée de *débit* d'un fluide à travers un élément de surface : il mesure la quantité de matière qui traverse l'élément dans l'unité de temps.

Décomposons en effet la vitesse qu'a le fluide quand il traverse l'élément, en une composante tangentielle et une composante normale $U \cos\theta$. La composante tangentielle, pour grande qu'elle soit, n'amène pas de liquide à travers l'élément. Seule agit la composante normale ;

le débit est le produit $U \cos \theta \,.\, dS$, de sa grandeur par l'aire de l'élément.

A travers une surface finie, le flux total ou le débit total sont :

$$\iint U \cos \theta \, dS \,;$$

l'intégrale est étendue à la surface entière. C'est la quantité de matière qui traverse la surface dans l'unité de temps.

Soit α, β, γ, les cosinus directeurs de la normale à la surface en un de ses points. On a :

$$U \cos \theta = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

$$\alpha dS = dy\, dz, \qquad \beta dS = dz\, dx, \qquad \gamma dS = dx\, dy\,;$$

$$\iint U \cos \theta \, dS = \iint (u\, dy\, dz + v\, dz\, dx + w\, dx\, dy).$$

2°. — Évaluons le flux à travers un élément plan fini S que, pour simplifier l'écriture, nous placerons normalement à l'axe de x.

Le flux est : $$\iint u\, dy\, dz.$$

Si u est constant, l'intégrale est uS. Supposons que u varie ; développons sa valeur en fonction des variables y et z, les seules qui interviennent, puisque le plan est normal à Ox. Nous avons :

$$u = u_0 + ay + bz + \ldots$$

$$\iint u\, dy\, dz = u_0 S + a \iint y\, dy\, dz + b \iint z\, dy\, dz + \ldots$$

Si le point où u a la valeur u_0, est choisi de manière que les intégrales s'annulent, le flux aura pour expression u_0S *aux quantités du second ordre près*. Or ces conditions définissent ce qu'on appelle le *centre de gravité* de la surface (§ 163, 3°). D'où la proposition : si la vitesse varie assez peu au voisinage d'un point A pour qu'on puisse la considérer comme une fonction linéaire des coordonnées, on obtient le flux à travers un élément plan passant par A, en multipliant l'aire de l'élément par la valeur que prend la composante normale de la vitesse en son centre de gravité.

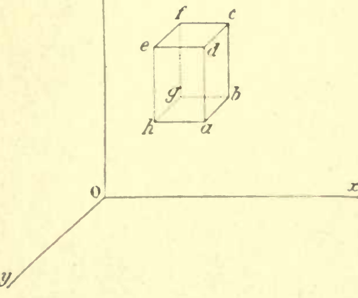


Fig. 309.

3°. — Calculons le flux à travers la surface qui limite l'élément parallélipipédique représenté figure 309.

En vertu de ce qui précède, le flux à travers la face *efgh* est égal à $u\, dy\, dz$, où u est la valeur que prend cette fonction au centre de figure de la face. Le flux *entre* dans le parallélipipède ; nous le prendrons *négativement*.

Le flux à travers la face *abcd* est :

$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz.$$

Il *sort* du parallélipipède ; nous le prendrons *positivement*.

La somme algébrique des deux flux (flux qui sort en définitive) est :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Les vecteurs v et w ne donnent aucun flux à travers les éléments perpendiculaires à Ox. Opérons de même pour les autres couples de faces. Il vient pour expression du flux total *qui sort en définitive :*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\text{Div}\,(\text{U})\,dx\,dy\,dz.$$

La quantité entre parenthèses a une importance capitale : elle s'appelle *la divergence du vecteur u, v, w, au point considéré.*

On comprend maintenant pourquoi nous avons démontré le lemme 2°. Les variations de u le long de l'élément *abcd* sont du même ordre que les quantités que nous conservons ; il n'est donc pas légitime de les négliger ; mais elles disparaissent d'elles-mêmes en vertu du lemme.

482. Flux conservatif et non conservatif.

1°. — On dit que le flux est conservatif dans un espace donné, lorsqu'il est le même à travers toutes les surfaces qui sont limitées par le même contour, les surfaces demeurant tout entières dans l'espace donné. Cela revient à dire que la quantité de matière qui passe à travers toutes ces surfaces dans le même temps est la même, que le débit total est le même pour toutes ces surfaces. Cela revient encore à dire que *le fluide supposé continu est incompressible.*

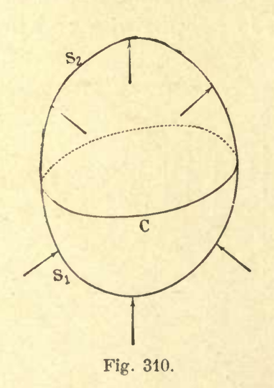


Fig. 310.

Posons que le flux est le même à travers deux surfaces S_1 et S_2 limitées au même contour C. Comme dans l'expression du flux intervient le cosinus de l'angle du vecteur avec la normale à la surface, il faut, pour définir complètement le flux, choisir un sens sur cette normale.

Nous pouvons le faire arbitrairement pour l'une des surfaces ; notre choix pour l'autre est alors déterminé par la condition qu'en déformant et étirant la première surface pour l'amener à coïncider avec la seconde, les sens sur les normales soient alors les mêmes.

C'est ainsi que les sens ont été choisis dans la figure 310.

2°. — Montrons que *si le flux est conservatif, il est nul à travers toute surface fermée, à la condition de prendre les normales toutes vers l'extérieur, ou toutes vers l'intérieur de la surface fermée.*

Généralement on prend leur direction positive vers l'extérieur de la surface.

En effet, si les flux sont égaux à travers S_1 et S_2 quand les normales sont dirigées suivant la première convention, ils sont égaux et de signes contraires quand les normales sont dirigées suivant la seconde, puisque changer la convention nous amène à retourner toutes les normales pour l'une des surfaces, par conséquent à changer le signe des cosinus pour tous les éléments de l'une des intégrales.

Si l'on a $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, dans le premier cas, on a $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = 0$, dans le second. CQFD.

3°. — Cherchons la condition analytique pour que le flux soit conservatif. Il a pour expression :

$$\mathcal{F} = \iint (u\, dy\, dz + v\, dz\, dx + w\, dx\, dy)\,; \qquad (1)$$

l'intégrale est étendue à toute la surface. Étudions-en la première partie :

$$\iint u\, dy\, dz.$$

Nous découpons le plan yOz en petits rectangles ; nous construisons le cylindre dont les génératrices sont parallèles à Ox et qui

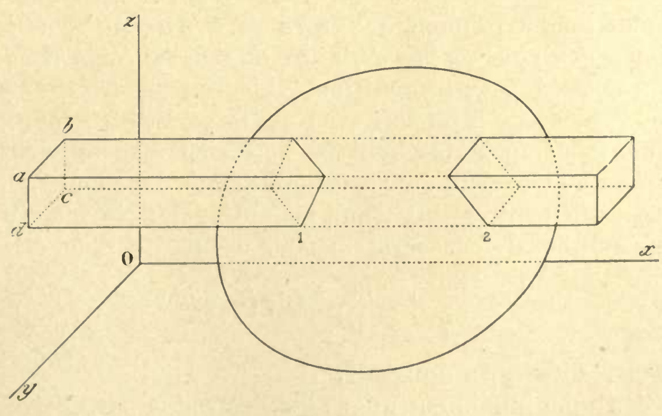


Fig. 311.

s'appuient sur le pourtour du rectangle. Nous découpons ainsi sur la surface deux éléments dS_1 et dS_2 qui ont l'un et l'autre le rectangle d'aire $dy\, dz$ pour projection sur le plan yOz. Les éléments d'intégrales sont donc le produit de $dy\, dz$ par les valeurs de u qui correspondent aux deux éléments de surface (fig. 311).

Mais (c'est ici qu'un peu d'attention est nécessaire) les choses ne

se passent pas de la même manière en 1 et en 2. Supposons que u soit partout positif. En 1 le flux *pénètre* dans la surface, en 2 il *sort* de la surface. Nous devons donc écrire pour la somme des deux éléments d'intégrale : $(u_2 - u_1)\,dy\,dz.$

Le raisonnement est le même si le cylindre rencontre la surface en 4, en 6 points,... (le nombre des points est nécessairement pair, puisque la surface est fermée) : il faut prendre *positivement* les valeurs de u là où la droite parallèle à Ox *sort* de la surface, négativement les valeurs de u là où cette droite *entre* dans la surface.

Mais $u_2 - u_1$ est la somme des variations de u pendant que la droite est dans l'espace limité par la surface. On peut donc écrire :

$$u_2 - u_1 = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,$$

et par suite : $$\iint u\,dy\,dz = \iiint \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Le raisonnement appliqué aux autres parties de l'intégrale (1) permet de poser :

$$\iint (u\,dy\,dz + v\,dz\,dx + w\,dx\,dy) = \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

4°. — Nous remplaçons une intégrale de surface par une intégrale de volume. Nous exprimons que *ce qui sort en définitive de la surface est la somme de ce qui sort en définitive de tous les éléments de volume que contient la surface*, proposition évidente.

Si nous voulons qu'il ne sorte rien de la surface *quelle que soit sa forme,* nous devons écrire qu'il ne sort rien d'aucun des volumes élémentaires qu'elle contient, c'est-à-dire que la quantité qui entre dans chaque élément est à chaque instant égale à la quantité qui en sort. La condition de conservation pour le flux est donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{Div}(u, v, w) = 0.$$

483. Tubes de courant.

1°. — Un tube infiniment mince est déterminé par quatre surfaces prises deux à deux dans les faisceaux (§ 480) :

$$\chi(x, y, z) = \lambda, \qquad \psi(x, y, z) = \mu.$$

Les paramètres caractéristiques de ces surfaces sont :

$$\lambda, \qquad \lambda + d\lambda; \qquad \mu, \qquad \mu + d\mu.$$

Coupons le tube par un plan perpendiculaire à l'axe des x. Nous

déterminons ainsi un parallélogramme infiniment petit ABCD (fig. 312), dont il est facile de calculer l'aire. On a :

$$dS_x = dy\, dz' - dz\, dy'. \qquad (1)$$

2°. — Évaluons la même aire en fonction de λ, de μ et de leurs variations.

Quand on passe de A à B sur la trace de la surface $\psi(x, y, z) = \mu$, on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = d\lambda.$$

Quand on passe de A à D sur la trace de la surface $\chi(x, y, z) = \lambda$, on a :

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} dy' + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz' = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy' + \frac{\partial \psi}{dz} dz' = d\mu.$$

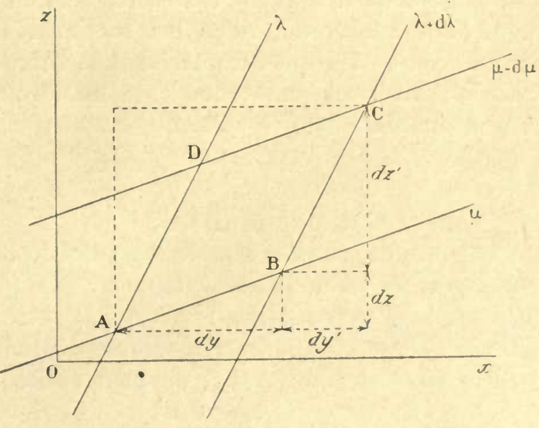


Fig. 312.

Tirons de ces équations les valeurs de dy, dz, dy', dz' ; transportons-les dans (1). Il vient :

$$d\lambda d\mu = dS_x \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = A\, dS_x .$$

On trouverait de même : :

$$d\lambda d\mu = dS_y \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = B\, dS_y ,$$

$$d\lambda d\mu = dS_z \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = C\, dS_z ,$$

en appelant A, B, C, les parenthèses, pour simplifier l'écriture.

3°. — *Que le fluide soit compressible ou non;* autrement dit, *que le flux soit conservatif ou non,* on doit avoir au même point d'un tube de courant :

$$u\, dS_x = v\, dS_y = w\, dS_z = Q\, d\lambda d\mu,$$

Q est une fonction de x, y, z. Ces relations signifient que le flux à travers une section inclinée est égal au flux à travers la section droite du tube. En effet, soit θ l'inclinaison, σ l'aire de la section droite. L'aire de la section inclinée est $\sigma : \cos \theta$.

D'après la définition géométrique du tube, la composante du vecteur normale à la section inclinée est $U \cos \theta$.

Le flux : $U \cos \theta (\sigma : \cos \theta) = U\sigma$, est indépendant de θ.

Du reste, la proposition est évidente ; ce n'est pas parce qu'on incline un barrage qu'on modifie le débit total d'une rivière.

On a donc : $u = QA, \quad v = QB, \quad w = QC.$

4°. — *Si le flux est conservatif,* Q n'est plus une fonction quelconque de x, y, z. Il doit rester le même tout le long du tube, puisque, rien ne traversant les parois latérales, le flux est le même, non seulement à travers toutes les sections menées par un point du tube, mais à travers toutes les sections. Donc Q est fonction des paramètres λ et μ qui caractérisent le tube considéré.

Corollaire : on peut choisir le numérotage λ et μ des surfaces χ et ψ de manière que Q soit une constante, par exemple l'unité. On a alors : $u = A, \quad v = B, \quad w = C.$

484. Cas particuliers.

1°. — Le cas le plus simple est celui où le mouvement a lieu parallèlement à un plan, le plan xOy, par exemple. L'un des faisceaux de surfaces a pour équation : $z = \lambda$; l'autre faisceau est composé de cylindres dont les génératrices sont parallèles à Oz : $\psi(x, y) = \mu$.

Si le flux est conservatif, on peut écrire :

$$Q = 1\,; \quad u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,; \quad u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Le flux est conservatif; conformément au § 482, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

2°. — Supposons le phénomène de révolution (autour de Ox), et ne présentant pas la symétrie de la vis. Le faisceau χ se compose nécessairement des plans méridiens. Posons donc :

$$\chi(y, z) = \text{arctg}\,(y : z) = \lambda, \qquad r^2 = y^2 + z^2.$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} = \frac{-z}{y^2+z^2} = -\frac{z}{r^2}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{y}{y^2+z^2} = \frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0.$$

Il suffit de connaître les lignes de courant $\psi = \mu$, dans *un* plan méridien ; ψ est une fonction de x et de r. Comme les phénomènes sont identiques dans tous les plans méridiens, étudions-les dans le plan xOy $(z = 0)$. On a :

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{1}{y}.$$

Posons $Q = -1$, ce qui revient à prendre le fluide incompressible; rétablissons la distance à l'axe de révolution r à la place de y, il vient :

$$u = \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad v = -\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

La solution est de la forme :

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

ψ est une fonction arbitraire de x et de r.

Ces théorèmes sont fondamentaux en Hydrodynamique.

Existence d'un potentiel.

485. Définitions et théorèmes fondamentaux.

1°. — Jusqu'à présent nous choisissons arbitrairement les fonctions u, v, w, des coordonnées, qui sont les projections sur Ox, Oy, Oz, du vecteur dont nous étudions *le champ*.

Nous leur imposons seulement d'être continues.

Nous supposons maintenant qu'elles dérivent d'une fonction $V(x, y, z)$ d'après les formules :

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{1}$$

V est le POTENTIEL du vecteur u, v, w.

Les surfaces : $V(x, y, z) = \text{Constante}$, (3)

sont les SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES. A chaque valeur de la constante correspond une surface du faisceau. Les conditions (1) signifient que le vecteur u, v, w, est normal à la surface qui passe par son point d'application A (§ 322).

Le potentiel V est ce qu'on appelle une *quantité scalaire* par opposition avec les composantes u, v, w, qui sont des *vecteurs* ou *quantités dirigées*. Le potentiel est complètement défini en chaque point par un nombre ; le vecteur U est défini par trois nombres, ou par une longueur et deux angles, ce qui revient au même. Les considérations qui suivent nous apprendront à faire sortir *un champ de vecteurs* d'une quantité scalaire définie en chaque point du champ.

Menons par A une courbe quelconque dont nous repérons les points au moyen de l'arc s compté sur la courbe à partir d'une origine quelconque. Soit α, β, γ, les cosinus directeurs de la tangente à la courbe s au point A. La projection du vecteur U sur la tangente à la courbe est :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = -\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Mais on a (§ 403) :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds};$$

d'où :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

La projection cherchée est le taux de variation (changé de signe) du potentiel par rapport à l'espace parcouru, quand on se déplace sur la direction de projection, à partir du point d'application du vecteur.

2°. — On a :

$$d\mathcal{T} = udx + vdy + wdz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV.$$

La quantité $d\mathcal{T}$, qu'on nomme CIRCULATION ou TRAVAIL du vecteur, est donc une différentielle exacte. Il revient au même d'écrire (§ 21) :

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ces relations expriment que l'ordre des dérivations de la fonction $V(x, y, z)$ n'influe pas sur le résultat.

Les quantités ξ, η, ζ, peuvent être considérées comme un vecteur qui s'appelle le CURL du vecteur u, v, w; il est identiquement nul quand u, v, w, dérivent d'un potentiel.

L'intégrale : $$\int_A^B (udx + vdy + wdz),$$

prise le long d'une courbe AB, est la circulation du vecteur u, v, w, le long de cette courbe. Si u, v, w, dérivent d'un potentiel, la circulation (ou le travail) entre les points A et B est égale à :

$$\mathcal{T}_{AB} = -\int_A^B dV = V_A - V_B,$$

quel que soit le chemin qui relie les points A *et* B.

3°. — La condition pour que le flux du vecteur u, v, w, soit conservatif, est maintenant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\Delta V = 0. \quad (2)$$

Ainsi le flux du vecteur n'est conservatif que si la fonction V satisfait à la condition :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0,$$

dite *condition de Laplace*. Les fonctions V, qui dans un espace donné sont continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes, et satisfont à l'équation de Laplace, sont appelées FONCTIONS HARMONIQUES. On conçoit leur importance.

4°. — Quand il existe un potentiel, le flux à travers une surface quelconque prend une forme remarquable. Menons les normales en tous les points de la surface, vers l'extérieur s'il s'agit d'une surface fermée. Repérons les points de ces normales au moyen d'une variable n mesurée sur la normale. En un point quelconque de la

surface, la composante normale de la force a pour expression (*1°*) : $-\frac{\partial V}{\partial n}$; c'est le taux de diminution du potentiel quand, à partir d'un point de la surface, on se déplace sur la normale vers l'extérieur. Le flux de force est par suite :

$$-\iint \frac{\partial V}{\partial n}\, dS;$$

l'intégrale est étendue à toute la surface. Nous avons (§ 482) :

$$-\iint \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = -\iiint \Delta V\, dx\, dy\, dz.$$

Soit α, β, γ, les cosinus directeurs de la normale à la surface quelconque à travers laquelle nous calculons le flux. On a (§ 482) :

$$-\iint \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = -\iint \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}\right) dS$$

$$= -\iint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial V}{\partial y}\, dz\, dx + \frac{\partial V}{\partial z}\, dx\, dy\right).$$

Ces expressions sont équivalentes.

486. Circulation le long d'une courbe fermée; non uniformité du potentiel.

De la formule :

$$\int u dx + v dy + w dz = -\int dV,$$

semble résulter que la circulation le long d'une courbe fermée est toujours nulle quand le vecteur u, v, w, dérive d'un potentiel. Il n'en est cependant rien, parce que certains potentiels ont au même point une infinité de valeurs différentes.

1°. — Par exemple, choisissons pour surfaces équipotentielles des demi-plans s'arrêtant à une droite indéfinie dont la trace sur un plan normal est représentée en O dans la figure 313.

Prenons pour expression du potentiel :

$$V = V_0 \alpha;$$

Fig. 313.

α est l'angle du demi-plan considéré avec un demi-plan P pris pour origine des azimuts. A chaque demi-plan correspond une infinité d'angles α, différant entre eux d'un multiple entier de 2π; nous devons poser :

$$V = V_0 \alpha + 2k\pi V_0,$$

où α est le plus petit angle positif du demi-plan considéré avec le plan de référence P.

Le potentiel n'est défini qu'à une constante près. Mais si la valeur absolue du potentiel qui convient à un plan S_1 est arbitraire, *une fois cette valeur choisie et une trajectoire donnée*, la valeur du potentiel d'un demi-plan S_2 quelconque est parfaitement déterminée.

Soit en effet α_1 et α_2 les plus petits angles que S_1 et S_2 font avec P dans le sens positif. *Posons* pour S_1 :

$$V_1 = V_0\alpha_1 + 2k_1\pi V_0.$$

Quand nous allons de S_1 à S_2 sur la trajectoire EF, ou encore EFGK, ou sur toute autre trajectoire n'entourant pas le point O, le potentiel de S_2 est :

$$V_2 = V_0\alpha_2 + 2k_1\pi V_0.$$

Au contraire, si nous allons de S_1 à S_2 sur la trajectoire ABCD, faisant un tour autour de O dans le sens positif, le potentiel de S_2 est :

$$V'_2 = V_0\alpha_2 + 2k_1\pi V_0 + 2\pi V_0 = V_2 + 2\pi V_0.$$

En général, si la trajectoire fait n tours autour de O, n pouvant être positif ou négatif et représentant la somme algébrique des tours positifs et négatifs, on a :

$$V'_2 = V_2 + 2\pi n V_0.$$

En particulier, si l'on part du plan S_1 pour y revenir, la variation de potentiel est : $2\pi n V_0$.

2°. — Ceci posé, étudions le courant défini par ce potentiel.

Les lignes de courant, normales aux surfaces équipotentielles, sont des circonférences situées dans des plans parallèles au tableau et ayant leurs centres sur la droite O.

A une distance r de cette droite, le vecteur a pour expression :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial(r\alpha)} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\alpha} = -\frac{V_0}{r}.$$

$r\alpha$ représente, en effet, le déplacement sur la ligne de force; nous appliquons la formule du § 485, *1°*.

La longueur du vecteur est en raison inverse de la distance à la droite O; il est naturellement dirigé tangentiellement aux lignes de courant, vers les α décroissants si V_0 est positif.

Quand on va d'un point du champ à un autre point, la circulation est indépendante des trajectoires planes ou gauches suivies (c'est en cela qu'il existe un potentiel), *à la condition qu'elles fassent en définitive le même nombre de tours autour de la droite* O *dans le même sens* (cette restriction est la conséquence de la non uniformité de ce potentiel).

487. Surfaces et lignes de courant dans le cas d'un potentiel.

1°. — Puisque le vecteur u, v, w, est normal à la surface équipotentielle en son point d'application, toute ligne de courant est normale en tous ses points au faisceau des surfaces équipotentielles; toute surface de courant coupe orthogonalement toutes les surfaces équipotentielles.

2°. — Plaçons-nous dans le cas particulier (§ 484, *1°*) où le fluide est incompressible et où les lignes de courant sont parallèles à un plan (phénomène cylindrique). On a simultanément :

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

On tire de là : $\Delta V = 0, \qquad \Delta \psi = 0.$

Les deux fonctions V et ψ sont toutes deux harmoniques. Mais les courbes équipotentielles et les courbes de courant sont orthogonales : nous voici donc ramenés à l'étude des *fonctions conjuguées* dont nous nous sommes longuement occupés dans le Chapitre XI. C'est même de cette application que les *fonctions conjuguées* tirent pour nous la plus grande partie de leur importance.

3°. — Considérons le cas d'un phénomène de révolution (§ 484, *2°*). On a simultanément :

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad v = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

On tire de là :

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

488. Théorème de Green.

Ce théorème est une pure transformation mathématique dont les applications sont nombreuses.

Sa démonstration est identique à celle du § 485; elle repose : 1° sur l'intégration par parties; 2° sur le fait que nous pouvons (§§ 21 et 305) changer arbitrairement l'ordre des dérivations ou des intégrations.

Soient V et W deux fonctions de x, y, z, continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes, dans un espace donné.

Effectuons l'intégrale :

$$I = \iiint W \Delta V \, d\omega = \iiint W\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) d\omega,$$

étendue à tous les éléments de volume $d\omega$ compris dans une surface fermée. On a en intégrant par parties (158, 2°) :

$$\iiint W \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \int W \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx,$$

$$\int W \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = W \frac{\partial V}{\partial x} - \int \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx.$$

Opérons de même pour les deux autres intégrales, il vient :

$$I = \iint W \left(\frac{\partial V}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx\, dy \right),$$

$$- \iiint \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\omega.$$

La quantité entre parenthèses dans la première intégrale est le flux de force à travers un élément de surface. Nous pouvons donc écrire :

$$\iiint W \Delta V \, d\omega = \iint W \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

$$- \iiint \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\omega.$$

Telle est la *formule de Green*.

En particulier, posons $W = 1$, il reste :

$$\iiint \Delta V \, d\omega = \iint \frac{\partial V}{\partial n} dS,$$

formule que nous avons démontrée directement (§ 485).

489. Expression de l'énergie cinétique pour un fluide incompressible.

1°. — Si le fluide est incompressible, la densité est constante et uniforme (invariable par rapport au temps et à l'espace). Admettons que u, v, w, représentent non plus les composantes de la vitesse matérielle, mais celles de la vitesse géométrique. L'énergie cinétique de toute la matière comprise à l'intérieur d'une surface donnée est proportionnelle à :

$$I = \frac{\rho}{2} \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, d\omega,$$

où ρ est la densité.

Supposons l'existence d'un potentiel V pour le vecteur u, v, w :

$$u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Dans la formule de Green, faisons V et W identiques; elle devient :

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\omega,$$

$$= \iint V \frac{\partial V}{\partial n} dS - \iiint V \Delta V \, d\omega.$$

Puisque le milieu est incompressible (ρ constant), le flux est conservatif :

$$\Delta V = 0, \qquad I = \frac{\rho}{2} \iint V \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Cette formule remarquable est d'un emploi continuel en Physique.

2°. — Supposons l'espace considéré limité par des parois imperméables excepté sur les surfaces *équipotentielles* 1 et 2 (fig. 314). Le fluide étant incompressible, il en passe nécessairement autant à travers les deux surfaces pendant le même temps. Soit Ddt le *débit total géométrique ou en volume* pendant le temps dt; le *débit matériel* est $\rho D dt$ pendant le même temps.

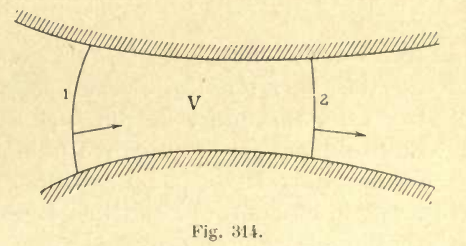


Fig. 314.

Comptons positivement les normales et les débits dans les sens des flèches; on a par définition (§ 481) :

$$D = -\iint \frac{\partial V_1}{\partial n_1} dS_1 = -\iint \frac{\partial V_2}{\partial n_2} dS_2.$$

Les potentiels V_1 et V_2 sont constants en tous les points des surfaces 1 et 2, mais leurs taux de variations normales varient d'un point à l'autre. Avec nos conventions de signes, l'expression de l'énergie cinétique devient $\left(\text{puisque } V_1 \text{ et } V_2 \text{ sortent du signe } \int\right)$:

$$I = -\frac{\rho}{2} V_2 \iint \frac{\partial V_2}{\partial n_2} dS_2 + \frac{\rho}{2} V_1 \iint \frac{\partial V_1}{\partial n_1} dS_1$$

$$= \frac{\rho}{2} (V_1 - V_2) D; \qquad (1)$$

le débit est compté positivement quand le fluide s'écoule de la surface 1 vers la surface 2.

3°. — Pour montrer l'intérêt de ces formules (dont, je le répète, les applications sont innombrables), retrouvons la loi d'Ohm sur l'échauffement des conducteurs.

u, v, w, représentent alors les composantes de la vitesse du courant électrique *qui se conduit comme un fluide incompressible.* L'équation (1) nous apprend donc que l'énergie cinétique perdue sous forme d'échauffement entre les surfaces 1 et 2 d'un conducteur, est proportionnelle au débit D (intensité du courant), à la différence des potentiels V_1 et V_2 des deux extrémités du conducteur, et à un paramètre ρ qui est la *résistivité* de la matière dont est formé le conducteur.

490. Théorème de Stockes.

1°. — Considérons le vecteur $u, v, w,$ et son *curl :*

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (1)$$

On a évidemment : $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0;$

le flux du vecteur $\xi, \eta, \zeta,$ est conservatif. Il est le même à travers toutes les surfaces limitées au même contour : *nous pouvons donc parler sans ambiguïté de son flux à travers un contour.*

Le problème est le suivant : puisque le flux ne dépend que du contour, ne pourrait-on pas l'exprimer au moyen de fonctions définies le long de ce contour? Le théorème de Stockes répond par l'affirmative; il nous apprend que *le flux du vecteur* $\xi, \eta, \zeta,$ *à travers le contour est égal à la circulation du vecteur* $u, v, w,$ *le long de ce contour.*

Autrement dit, soit $\alpha, \beta, \gamma,$ les cosinus directeurs de la normale en un point quelconque d'une surface *quelconque* limitée par le contour; on a :

$$\iint (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\, dS = \int (u dx + v dy + w dz);$$

la première intégrale est étendue à la surface, la seconde est prise le long du contour.

2°. — La démonstration repose sur deux lemmes.

Lemme I. — Soit ABCD la courbe qui limite la surface; traçons sur cette surface deux systèmes de courbes quelconques, la décomposant en quadrilatères et triangles curvilignes quelconques. La somme des circulations du vecteur u, v, w (supposé défini pour toute la surface) le long de tous les quadrilatères et triangles, *parcourus dans le même sens,* est égale à la circulation sur la courbe extérieure.

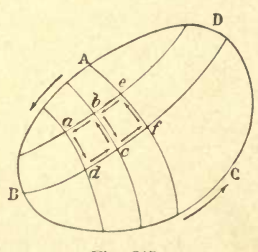


Fig. 315.

En effet, dans le premier cas, chaque côté d'un quadrilatère ou d'un triangle, *qui ne fait pas partie du contour extérieur,* est parcouru deux fois en sens

contraires : ainsi chaque tel côté fait intervenir dans la circulation totale deux quantités égales et de signes contraires qui se détruisent.

LEMME II. — Le flux total d'un vecteur est égal à la somme des flux de ce vecteur à travers chaque élément de surface.

Ces lemmes sont vrais, quelle que soit la grandeur et la forme des éléments en lesquels on découpe la surface; donc il suffit de démontrer le théorème quand les éléments sont infiniment petits, pour qu'il soit démontré pour une surface finie.

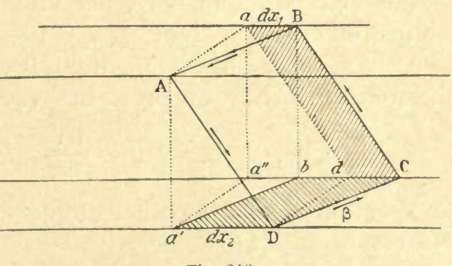


Fig. 316.

3°. — Découpons sur la surface un élément limité par deux systèmes de plans voisins parallèles aux plans xOz et xOy; l'axe des y est dirigé d'avant en arrière, l'axe des x de gauche à droite. Les projections sur les plans coordonnés du petit élément ainsi découpé sont :

$$dy\,dz, \quad dz\,dx_1, \quad dx_2\,dy.$$

Les deux dernières sont ombrées sur la figure 316.

Le flux du vecteur ξ, η, ζ, est égal à :

$$\xi\,dy\,dz + \eta\,dz\,dx_1 + \zeta\,dx_2\,dy. \qquad (2)$$

Évaluons maintenant la circulation du vecteur u, v, w, le long du parcours ABCD.

Considérons, par exemple, le vecteur v; il n'intervient que dans les parcours AB et DC, puisqu'il est normal au parcours AD et CB. Évaluons sa valeur moyenne pour ces parcours, c'est-à-dire sa valeur en leurs milieux (comparer au § 481, 2°); appelons v la valeur au point A.

En α milieu de AB, il est :

$$v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx_1}{2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}.$$

En β milieu de CD, il est :

$$v_2 = v - \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial v}{\partial x}\left[dx_2 + \frac{dx_1}{2}\right].$$

La circulation totale du vecteur v est :

$$-v_1\,dy + v_2\,dy = -\frac{\partial v}{\partial z}dy\,dz + \frac{\partial v}{\partial x}dx_2\,dy.$$

C'est précisément par ces termes que v entre dans le flux (2), si l'on suppose satisfaites les conditions (1).

On procède de même pour la circulation des composantes u et w : le théorème est donc démontré.

4°. — Il résulte de là que nous pouvons *arbitrairement* nous donner un vecteur $u, v, w,$ dans un champ et remplacer sa circulation le long d'une courbe par le flux d'un autre vecteur $\xi, \eta, \zeta,$ à travers une surface quelconque limitée par cette courbe. Ce second vecteur est complètement déterminé, et son flux est conservatif; autrement dit, sa divergence est nulle.

Mais la réciproque n'est pas vraie : nous ne pouvons pas prendre arbitrairement le vecteur ξ, η, ζ; son flux doit être conservatif. De plus, le vecteur $u, v, w,$ dont il est le curl, n'est déterminé qu'à une fonction arbitraire près. Les vecteurs :

$$u, v, w, \quad \text{et} \quad u - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w - \frac{\partial V}{\partial z},$$

où V est une fonction quelconque de $x, y, z,$ satisfont également aux conditions (1).

C'est évident d'après les équations (1) et aussi d'après la nature du problème : *nous ne pouvons en effet remplacer une circulation qui ne dépend que d'une courbe, par un flux à travers une surface limitée par cette courbe, que si le flux est le même pour toutes les surfaces satisfaisant à cette condition.*

491. Exemple : flux d'un vecteur constant.

1°. — Soit un vecteur constant : $\zeta = 2A$ dirigé suivant l'axe des z. Son flux à travers un contour quelconque est égal à la circulation le long de ce contour du vecteur dont les composantes sont :

$$u = -Ay, \qquad v = Ax, \qquad w = 0;$$

Le vecteur $u, v, w,$ est normal à la droite allant de l'origine des coordonnées au point de coordonnées x, y. Il est proportionnel à la distance r de ce point à l'origine :

$$\sqrt{u^2 + v^2} = A\sqrt{x^2 + y^2} = Ar.$$

2°. — Vérifions la proposition pour un cercle de rayon R placé dans le plan xOy et ayant son centre à l'origine.

Le flux du vecteur ζ est $2A.\pi R^2$.

La circulation du secteur u, v est : $2\pi R.RA$.

Nous aurions pu prendre encore les composantes :

$$u = -Ay - \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = Ax - \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

où V est une fonction quelconque de x, y, z. Nous savons en effet que la circulation le long d'une courbe fermée d'un vecteur qui admet un potentiel n'ayant en chaque point qu'une seule détermination, est nulle.

492. Règle du bonhomme d'Ampère.

Dans le théorème précédent, nous avons relié un flux à une circu-

lation. La question des signes mérite d'être élucidée, d'autant plus qu'elle se présente à chaque instant.

Pour reconnaître les faces d'une surface, nous les affectons des signes + et —. La normale à la surface est censée traverser la surface de la face — à la face + (convention habituelle).

Nous choisissons un sens de circulation sur la courbe : les conventions suivantes, équivalentes entre elles, nous apprennent à relier ce sens aux signes des faces. On les connaît sous les noms de règles du *bonhomme d'Ampère* ou du *tire-bouchon de Maxwell* (fig. 317).

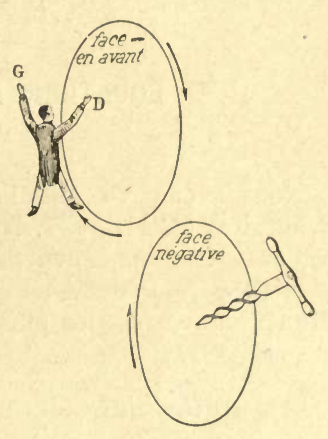


Fig. 317.

Le *bonhomme*, placé de manière qu'un mobile allant dans le sens de circulation lui entre par les pieds et lui sorte par la tête, et tenant entre ses mains la surface, a la face positive à sa gauche.

Un tire-bouchon qu'on fait pénétrer dans la surface par la face négative et qui, par conséquent, avance dans le sens choisi pour la normale positive, tourne dans le sens de circulation.

Il revient encore au même de dire que *les mouvements de translation suivant un axe et de rotation autour de cet axe sont de même signe, lorsque leurs directions correspondent aux mouvements de translation et de rotation d'une vis ordinaire.*

On dit que *le système est à droite.*

Il résulte de ces conventions que si nous nous plaçons devant la face positive (face de sortie du tire-bouchon, direction positive de la normale), la circulation est en sens inverse des aiguilles d'une montre dont la face est tournée vers nous.

Nous n'insisterons pas sur la théorie des Vecteurs.

Pour compléter ce qui précède, on se reportera au Chapitre II du Cours de Mécanique, où la question est envisagée d'un autre point de vue.

CHAPITRE XXIII

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Nous avons vu que l'élimination d'une ou plusieurs fonctions arbitraires (§§ 416, 437, ...) fournit une équation aux dérivées partielles. Réciproquement, l'intégrale des équations aux dérivées partielles contiendra une ou plusieurs fonctions arbitraires. Nous étudierons les cas les plus simples et les plus usuels.

Équations du second ordre à coefficients constants.

493. Cas général.

L'équation qu'il s'agit d'intégrer est :

$$Rr + 2Ss + Tt = 0,$$

ou :
$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

R, S, T, sont des constantes. L'intégrale est :

$$z = f(V_1 y + x) + F(V_2 y + x), \tag{2}$$

où f et F sont des fonctions arbitraires; V_1, V_2 sont des constantes fonctions des paramètres R, S, T.

Il résulte d'abord de la forme linéaire de l'équation (1) que si des fonctions f, F, ..., de x et de y lui satisfont isolément, la somme de ces fonctions multipliées par des constantes arbitraires lui satisfera. Étudions donc séparément les deux parties de l'intégrale (2).

La fonction $z = f(x, y)$, peut être considérée comme dépendant de la variable auxiliaire *unique* t [qui n'a rien de commun avec le symbole t de l'équation (1)] : $t = Vy + x$,

elle-même fonction des variables x et y. On a donc :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = V;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{df}{dt}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = V\frac{df}{dt}.$$

Nous exprimons ainsi que z ou f ne varient respectivement avec x ou y qu'autant qu'elles varient avec t et que t lui-même varie quand x ou y changent de valeurs.

On a de même :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{dt}=\frac{d^2f}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d^2f}{dt^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{V}\frac{\partial}{\partial y}\frac{df}{dt}=\mathrm{V}\frac{d^2f}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial y}=\mathrm{V}^2\frac{d^2f}{dt^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{df}{dt}=\frac{d^2f}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial y}=\mathrm{V}\frac{d^2f}{dt^2}.$$

Substituons dans l'équation (1) ; il vient :

$$(\mathrm{R}+2\mathrm{SV}+\mathrm{TV}^2)\frac{d^2f}{dt^2}=0.$$

Cette équation sera identiquement satisfaite, quelle que soit la fonction f, si l'on a : $\mathrm{R}+2\mathrm{SV}+\mathrm{TV}^2=0.$ (3)

Nous laissons de côté le cas où f est une fonction linéaire de t, auquel cas sa dérivée seconde est identiquement nulle.

Il existe donc deux valeurs V_1 et V_2 de V généralement différentes, pour lesquelles la fonction $f(\mathrm{V}y+x)$ satisfait à l'équation proposée : ce sont les racines de l'équation (3). Nous sommes donc assurés que (2) est une solution de l'équation proposée (1) : *nous admettons que c'est la solution la plus générale.*

494. Cas des racines égales.

Si les racines de l'équation (3) sont égales $(\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2)$, la solution : $z=f(\mathrm{V}_1y+x)+\mathrm{F}(\mathrm{V}_1y+x)$

ne contient plus qu'une seule fonction arbitraire, car la somme de deux fonctions arbitraires *d'une même variable* ne constitue en réalité qu'une fonction arbitraire.

Si V est racine double de l'équation (3), on a simultanément (§ 43) :

$$\mathrm{R}+2\mathrm{SV}+\mathrm{TV}^2=0,\qquad \mathrm{S}+\mathrm{TV}=0. \qquad (4)$$

Vérifions qu'on a une solution en posant :

$$z=yf(\mathrm{V}y+x)+\mathrm{F}(\mathrm{V}y+x),$$

où V est la racine double de l'équation (3). Nous savons que la fonction F est une intégrale; montrons qu'il en est de même pour la fonction yf. On a :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{df}{dt},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f+\mathrm{V}y\frac{df}{dt};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\frac{d^2f}{dt^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{df}{dt}+\mathrm{V}y\frac{d^2f}{dt^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\mathrm{V}\frac{df}{dt}+\mathrm{V}^2y\frac{d^2f}{dt^2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), il vient l'équation :

$$y\frac{d^2f}{dt^2}[R+2SV+TV^2]+2\frac{df}{dt}[S+TV]=0,$$

qui est une identité quand V satisfait aux relations (4).

On comparera utilement ce paragraphe au paragraphe 284 ; on constatera l'analogie des solutions.

495. Existence d'un second membre.

Complétons l'équation par un second membre qui ne soit fonction que de l'une des variables, x par exemple :

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=V(x). \tag{5}$$

Considérons l'équation différentielle :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{V(x)}{R}.$$

On a, grâce à deux quadratures échelonnées :

$$z=\frac{1}{R}\int dx\int V(x)dx.$$

La solution générale de l'équation (5) est :

$$z=f(V_1y+x)+F(V_2y+x)+\frac{1}{R}\int dx\int V(x)dx. \tag{6}$$

Si V est une constante :

$$\int Vdx=Vx+W_0,$$

$$\int dx\int Vdx=\int(Vx+W_0)dx=\frac{Vx^2}{2}+W_0x+W_1.$$

On ajoutera cette fonction à la solution (2).

496. Fonctions harmoniques cylindriques.

Soit à intégrer l'équation :

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

En vertu du § 493, les nombres V sont fournis par la relation :

$$V^2+1=0, \qquad V=\pm i.$$

D'où la solution : $z=f(x+iy)+F(x-iy)$.

Nous retrouvons des résultats connus (§§ 236 et sq.).

Reprenons les anciennes notations; posons donc :

$$w=\varphi+i\psi=f(x+iy).$$

Nous avons montré que les fonctions φ et ψ satisfont aux équations :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Ainsi, pour trouver deux solutions de l'équation (1), il suffit de prendre une fonction quelconque de la variable $x \pm iy$; les termes réels et les termes imaginaires satisfont séparément à l'équation aux dérivées partielles.

497. Équation des cordes vibrantes.

Soit à intégrer l'équation :

$$V^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \qquad (1)$$

La solution générale est de la forme :

$$z=f(Vy+x)+F(-Vy+x),$$

ce que nous pouvons écrire aussi bien :

$$z=f(Vy+x)+F(Vy-x),$$

puisque F est arbitraire. Nous ne discuterons pas ici cette solution. La discussion n'est claire qu'en la concrétisant par des phénomènes; ce serait donner la théorie des cordes vibrantes ou des tuyaux cylindriques, qui est mieux à sa place en *Mécanique physique*.

498. Solutions particulières.

L'équation : $$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

admet l'intégrale particulière :

$$z=a_n \sin\left[n(Vy+x)-\alpha_n\right], \qquad (2)$$

qui rentre dans la forme générale (2) du § 493. Nous avons déjà fait observer qu'en vertu de la forme linéaire de l'équation (1), la somme d'autant de solutions particulières qu'on voudra est une solution. Nous savons, d'autre part (§ 265), que toute fonction périodique de x peut être développée en série de la forme :

$$z=A_0+\sum_1^\infty a_n \sin(nx-\alpha_n). \qquad (3)$$

Nous concluons que toutes les fonctions périodiques qui satisfont à l'équation (1), peuvent être mises sous la forme :

$$z=A_0+\sum_1^\infty a_n \sin\left[n(V_1 y+x)-\alpha_n\right]+\sum_1^\infty a'_n \sin\left[n(V_2 y+x)-\alpha'_n\right],$$

contenant les quatre infinités de constantes : a_n, a'_n, α_n, α'_n.

Comment sont déterminées ces constantes est une question que nous ne traiterons pas ici; nous renverrons au *Cours de Mécanique physique*, qui contient de nombreux exemples, et où les quantités se trouvent concrétisées en notions expérimentales.

499. Équations qui se ramènent à l'équation linéaire du second ordre.

1°. — Dans la propagation des ondes, on rencontre l'équation :

$$\frac{\partial^2(xZ)}{\partial y^2} = V^2 \frac{\partial^2(xZ)}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Nous en avons immédiatement la solution générale :

$$Z = \frac{1}{x} f(Vy \pm x),$$

où f représente deux fonctions arbitraires, une pour chaque signe.

On a : $$-\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{x^2} f(t) \mp \frac{1}{x}\frac{df}{dt}, \qquad t = Vy \pm x.$$

2°. — On rencontre aussi l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2z}{x}\right); \qquad (2)$$

l'intégrale générale en est :

$$z = \frac{1}{x^2} F(t) \mp \frac{1}{x}\frac{dF}{dt}, \qquad t = Vy \pm x.$$

Les équations (1) et (2) reviennent donc exactement au même, à la condition de poser :

$$z = -\frac{\partial Z}{\partial x}.$$

3°. — L'équation du premier ordre :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = V \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad (3)$$

rentre comme cas particulier dans l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

En effet, dérivons (3) successivement par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = V \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

La solution générale de (3) est : $z = f(Vy + x)$.

On trouverait de même : $z = f(Vy - x)$, comme solution générale de : $$\frac{\partial z}{\partial y} = -V \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Toutes ces remarques sont capitales dans les théories des cordes vibrantes et des tuyaux sonores.

Équation de la Conductibilité calorifique ou électrique.

500. Établissement de l'équation.

Les équations aux dérivées partielles sont le mode naturel d'expression des conséquences des lois physiques. Elles déterminent, non pas le détail d'un phénomène particulier, mais les conditions générales de tous les phénomènes de même nature ; d'où les fonctions arbitraires que contiennent les intégrales, fonctions qui sont déterminées par les conditions particulières imposées.

Nous allons montrer la nature du problème sur un cas simple et

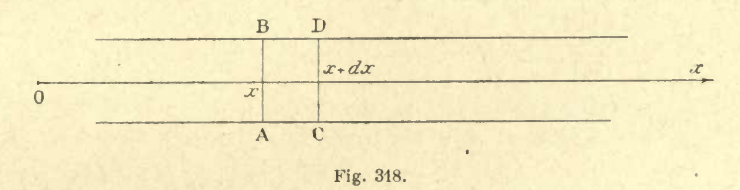


Fig. 318.

dont le lecteur pourra suivre la discussion sans être versé dans l'étude de la Physique (fig. 318).

Imaginons une barre cylindrique dont la température T est la même en tous les points d'une section droite AB, mais varie d'une section à l'autre et d'un instant à l'autre :

$$T = f(x, t).$$

Il s'agit de trouver les conditions générales auxquelles la fonction $T(x, t)$ doit satisfaire, *indépendamment de toute autre spécification.*

Posons, comme le veut l'expérience, que la quantité de chaleur qui traverse dans le temps dt la section AB est proportionnelle : 1° au taux de diminution de la température, 2° à l'aire s de la section droite de la barre, 3° au temps dt. Du reste, ce sont les hypothèses les plus simples. Elles s'expriment par l'équation :

$$d_1 Q = -ks \frac{\partial T}{\partial x} dt.$$

A travers la section CD, la formule précédente sera applicable en remplaçant x, par $x + dx$ ou T par :

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx; \qquad \text{d'où :} \qquad d_2 Q = -ks\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx\right) dt.$$

La quantité de chaleur qui reste dans l'élément de volume ABCD, est la différence entre ce qui entre et ce qui sort :

$$d_1 Q - d_2 Q = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} s\, dx\, dt,$$

Ce qui précède revient à dire que *la température joue le rôle d'un potentiel par rapport à la vitesse de propagation de la chaleur* (§ 485). Les surfaces *équipotentielles* ou *isothermes* sont, par hypothèse, les sections droites du cylindre.

La quantité Q joue le rôle du *débit* en Hydrodynamique (§ 481).

De cette chaleur, une portion se perd à travers les parois latérales. Posons qu'elle est proportionnelle : 1° à la température, 2° à la surface latérale, produit du périmètre p par la longueur dx de l'élément, 3° au temps dt : $p\,k'\mathrm{T}\,dx\,dt$.

La seconde portion sert à échauffer le petit volume. Soit ρ la densité, c la chaleur spécifique de la matière employée, $(\partial\mathrm{T} : \partial t)dt$ l'accroissement de température au même endroit $(dx=0)$ pendant le temps dt. On a en définitive :

$$k\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial x^2}\,s\,dx\,dt = pk'\mathrm{T}\,dx\,dt + c\rho\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,s\,dx\,dt.$$

Supprimant les facteurs communs, il reste :

$$ks\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial x^2} = c\rho s\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t} + pk'\mathrm{T}. \qquad (1)$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles à satisfaire *dans tous les cas, quel que soit le phénomène particulier considéré, pourvu qu'il rentre dans la définition générale qui vient d'être donnée.* Suivant les conditions particulières imposées, nous serons conduits à choisir des intégrales de formes très diverses qui auront en commun de satisfaire à l'équation (1) plus ou moins simplifiée.

501. État permanent.

1°. — Supposons l'état *permanent* atteint ; T n'est plus fonction du temps ; la température ne dépend que du point de la barre considéré. Écrivant $pk' : sk = b^2$, on a (§ 283, *2°*) :

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2} = b^2\mathrm{T}, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{A}e^{bx} + \mathrm{B}e^{-bx}.$$

On détermine les constantes en posant que la température est T_0 à l'un des bouts de la barre $(x=0)$, T_1 à l'autre bout $(x=l)$. D'où les conditions :

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}, \qquad \mathrm{T}_1 = \mathrm{A}e^{bl} + \mathrm{B}e^{-bl}.$$

2°. — Supposons la barre assez longue. On peut admettre qu'une des extrémités ne change pas de température. Sa température est donc celle du milieu ambiant : nous l'avons prise pour zéro, puisque nous écrivons le refroidissement proportionnel à T. Exprimons donc que pour de grandes valeurs de la variable l, on a :

$$\mathrm{T} = 0\,; \qquad \text{il vient :} \qquad \mathrm{A} = 0.$$

L'excès de température en un point quelconque de la barre est donné par la formule :

$$T = T_0 e^{-bx}.$$

On reconnaît la loi élémentaire déterminant la température : *quand la distance à la source suit une progression arithmétique, l'excès de température de la barre sur la température extérieure suit une progression géométrique.*

502. État variable sans perte latérale; variation périodique de la température à une extrémité.

1°. — Supposons la perte latérale nulle. L'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2a^2 \frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (1)$$

L'intégrale peut prendre une infinité de formes ; il existe une infinité de solutions particulières correspondant chacune à un phénomène déterminé. Par exemple, on vérifiera que :

$$T = T_0 e^{-ax\sqrt{\omega}} \sin\left(\omega t - ax\sqrt{\omega} - \alpha_\omega\right), \qquad (2)$$

satisfait à l'équation (1).

Pour $x = 0$; $T = T_0 \sin\left(\omega t - \alpha_\omega\right)$.

La solution (2) correspond donc au cas où l'on impose à l'origine $x = 0$, une variation *sinusoïdale* périodique de la température ; la période *arbitraire* est $\tau = 2\pi : \omega$.

2°. — Mais l'équation (1) étant linéaire, la somme d'un nombre quelconque de solutions particulières est une solution. Nous savons, de plus (§ 265), que toute fonction périodique se met sous la forme d'une série trigonométrique. Remplaçons donc $\omega = 2\pi : \tau$, par 2ω, 3ω..., $n\omega$, où τ est la période du phénomène ; nous obtiendrons pour la température *imposée à l'origine* la fonction périodique quelconque :

$$T = T_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + T_2 \sin(2\omega t - \alpha_2) + \ldots = f(t),$$

et pour la température en un point quelconque de la barre :

$$T = \sum T_n e^{-ax\sqrt{n\omega}} \sin\left(n\omega t - ax\sqrt{n\omega} - \alpha_n\right). \qquad (3)$$

La fonction périodique $f(t)$ étant donnée, la double infinité de paramètres T_n, α_n, peut être calculée, et par suite on connaît l'intégrale (3).

Ce qui précède est un exemple d'intégration par série, et nommément par série trigonométrique. *Dans la pratique, on s'arrangera de manière que la fonction $f(t)$ soit représentable par un petit nombre de termes, ce qui réduira la série (3) à ce même nombre de termes.*

503. Même équation ; phénomène tendant vers un état permanent.

1°. — On vérifiera que l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2a^2 \frac{\partial T}{\partial t},$$

admet la solution : $\quad T = T_0 e^{-2\omega^2 t} \sin 2a\omega x.$

La valeur de ω est arbitraire. Pour t grand, le terme exponentiel s'annule ; pour $t = 0$, il se réduit à l'unité; d'où :

$$T = T_0 \sin 2a\omega x.$$

J'ai le droit d'additionner un nombre quelconque de termes analogues, en particulier de prendre pour ω la suite ω, 2ω 3ω,..., $n\omega$.

2°. — Supposons une barre à la température 0. Choisissons sa longueur pour unité. Portons brusquement une extrémité $x = 1$ à la température 1, tout en maintenant l'autre $(x = 0)$ à la température 0. Les conditions sont résumées dans le tableau :

$T = 0,$	pour $t = 0,$	quel que soit x ;
$T = 1,$	pour $x = 1,$	quel que soit t ;
$T = 0,$	pour $x = 0,$	quel que soit t.

En vertu de la formule II du § 267, on a, x variant entre 0 et 1 :

$$x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \ldots\right],$$

$$x = -\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n}. \qquad (1)$$

Je dis que la solution cherchée est :

$$T = x + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{2a^2}\right) \cdot \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

En effet, pour $x = 0$ et pour $x = 1$, tous les termes de la série s'annulent. Il reste, quel que soit t :

$$T = 0, \quad \text{pour } x = 0; \quad T = 1, \quad \text{pour } x = 1.$$

Pour $t = 0$, on a :

$$T = x + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n} = 0.$$

Les conditions imposées sont donc satisfaites.

3°. — La température tend vers une distribution linéaire. En effet, si t est assez grand, tous les termes s'annulent quel que soit x, il reste :

$$T = x.$$

L'intensité du courant est proportionnelle au taux de variation :

$$i = \frac{\partial T}{\partial x} = 1 + 2\sum_1^{\infty}(-1)^n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{2a^2}\right)\cos n\pi x.$$

Posons : $$\exp\left(-\frac{\pi^2 t}{2a^2}\right) = u.$$

On a : pour $x = 0$, $i = 1 - 2(u - u^4 + u^9 - u^{16} + \ldots)$;

pour $x = 1$, $i = 1 + 2(u + u^4 + u^9 + \ldots)$.

La solution précédente est purement théorique. Discuter le phénomène sur une telle série est quasiment impossible; la difficulté est du même ordre que d'étudier les propriétés d'une droite sur la relation (1). La série (1) est très lentement convergente; d'après la nature même du problème, il est impossible de limiter *a priori* le nombre des termes à considérer, ce qu'on pouvait faire au paragraphe précédent.

504. Même équation; solution sous forme d'intégrale dont une des limites est variable.

1°. — Posons : $$z = f(x, t).$$

Cherchons à quelle condition T deviendra fonction de z, cessera de dépendre de x et de t autrement que par la combinaison z. S'il en est ainsi, T restera constant chaque fois que z le sera, quelles que soient les variations simultanées de x et de t.

Considérons T comme fonction de z. On a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2T}{dz^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{dT}{dz}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dz}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Substituons dans l'équation aux dérivées partielles du § 502 :

$$\frac{d^2T}{dz^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{dT}{dz}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2a^2\frac{\partial z}{\partial t}\right) = 0.$$

Si la fonction f est choisie de manière qu'on ait :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2a^2\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \varphi(z),$$

l'équation aux dérivées partielles (1) du § 502 sera transformée en l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2T}{dz^2} + \varphi(z)\frac{dT}{dz} = 0.$$

2°. — Posons en particulier :

$$z = \frac{ax}{\sqrt{2t}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2t}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{ax}{2t\sqrt{2t}}. \qquad (1)$$

On trouve l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dz^2}+2z\frac{dT}{dz}=0,$$

qui admet l'intégrale :

$$T=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz. \tag{2}$$

En effet (§ 153) :

$$\frac{dT}{dz}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}, \qquad \frac{d^2T}{dz^2}=\frac{4z}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}.$$

2°. — Nous avons donc en (2) une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles. Elle implique que T reste constant chaque fois que z reste constant : nous retrouvons la même température pour des abscisses x de la barre et pour des temps t liés entre eux par la relation (1). Cette solution correspond à une expérience particulière qu'il s'agit de préciser.

Pour $z=0$ (à l'origine des coordonnées quel que soit t, pour une valeur infinie de t quel que soit x), on a : $T=1$.

Pour un temps nul, quel que soit x, on a : $z=\infty$. Nous savons que (§ 309, *1°*) : $\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; d'où $T=0$.

Donc à l'origine des temps, la barre *supposée indéfinie* est à la température 0. Brusquement on porte l'origine $x=0$, à la température 1, et on l'y maintient indéfiniment.

L'équation (5) fournit la température en tout point de la barre et pour un temps quelconque, par l'intermédiaire de la variable z. La même valeur de z correspond aux valeurs de x et de t qui sont reliées par l'équation (1).

Pour un temps infini, on a $T=1$, en tous les points de la barre. En chaque point la température, sensiblement nulle pendant un certain temps, croît d'abord vite, puis lentement, et tend vers une limite naturellement égale à l'unité, puisque par hypothèse il n'y a pas de perte latérale.

Si les séries sont plus avantageuses quand les conditions de l'expérience permettent de n'en considérer qu'un terme ou qu'un très petit nombre de termes, il est beaucoup plus commode de discuter la nature d'un phénomène sur une intégrale. Cette remarque est générale : personne ne reconnaîtra dans la série qui représente un sinus le caractère périodique de la fonction.

505. Intégration par les séries.

1°. — Cherchons à exprimer l'intégrale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

par un développement en série suivant les puissances croissantes et entières de t. Posons :

$$T = \varphi(x) + \frac{t}{1}\varphi_1(x) + \frac{t^2}{1.2}\varphi_2(x) + \cdots$$

où φ, φ_1, φ_2,... sont des fonctions à déterminer.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \varphi''(x) + \frac{t}{1}\varphi_1''(x) + \frac{t^2}{1.2}\varphi_2''(x) + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varphi_1(x) + \frac{t}{1}\varphi_2(x) + \frac{t^2}{1.2}\varphi_3(x) + \cdots$$

Identifions : $\varphi_1 = \varphi''$, $\varphi_2 = \varphi_1'' = \varphi^{IV}$, $\varphi_3 = \varphi_2'' = \varphi^{VI}$,...

D'où la solution :

$$T = \varphi(x) + \frac{t}{1}\varphi''(x) + \frac{t^2}{1.2}\varphi^{IV}(x) + \cdots \tag{2}$$

La fonction $\varphi(x)$ reste arbitraire.

2°. — Cherchons à exprimer l'intégrale par un développement en série suivant les puissances croissantes et entières de x. Posons :

$$T = \psi(t) + \frac{x}{1}\psi_1(t) + \frac{x^2}{1.2}\psi_2(t) + \frac{x^3}{1.2.3}\psi_3(t) + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \psi_2(t) + \frac{x}{1}\psi_3(t) + \frac{x^2}{1.2}\psi_4(t) + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \psi'(t) + \frac{x}{1}\psi_1'(t) + \frac{x^2}{1.2}\psi_2'(t) + \cdots$$

Identifions : $\psi_2 = \psi'$, $\psi_3 = \psi_1'$, $\psi_4 = \psi_2' = \psi''$,...

D'où la solution :

$$T = \psi(t) + \frac{x}{1}\psi_1(t) + \frac{x^2}{1.2}\psi'(t) + \frac{x^3}{1.2.3}\psi_1'(t) + \tag{3}$$

Il y a deux fonctions arbitraires $\psi(t)$ et $\psi_1(t)$. Remplaçant les deux fonctions par des développements en série suivant les puissances croissantes de t, on démontre aisément que les intégrales (2) et (3) rentrent l'une dans l'autre, bien que l'une contienne une fonction arbitraire et que l'autre en contienne deux.

506. Solution sous forme d'intégrale à limites fixes.

Vérifions que l'intégrale définie :

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x \pm 2z\sqrt{t})e^{-z^2}dz, \tag{4}$$

est une solution de l'équation (1). Prenons par exemple le signe $+$. La fonction φ dépend de la variable auxiliaire $\omega = x + 2z\sqrt{t}$.

On a : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{d\varphi}{d\omega} 2\sqrt{t}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} 4t$;

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{d\omega}\frac{z}{\sqrt{t}} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{z}{2t}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\frac{1}{4t}.$$

Pour que (4) satisfasse à l'équation du § 505, il faut qu'on ait identiquement, d'après les règles de la dérivation sous le signe $\int$ par rapport à un ou plusieurs paramètres servant de variables (§ 301) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)e^{-z^2}dz = \frac{1}{4t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}2z - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)e^{-z^2}dz = 0.$$

Or on a : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} e^{-z^2} 2z\,dz = d\left[-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} e^{-z^2}\right] + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} e^{-z^2}dz.$

Pour que la proposition soit vérifiée, il suffit donc que la quantité entre crochets s'annule pour $\pm\infty$.

507. État variable avec refroidissement latéral.

1° Étudions une solution particulière de l'équation complétée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2a^2\frac{\partial T}{\partial t} + b^2 T. \qquad (1)$$

On vérifiera qu'il existe une intégrale de la forme :

$$T = T_0 e^{-\mu x}\sin(\omega t - \mu' x - \alpha_0). \qquad (2)$$

Substituant (2) dans (1), on trouve les conditions :

$$\mu\mu' = a^2\omega\,; \quad \mu^2 = \frac{b^2}{2} + \sqrt{\frac{b^4}{4} + a^4\omega^2}, \quad \mu'^2 = -\frac{b^2}{2} + \sqrt{\frac{b^4}{4} + a^4\omega^2}.$$

Si $b = 0$, il vient : $\mu = \mu' = a\sqrt{\omega}$, conformément au § 502.

Pour $x = 0$, $T = T_0 \sin(\omega t - \alpha_0)$.

La solution précédente convient donc au cas où la barre subit un refroidissement latéral, et où on impose une variation *sinusoïdale* périodique à l'une des extrémités. La période arbitraire est

$$\tau = 2\pi : \omega.$$

2°. — On peut généraliser la solution en additionnant autant de solutions précédentes qu'on veut. Par exemple on impose, non plus une variation sinusoïdale, mais une variation périodique pouvant se représenter par la série :

$$T = T_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + T_2 \sin(2\omega t - \alpha_2) + \ldots$$

limitée à un très petit nombre de termes.

La solution se compose d'un même nombre de termes de la forme (2), dans lesquels ω est successivement remplacé par ω, 2ω, 3ω,...

Équations aux dérivées partielles de l'Optique.

508. Principe des petits mouvements.

Les équations aux dérivées partielles qu'on rencontre en si grand nombre en Optique et généralement en Physique mathématique, sont ordinairement *linéaires et à coefficients constants*. Cette propriété correspond à une loi naturelle importante, connue sous le nom de *principe des petits mouvements*. Elle consiste en ce que si plusieurs mouvements existent *isolément* sous l'action de certaines causes, ils *coexistent* sous l'action simultanée de ces causes. *Coexister* signifie que le mouvement complexe est la somme géométrique des mouvements simples; autrement dit, que la projection sur un axe quelconque du mouvement qui résulte de l'ensemble des causes, est la somme algébrique des projections sur ce même axe des mouvements respectivement dus aux causes agissant isolément.

Il importe de remarquer qu'il y a là tout autre chose qu'une équivalence cinématique. Dans bien des cas, deux causes agissant simultanément produisent des phénomèmes très différents de la somme des phénomènes dus à chacune d'elles. Nous avons vu un exemple au § 288. L'équation différentielle cessant d'être linéaire, doubler la cause (dont l'intensité est ici représentée par le coefficient du terme périodique du second membre) ne double pas l'effet; l'adjonction d'une seconde cause introduit des effets qui n'existent ni pour l'une ni pour l'autre cause agissant isolément. Mais quand les équations aux dérivées partielles sont linéaires et à coefficients constants, on a une intégrale en ajoutant un nombre quelconque d'intégrales : c'est la traduction analytique du principe des petits mouvements.

509. Nature des solutions utilisées en Optique.

Les équations aux dérivées partielles rencontrées en Optique sont fort compliquées. Leur intégration ne présente cependant aucune difficulté, *parce qu'on se borne à des solutions qui correspondent à des ondes planes plus ou moins absorbées.*

1°. — Considérons l'expression :

$$P = (A + Bi)\exp\left\{-(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) + i[\omega t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)]\right\} \quad (1)$$

Posons :

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \Phi',$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \Phi.$$

La quantité (1) s'écrit :

$$P = P_0 \exp[-\Phi' + i(\omega t - \Phi)].$$

On vérifie immédiatement que la dérivation par rapport à une

variable (x, y, z, ou t) consiste à multiplier par le coefficient de la variable. Ainsi :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -(\alpha' + i\alpha) P, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (\alpha' + i\alpha)^2 P, \ldots$$

2° — Soient P, Q, R, les composantes d'un mouvement suivant les axes Ox, Oy, Oz :

$$P = P_0 \exp[-\Phi' + i(\omega t - \Phi)],$$
$$Q = Q_0 \exp[-\Phi' + i(\omega t - \Phi)],$$
$$R = R_0 \exp[-\Phi' + i(\omega t - \Phi)].$$

Par définition, le mouvement que représentent ces équations est dit se propager par ondes planes plus ou moins absorbées.

Pour obtenir le mouvement réel, on fera le partage des quantités réelles et des quantités imaginaires, et l'on ne conservera que les quantités réelles.

Soit, par exemple : $P_0 = P'_0 (\cos \rho + i \sin \rho)$.

On a (§ 230) :

$$\exp i(\omega t - \Phi) = \cos(\omega t - \Phi) + i \sin(\omega t - \Phi),$$
$$P_0 \exp i(\omega t - \Phi) = P'_0 \cos(\omega t - \Phi + \rho) + i P'_0 \sin(\omega t - \Phi + \rho).$$

Les quantités réelles sont de la forme :

$$P' = P'_0 \exp(-\Phi') \cos(\omega t - \Phi - \rho).$$

3°. — Ceci posé, soit un système d'équations aux dérivées partielles quelconques, mais linéaires et à coefficients constants. Il s'agit de trouver une onde plane P, Q, R, qui lui satisfasse. Comme nous l'avons dit plus haut, les dérivations sont immédiatement effectuées ; quelles qu'elles soient, elles laissent toujours en facteur la même quantité *variable :*

$$\exp[-\Phi' + i(\omega t - \Phi)],$$

qui s'élimine d'elle-même.

On obtient en définitive un certain nombre de conditions à vérifier identiquement, entre les coefficients P_0, Q_0, R_0, α, β, γ, α', β', γ', ω, qui figurent dans l'expression de l'onde, et les coefficients des équations aux dérivées partielles.

Ces conditions expriment les lois physiques.

L'intégration consiste donc à écrire des relations obtenues par substitution directe ; il n'y a ni tâtonnement ni difficultés.

4°. — Pour fixer les idées, prenons l'exemple simple :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta P, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \Delta Q, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = a^2 \Delta R ;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On a immédiatement :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -(A + Bi)\,\omega^2 P; \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (A + Bi)(\alpha' + i\alpha)^2 P; \ldots$$

Substituant dans la première équation, il vient :

$$(A + Bi)\,P\left\{\omega^2 + \left[(\alpha' + i\alpha)^2 + (\beta' + i\beta)^2 + (\gamma' + i\gamma)^2\right]a^2\right\} = 0.$$

On a une solution en posant :

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0, \qquad a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \omega^2.$$

Elle correspond à des ondes planes propagées sans absorption.

510. Simplification des solutions des équations aux dérivées partielles.

Dans un très grand nombre de cas, le temps est une des variables indépendantes, et l'on cherche les solutions périodiques par rapport au temps.

L'expérience prouve même qu'en Optique, *à la précision actuelle de nos expériences,* on peut admettre que les phénomènes périodiques sont sinusoïdaux. D'où résultent des simplifications immédiates dans l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Soit, par exemple, l'équation :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x} = a\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Posons : $$w = w_0 W e^{i\omega t},$$

où W est une fonction de x indépendante du temps.

La solution de l'équation aux dérivées partielles est ramenée à celle de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dW}{dx} = i\omega a W.$$

Voici un second exemple emprunté à la théorie des lames vibrantes :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Posons encore : $w = w_0 W e^{i\omega t}$, où W est une fonction de x indépendante du temps. On trouve :

$$\omega^2 W = a^2\frac{d^4 W}{dx^4},$$

équation différentielle étudiée au § 285.

CHAPITRE XXIV

EXERCICES PRATIQUES ET MANIPULATIONS

511. Critique des méthodes classiques.

1°. — Il est nécessaire de caractériser les méthodes suivies dans ce Cours en opposition avec les méthodes habituelles : ainsi je rassurerai mes lecteurs, et j'aiderai à la tâche de mes critiques mathématiciens. *Il va de soi que si je préfère mes méthodes aux leurs, c'est pour le but que je poursuis.* Bien que je n'aime pas la pêche à la ligne, bien que je trouve ce sport insipide, je parle bas près du pêcheur; mais je me fâche si on m'impose de tremper du fil dans l'eau. Que les mathématiciens s'amusent suivant leurs goûts, je n'y vois aucun inconvénient; mais je me révolte quand ils prétendent associer à leurs jeux ceux qui préfèrent autre chose. *Est-ce ma faute si sur cent jeunes gens qui font des mathématiques, quatre-vingt-dix-neuf n'y cherchent qu'un outil?* Du reste, quand je parle des mathématiciens, c'est *quelques* mathématiciens qu'il faut entendre. Grâce à Dieu, je répète ce que les plus illustres ont dit, et ce que répéteraient avec eux la masse de mes collègues professeurs, s'il n'existait pas à Paris quelques personnes pour leur imposer des méthodes préjudiciables à la quasi totalité de leurs élèves.

2°. — Les mathématiciens (dont je parle) attachent aux résultats moins d'importance qu'à la recherche des résultats. La suprême joie des professeurs de Spéciales dont je parle, est de renfermer en dix lignes ce que leurs collègues énoncent en douze; ils jubilent quand leurs équations font bien sur le papier, alors même que moins de symétrie allégerait le travail de l'élève.

Ne perdons pas de temps aux vains préliminaires; expliquer d'abord le problème par des exemples est indigne de notre génie. Hâtons-nous d'enfiler des syllogismes, dussions-nous en oublier d'énoncer ce que nous voulons prouver!

3°. — Mais, direz-vous, puisqu'ils prisent si fort *la recherche* des

résultats, leurs démonstrations sont intéressantes. Détrompez-vous : bien forcés d'admettre qu'il est bon de voir juste, ils veulent surtout voir par principes. *Ils ont la monomanie de la forme.* L'intuition est leur bête noire; ce qu'ils appellent comprendre, ce n'est pas saisir les relations entre des objets divers, c'est rencontrer une proposition au bout d'un sorite. Ils ressemblent à l'aveugle qui suit son caniche. Azor veut-il saluer au passage une chienne amie? vite, un coup de bâton. On traverse un square; veut-il profiter de l'herbe tendre? crac! un coup de pied. On arrive à la maison : l'aveugle s'endort, et Azor se demande avec mélancolie pourquoi la malechance le condamne éternellement à une besogne d'où la raison est bannie.

4°. — Il ne leur suffit pas de ramener des propositions en elles-mêmes incontestables (comme les cas d'égalité des triangles) à des propositions qui difficilement sont moins incontestables; ils chipotent sur ces dernières *Encore une fois, je ne conteste pas l'intérêt en soi de ces discussions.* Je trouve bien qu'on écrive un volume sur les définitions de la ligne droite; mais je trouve absurde de fatiguer les élèves avec ce qu'ils considèrent comme du radotage, ne pouvant en saisir l'intérêt *très spécial.* Que ces mathématiciens lissent leurs plumes en petit comité, soit; mais qu'ils ne se livrent pas à leurs exercices devant les élèves qu'ils exaspèrent ou abrutissent, suivant les tempéraments !

512. Des méthodes de découverte.

1°. — La suprême de ces méthodes *formelles* contre lesquelles je cherche à réagir, c'est le truc, la ficelle. Jamais les mathématiciens (dont je parle) n'exposent une question comme elle se présente : *ce ne serait pas assez beau.* Ils devraient avouer que la *méthode de découverte en Mathématiques comme ailleurs est de tâtonner.* Fi donc ! que deviendrait l'idée qu'ils désirent qu'on ait de leur génie!

Expliquons les deux méthodes par un exemple : il n'est pas nécessaire d'aller bien loin dans le Cours.

Soit à résoudre l'équation :

$$x^2+px+q=0. \qquad (1)$$

2°. — Tâtonnements.

Je suppose ne rien savoir que la définition des racines. Je tâtonne donc. Égaler x à un monôme, poser $x=a$, ne fait que changer de notation. Je pose donc $x=a+b$, et je substitue :

$$a^2+b^2+2ab+ap+bp+q=0.$$

Cette équation doit être satisfaite identiquement; j'ai deux arbitraires, je vais m'en servir au mieux. Après avoir déterminé l'une d'elles, l'autre doit être calculable par une équation du premier degré que par hypothèse je sais résoudre.

Je n'ai plus l'embarras du choix ; j'écris :

$$(2a+p)\,b+a^2+b^2+ap+q=0.$$

Je pose :

$$a=-\frac{p}{2},\quad \text{d'où :}\quad b^2=\frac{p^2}{4}-q,\qquad b=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ ;$$

et enfin :

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \tag{2}$$

L'hypothèse $x=a+b$, *la plus simple après l'hypothèse* $x=a$, a donc réussi. Sinon, j'aurais cherché autre chose.

3°. — Méthodes élégantes.

Les mathématiciens en conviennent : c'est ainsi qu'on a dû résoudre l'équation du second degré pour la première fois; sinon exactement ainsi, du moins par des procédés similaires. Mais ce n'est jamais ainsi qu'on présente le problème au débutant. On a recours à une ficelle : *Essayons de faire apparaître un carré parfait, ...* etc. ...; tout le monde connaît le procédé.

C'est, dit-on, remarquablement élégant. Malheureusement ce truc ne sert exactement que dans ce cas particulier, tandis que la méthode de tâtonnement est générale. Elle réussit immédiatement chaque fois qu'on connaît *la forme* du résultat; elle suggère aisément cette forme. Ses applications pratiques sont innombrables.

L'*analogie* n'est au surplus qu'une des formes du tâtonnement.

4°. — Trucs et ficelles.

Mais l'inconvénient le plus grave du truc est de laisser aux élèves une idée fausse : *à savoir qu'il constitue une démonstration.* Or, par définition, il n'existe d'autre démonstration de la convenance d'une expression comme racine, que la substitution dans l'équation qui devient alors une identité : c'est une vérité dont les élèves qui se présentent au baccalauréat, n'ont généralement pas la moindre notion.

Mais, objectez-vous, il serait plus simple de dire aux enfants : Les racines de l'équation (1) sont les expressions (2); vérifions-le par substitution.

C'est exactement mon avis : je procède ainsi tout le long de ce Cours. J'y vois l'avantage considérable de supprimer une infinité de choses inutiles. *Puisque les méthodes de pseudo-découverte sont fabriquées après coup et constituent des trompe-l'œil,* autant donner tout de suite le résultat et prouver qu'il est correct : c'est simple, clair, et n'entraîne aucune idée fausse.

Malheureusement ce procédé heurte toute l'école pour laquelle la recherche des résultats est plus intéressante que les résultats eux-mêmes. Il a de plus l'inconvénient de maigrir les mathématiques à les faire ressembler à un squelette : loin de s'en réjouir comme ils devraient, les mathématiciens en sont consternés.

5°. — Tours de passe-passe continuels.

Ce que j'ai dit de la résolution de l'équation du second degré, je pourrais le répéter à toutes les pages du Cours de Calcul différentiel et intégral : les méthodes de soi-disant découverte ont été fabriquées après coup, pour avoir l'air de trouver par la seule pénétration du génie ce qui est le résultat d'un heureux tâtonnement. On a construit un édifice artificiel qu'on offre à notre admiration comme s'il représentait l'ordre naturel en personne. Le résultat le plus clair de cette entreprise est de convaincre l'élève que les mathématiques sont une collection de *tours de passe-passe* qu'il faut être infiniment malin pour assimiler, tandis qu'elles représentent des constatations élémentaires et quasiment évidentes, exprimées en un langage très simple dont la clef fonctionne sans qu'il soit besoin de formules magiques.

6°. — Termes de comparaison.

Quand on regarde sans préjugés les procédés mathématiques, on est frappé de leur simplicité, je dirai même de leur terre-à-terre : au surplus, de là proviennent leur évidence et leur valeur.

Voici la marche habituelle : *on étudie des cas simples dont les solutions servent ensuite de termes de comparaison, dans les cas complexes, pour conclure a fortiori.*

Par exemple, on étudie les courbes algébriques ; elles servent de termes de comparaison pour les courbes transcendantes, après développements en série des transcendantes. On étudie la progression géométrique ; on conclut la convergence ou la divergence des séries par comparaison avec elle. Et ainsi de suite.

Il n'y a rien là de très relevé. Encore une fois, je ne m'en plains pas ; mais pourquoi le faire à la pose ?

7°. — Théorèmes et problèmes.

Une habitude bizarre et néfaste consiste à distinguer le théorème du problème. Dire que la différence réside dans la forme de l'énoncé est une sottise : il n'y a pas un théorème qu'on ne puisse proposer comme un problème à résoudre ; il n'y a pas de problème qu'on ne puisse énoncer sous forme dogmatique. A la vérité, suivant leurs goûts, les professeurs installent les propositions dans l'une ou l'autre case. Mais on trouble ainsi les meilleurs élèves : ils sont longtemps, j'en parle d'après une expérience personnelle, à rejeter le poids de ces distinctions artificielles.

Voici la raison, généralement oubliée, de ces dénominations.

Il existe une trame indispensable de propositions qu'on doit nécessairement connaître ; *elles sont en très petit nombre.*

Si l'on veut, on les décorera du nom de *théorèmes.*

Il existe en dehors une infinité de propositions moins importantes, qui se déduisent des premières, comme qui dirait les branches secondaires par rapport aux maîtresses branches.

On les appelle *problèmes*. En ouvrant une ancienne géométrie, on vérifiera ces définitions.

Malheureusement notre enseignement a grossi démesurément le nombre des propositions qu'il faut, paraît-il, connaître, par rapport à celles qu'on doit être capable de retrouver et qu'il est au moins inutile de conserver dans sa mémoire. Conséquence logique de notre système d'examens qui exige un psittacisme perfectionné!

8°. — Réciprocité des propositions.

Les mathématiciens (dont je parle) sont tellement occupés de couper des cheveux en quatre, qu'ils en oublient *auprès de leurs élèves* les explications les plus essentielles. Ainsi je n'ai rencontré dans aucun cours le commentaire de cette remarque simple, à savoir que les propositions démontrées par voie analytique entraînent généralement leur réciproque, ce qui n'est pas le cas des propositions démontrées par voie géométrique. Voilà pourtant une excellente occasion de forcer les élèves à réfléchir sur ce que les logiciens appellent l'extension et la compréhension des propositions, ou, si l'on veut, sur la généralité de la conclusion comparée à celle des prémisses! voilà pourtant des « idées générales »!

513. Méthodes générales, démonstrations générales.

Les mathématiciens (dont je parle) ont à la fois la rage *des démonstrations générales et des méthodes particulières.* Pour subtile qu'elle paraisse, cette distinction est pédagogiquement fondamentale.

Vous trouverez des mécaniciens qui usent du tout petit caractère d'imprimerie pour exposer les équations de Lagrange, qui à côté de cela prétendront donner à de futurs ingénieurs des démonstrations générales de certaines propositions parfaitement inutiles.

Ceux qui considèrent les mathématiques comme un outil procèdent exactement à l'inverse. *Sans se soucier de fournir de la méthode générale une démonstration en forme, ils l'utilisent pour résoudre une série de cas particuliers.*

Vous offrez un outil aux mathématiciens (dont je parle) et les priez de s'en servir. « Le manche est-il solide? demandent-ils. — Tapez dessus, vous le verrez bien! — La lame est-elle trempée? — Essayez-la sur du bois dur! — Est-elle solidement fixée au manche? — Mais qu'attendez-vous pour commencer le travail? — J'attends, monsieur, d'avoir analysé les propriétés du bois, de l'acier, d'avoir tout scruté au microscope, enfin d'avoir prouvé par raison raisonnante que j'ai le droit de donner le premier coup de maillet! » Ils meurent de vieillesse avant que se produise cet événement sensationnel!

Qui ne voit, dans nos manières opposées de considérer la Science et ses applications, deux philosophies en présence : l'une est celle de Bacon; l'autre, celle des métaphysiciens depuis qu'ils existent.

A Dieu ne plaise que je reproche aux métaphysiciens d'aimer la métaphysique : de bonne casse est bonne!

Mais le ridicule atteint les limites de l'impossible, quand les métaphysiciens se posent en hommes d'action. Immobiles comme des statues, les bras au corps, ils entonnent le grand final du troisième acte : « Marchons, courons, sans prendre haleine! Pas de cesse, pas de repos! Que l'action soit notre étendard, et le mouvement notre couche! »

Retombons aux méthodes de ce Cours.

Vous entendrez les mathématiciens (dont je parle) pousser des cris de putois parce que, tranquillement, pour exposer la théorie des surfaces, j'utilise des méthodes générales dont je donne des explications plutôt que des démonstrations. Mais la masse des exemples proposés est telle, que si, au bout du volume, l'étudiant ne comprend pas de quoi il s'agit, je pourrai sans excès de prétention incriminer la lenteur de son esprit.

De même pour toutes les parties de ce Cours. Savez-vous le meilleur moyen de comprendre l'utilité et les allures réciproques des développées et des développantes? Ne cherchez pas trop; c'est avec des courbes en bois servant de développées, du fil et un crayon, de construire des développantes et par suite des courbes parallèles. « Pouah! » fait le mathématicien (dont je parle); mais nous haussons les épaules.

514. Des classifications; échelle d'importance; vulgarisation.

1°. — Les classifications ne peuvent être les mêmes pour les mathématiciens de métier et pour nous qui ne voulons considérer dans les mathématiques que l'outil.

Par exemple, je me suis bien gardé d'étudier les paraboloïdes et hyperboloïdes après les ellipsoïdes. Ils viennent tout naturellement comme exemples de surfaces réglées.

Pour nous, les procédés généraux d'obtention des courbes sont une base bien autrement utile de classification que le degré de l'équation représentative. Ainsi j'ai réuni aux §§ 138 et suivants un ensemble de courbes des degrés les plus divers, à cause de leur description mécanique identique ou analogue.

De même les cycloïdes, épi et hypocycloïdes sont étudiées *par nous* simultanément, bien que les unes soient transcendantes, les autres algébriques.

Je ne critique pas les classifications habituelles; elles répondent à d'autres besoins.

Il est naturel de classer les courbes d'après le degré de leurs équations (ponctuelle ou tangentielle) quand on attache aux solutions imaginaires la même importance qu'aux réelles. Mais si les quantités

complexes *comme outil* ont pour nous une utilité considérable, les portions imaginaires des courbes n'en ont aucune. Il nous est pratiquement fort indifférent de savoir, par raison démonstrative *a priori,* en combien de points réels ou imaginaires une droite coupe la courbe (*ordre,* degré de l'équation ponctuelle), ou combien de tangentes on lui peut mener d'un point extérieur (*classe,* degré de l'équation tangentielle), *ne serait-ce que pour l'excellente raison que la plupart des courbes rencontrées en Physique sont transcendantes.*

Même, dans bien des cas, nous n'utilisons qu'une faible partie de la courbe réelle, le reste demeurant dans l'ombre. Je citerai comme exemple classique la cubique de Van der Waals, dont les physiciens ne connaissent généralement que la portion correspondante aux valeurs positives des coordonnées.

2°. — Il est naturel que, futurs physiciens et ingénieurs, nous attachions une importance particulière aux questions que nous devons retrouver plus tard, et que nous les choisissions comme exercices pour illustrer les théories. Éviter à cette occasion de rappeler leur rôle, de les situer dans leur domaine d'application, est un préjugé imbécile sur la séparation des genres.

Au sujet de ma Mécanique, on m'a reproché de transformer mon lecteur en homme de tous les métiers, de vulgariser toutes les sciences, de feindre de tout savoir et de tout enseigner : c'est absurde. Quand j'expose la théorie du frottement, ne pas étudier l'adhérence, les rampes et les freins sous prétexte de ne pas mélanger les genres, c'est avoir une singulière idée de la science et de son rôle. Je vulgariserais si je prétendais donner de ces problèmes une idée nette en quelques phrases ronflantes, *soi-disant lisibles sans aucune préparation antérieure.* Mais je voudrais bien qu'on me cite un ouvrage contenant, sur les questions pratiques que je prends comme exemples, des renseignements plus précis que dans ma Mécanique, aux erreurs près reconnues inévitables dans un ouvrage aussi long.

Le lecteur sait quelle empreinte laissent les professeurs de Spéciales; il sait que *la séparation des genres* est le dogme essentiel de nos tortionnaires. Les supplices sont nettement distincts : d'abord le supplice de l'Algèbre, puis celui de la Géométrie strictement plane, puis... l'élève passe sur les chevalets dans un ordre immuable et consacré par l'expérience : celui qui abrutit le plus sûrement.

Généralisons cette conception anorthopédique : nous en arrivons à proscrire toute incursion dans le domaine amusant des applications et des réalités. Ceux qui violent la consigne sont des *Vulgarisateurs.* La moue des mathématiciens (dont je parle) mesure leur mépris pour une méthode qui choque aussi résolument leurs habitudes invétérées.

Dans les paragraphes précédents, nous avons cherché à carac-

tériser les procédés qu'on nous vantera comme le suprême de l'art. Laissons cela : voyons par quels exercices nous pourrons obtenir des progrès rapides chez nos élèves, futurs physiciens et ingénieurs.

C'est à eux-mêmes que je m'adresse : il est essentiel qu'ils comprennent les raisons de la discipline à laquelle on doit les soumettre. On n'exécute bien et avec plaisir que ce dont on conçoit l'utilité.

515. Nature des exercices et des démonstrations.

1° — Il est entendu que je ne m'occupe ici que des futurs Physiciens et Ingénieurs. A la Faculté, l'enseignement mathématique doit rester double; il serait malheureux de ne pas maintenir partout le Cours de Calcul différentiel et intégral et les Cours de Mathématiques supérieures, avec leur formalisme et leurs recherches actuellement inutilisables.

A la vérité, c'est une question de savoir s'il ne serait pas avantageux pour les futurs mathématiciens eux-mêmes de commencer leur éducation comme les étudiants dont je m'occupe. Spécialement doués par hypothèse pour les recherches abstraites, ils auraient tôt fait de se mettre au courant des mathématiques utilitaires. Mais quelle que soit la solution qu'on donne à la question posée dans les paragraphes précédents, il importe peu pour notre but bien délimité actuel : *il s'agit de déterminer à quelle discipline doivent être soumis ceux qui se destinent aux sciences expérimentales et à l'industrie.*

2°. — Ce serait ne pas sortir de l'ornière que de bouleverser les programmes sans modifier l'esprit dans lequel ils sont enseignés. Par exemple, on s'était imaginé qu'en introduisant les intégrales dans les classes de Spéciales, *ipso facto* l'enseignement serait régénéré. Il a fallu déchanter; on s'est mis à bachoter les intégrales comme auparavant on bachotait les coniques.

Ne démontrons pas à nos élèves ce qui, *à tort ou à raison*, leur semble évident.

Ils prennent l'habitude de considérer comme *mathématiquement* nécessaire un discours que *leur sens commun* déclare entièrement superflu. Ils finissent par voir dans les démonstrations une sorte de liturgie qui ne saurait se dispenser de mots sonores : *donc*, *par conséquent*, *or*, *car*, *en effet*,... Ils ne retiennent souvent que ces mots-là, et leurs *par conséquent* relient des propositions incohérentes.

Ils sont étonnés quand on leur présente les preuves les plus convaincantes dans le style de la conversation; ils vont alors jusqu'à douter s'ils doivent être convaincus, *parce que l'appareil de la conviction manque*. Rarement ils se haussent à cette vérité qu'une proposition de mathématiques est prouvée par les mêmes procédés que l'excellence d'une passe de football, que *raisonner bien consiste à voir juste et non pas à mettre des syllogismes « en forme »*.

Autant il est utile de les intéresser à la Logique formelle *en son temps et par des exercices convenables*, autant, ses méthodes une fois comprises, il est vain de s'embarrasser d'un bagage encombrant. Ce n'est pas *la Logique* qu'il fallait supprimer des programmes : c'est *l'esprit scolastique* qui est la caricature de la Logique. Port-Royal écrivait une admirable logique et s'insurgeait contre l'abus de cette science représenté par les Traités de Théologie morale. Logiquement parlant, nos mathématiciens n'ont rien à envier aux adversaires de Pascal.

3°. — D'aucuns disent que ce qui paraît évident à nos élèves, ne l'est pas autant qu'ils le pensent ; il faut leur apprendre à se défier de cette habitude malsaine : user des mathématiques sans respect, comme un ouvrier d'un outil. Pour moi, je me défie du menuisier qui, ayant des planches à polir, ergote sur les propriétés de son rabot ; je m'élève contre la manie de noyer les gens pour la gloire d'un sauvetage. Je conviens que c'est petitesse d'esprit ; mais j'ai ouï parler d'un pauvre diable qui, à force de se demander comment il respirait, a fini par se détraquer le système nerveux et par mourir asphyxié.

Je connais des mathématiciens pour lesquels les raisons de symétrie ne sont plus convaincantes ; j'en sais qui démontrent, par exemple, *qu'un point attiré par un centre fixe décrit une courbe plane*. Je ne discute pas s'ils ont raison ou tort ; je demande qu'on ne les charge pas des étudiants qui m'occupent.

Je ne traiterai pas *le raffinement dans les preuves* d'occupation de mandarin, simplement parce que je considère *qu'en soi* il est utile et même indispensable. Mais le formalisme est un procédé de classement et non d'acquisition ; en tous cas, il n'est pas à sa place dans l'éducation des futurs Physiciens et Ingénieurs.

Je tenais à rappeler ces principes dans un Chapitre destiné à fixer la discipline à laquelle nous soumettrons nos élèves. En ces matières comme partout, il est essentiel d'éviter les confusions de concepts et les confusions intéressées.

516. Des expériences et des cas particuliers.

1°. — Tous ceux qui ont affaire aux étudiants, savent que ce qui leur manque le plus est la compréhension des énoncés et des notions sur lesquelles ils portent. Au lieu de gâcher le temps de ses élèves sur les formules les moins usuelles de la trigonométrie appliquée à la résolution des triangles, un professeur intelligent leur fera tracer un cercle, un angle au centre, des lignes trigonométriques ; leur fera mesurer au dixième de millimètre toutes les longueurs, calculer les sinus, cosinus, tangentes,... afin de comparer avec les résultats inscrits dans les tables. Une classe entière utilisée à cet exercice sera plus utilement employée qu'à démontrer que les lignes trigonométriques s'expriment rationnellement en fonction de la tangente de la moitié de l'arc, et autres propositions du même intérêt.

2°. — Pour éclaircir le sens des énoncés, le procédé le meilleur est l'étude des cas particuliers. En vérifiant une proposition générale sur des exemples simples, sa démonstration se construit automatiquement dans l'esprit. On finit par découvrir, sans secours étranger, sinon la suite logique des syllogismes nécessaires à son établissement formel, du moins ses raisons profondes d'exister.

Mais il est entendu que les cas particuliers doivent être étudiés, non comme une fin, mais comme des cas particuliers. User des mois sur les hyperboloïdes et les paraboloïdes sous prétexte que ce sont des cas simples de surfaces réglées, démontrer une foule de propositions *qui leur sont particulières,* ce n'est pas du tout se conformer au principe que nous posons. Qu'on ouvre les géométries analytiques pour les étudiants, on y verra démontré au long que *toute tangente à l'ellipse de gorge est la projection de deux systèmes de droites situées sur un hyperboloïde à une nappe.* Je ne vois que des avantages à ce que l'étudiant vérifie cette proposition comme exercice, pourvu qu'on le prévienne qu'il s'agit là d'un cas infiniment particulier d'une proposition générale (§ 401).

On parle toujours de laisser aux étudiants des « idées générales » ; c'est possible par la méthode que j'indique. *Contentons-nous le plus souvent d'énoncer la proposition générale;* mais qu'une série d'exemples en fixe exactement le sens dans l'esprit de nos élèves.

517. Des figures et des modèles.

1°. — Les figures ont une importance considérable. Il faut s'efforcer de leur donner une rigueur *numérique.*

Toutes les courbes de cet ouvrage ont été soigneusement calculées ; malgré l'imperfection *parfois voulue* du dessin, elles conservent une allure correcte. Trop souvent on trace de chic au tableau des courbes qui n'ont aucun rapport avec la réalité : il serait préférable de les dessiner sur du papier noir, de les fixer avec un vernis et d'en constituer une pinacothèque.

Les Allemands, gens pratiques, ont d'admirables collections de modèles de surfaces. Les unes sont en plâtre; les autres sont formées de carcasses métalliques percées de trous par lesquels passent des fils représentant les génératrices rectilignes. C'est une pratique excellente que nous devrions imiter. En outre, il serait bon de faire construire un modèle aux étudiants comme manipulation : ces modèles conservés formeraient vite un musée.

Pourquoi ne pas faciliter la tâche de l'étudiant par ces procédés matériels ? Combien ne se sont jamais représenté ce qu'est l'arête de rebroussement d'une surface réglée, parce qu'on a négligé de leur en montrer une *en vrai ?*

Qu'on exige d'eux des problèmes, des travaux pratiques de tout genre, soit ! mais qu'on ne leur demande pas un effort d'imagination

sans intérêt, qui ne leur apprendra rien et qu'ils peuvent éviter par un coup d'œil jeté sur un modèle.

Bon nombre de théorèmes se passent de démonstration grâce à une expérience. Qui doutera que la ligne géodésique n'ait son plan osculateur normal à la surface, après avoir tendu un fil sur une surface polie ? Nous avons des occupations plus importantes que de démontrer cette proposition ; au surplus, la démonstration est de celles que trouvent à peu près incompréhensibles la plupart des esprits.

2°. — Les modèles sont indispensables pour comprendre la théorie des surfaces. Il faut construire un modèle de paraboloïde hyperbolique et un d'hyperboloïde de révolution. Ainsi l'étudiant apprendra sans effort la théorie de la distribution des plans tangents. On y joindra des modèles d'hélicoïde développable et d'hélicoïde à plan directeur, ainsi qu'un modèle de voûte d'arête en tour ronde.

On fera mouler une surface de forme assez compliquée, représentant vaguement une montagne, sur laquelle on tracera les lignes de niveau, de plus grande pente, ..., afin de fixer les idées sur la représentation topographique des surfaces.

Pour les développements du cône et du cylindre, du papier et des ciseaux seront les outils indispensables.

Nous avons déjà recommandé de tracer toutes les lignes qui se présenteront, dans l'étude de la sphère, sur des ballons de caoutchouc ou de celluloïd.

L'étude des plans tangents du tore se fera avec l'aide d'une couronne de plâtre ou d'un rouleau de fil de fer.

518. Exercices numériques. Tables.

1°. — On ne saurait trop le répéter : *les exercices doivent être numériques*. Les lettres ne sont que pour remplacer les nombres, dans la pratique, ce sont les nombres qu'on rencontre ; pour préciser le sens des théorèmes, il faut calculer sur des nombres.

Actuellement le mépris du calcul est général chez les professeurs et chez les élèves. Les compositions de calcul qu'on introduit dans les examens, ne servent qu'à prouver la nullité absolue des candidats. Comment peut-on s'imaginer qu'après leur avoir dicté des Cours où l'on ne se préoccupe jamais des valeurs numériques des fonctions, on réagira en quelques séances contre une déformation systématiquement acquise ? Présentez les Mathématiques d'une certaine manière tout le long de votre Cours : vos élèves ne répugneront plus aux calculs numériques.

Au baccalauréat, même lorsque l'énoncé contient des nombres, même lorsqu'on prévient de l'importance attachée au résultat numérique, on rencontre la phrase traditionnelle : « Il suffit

maintenant de calculer », comme si ce calcul n'était pas tout le problème.

Quand le résultat est 10,5 par exemple, les candidats s'étonnent qu'on inflige une plus mauvaise note à qui trouve 105 qu'à qui trouve 10. La virgule pour eux n'a pas d'importance; ils méprisent avec encore plus de conviction les signes, généralement laissés au hasard.

C'est une coutume ABSURDE de donner un problème sur des lettres *avec une application numérique. Les problèmes numériques se traitent sur les nombres.* Comment habituer les élèves aux ordres de grandeur, les forcer à réfléchir sur les résultats intermédiaires et leur bien fondé, si on transforme le problème numérique en une pure opération machinale? Je sais que je renverse les idées reçues; d'être reçues ne prouve pas qu'elles aient le sens commun.

2°. — Pour exercer sans ennui les élèves au calcul, il ne faut pas les rebuter par de trop nombreuses opérations *arithmétiques.* Calculer ne consiste pas seulement à multiplier, à diviser, à additionner, à soustraire. Il va de soi que la technique de ces opérations est indispensable; mais dès qu'on la connaît (ce qui est rapide), on n'apprendra rien de plus en recommençant indéfiniment : on ne se mouche pas mieux à cent ans qu'à dix.

Il faut que l'exercice de calcul soit un véritable problème à résoudre, intéressant en lui-même et mettant simultanément à contribution tous les genres de calculs et de vérifications numériques. Rien n'est odieux comme le soi-disant *exercice* de calcul qui consiste à utiliser une table de logarithmes, au commandement, de dix heures à onze heures, un certain nombre de fois pendant l'année. C'est odieux et bête. L'exercice de calcul n'existe pas *en soi :* la séparation conventionnelle à laquelle les examens de l'École Polytechnique nous font assister, est purement et simplement grotesque.

Tout problème, de quelque nature qu'il soit, doit comprendre une vérification numérique *qu'il faut habituer l'élève à juger capitale.* Il finira par regarder *l'opération proprement dite,* non pas comme une fin, mais comme un moyen. Au bout de quelques semaines, ses tables lui deviendront familières. Pour assurer une discussion de courbe, il n'hésitera pas (*ce que nous faisons tous dans nos laboratoires*) à en calculer un certain nombre de points. Que d'erreurs ainsi évitées ! que de raisonnements remis brutalement sur leurs pattes grâce au résultat du calcul ! Le véritable et fructueux exercice commence là où finit notre exercice de calcul traditionnel, que je compare aux gestes d'un maniaque qui, pour s'entraîner aux courses de montagne, fait du footing en rond autour du guéridon de sa chambre.

3°. — Pour réaliser l'exercice intéressant, il faut donc faciliter et

abréger les opérations proprement dites; on doit fournir à l'étudiant *des tables numériques*.

Au premier rang sont *les tables de carrés, cubes, racines carrées, racines cubiques, inverses de* 1 *à* 10 000. Je ne connais que les excellentes tables de Barlow (Spon, Londres).

Au second rang, *les tables des lignes trigonométriques naturelles* de minute en minute; on en trouve chez Baudouin, Paris. Comme les Physiciens n'ont pas encore admis et n'admettront pas de longtemps la division centésimale du quadrant, les calculs se feront ordinairement dans le système sexagésimal.

En troisième lieu, *les tables de logarithmes*. Celles à cinq décimales suffisent; mais elles doivent contenir *les tables de réduction des degrés en arcs, les logarithmes naturels de* 1 *à* 1 000, *les multiples du module et de l'inverse du module*.

Il devrait exister des tables des fonctions usuelles dont les excellentes *Smithsonian Tables* donnent un exemple. En seize pages elles fournissent sur plusieurs fonctions des renseignements numériques précieux. Je donne dans cet ouvrage des tables abrégées, suffisantes au moins pour fixer les idées. Mais de bonnes tables étendues seraient fort utiles. Il existe des tables françaises parfaitement illisibles et construites dans l'esprit le plus opposé à celui que je défends. On y trouve, par exemple, une table *abrégée* pour le calcul des logarithmes vulgaires à 15 et 20 décimales ! La Société de Physique devrait s'occuper d'une telle publication; mais je doute qu'elle en comprenne le sens et l'utilité.

4°. — Les calculs doivent être poussés jusqu'à un certain point toujours le même. Il est difficile d'obtenir des étudiants une approximation déterminée; ils mettront aussi bien vingt chiffres significatifs que deux. Tel élève qui pose sans hésiter $6 : 5 = 1$, commettant délibérément une erreur de $1 : 5$, écrira à la ligne suivante un quotient avec quinze chiffres significatifs. Il ne s'agit pas de discuter à chaque instant l'erreur exacte que l'on commet; il s'agit de se fixer au début une approximation relative ($1 : 1000$ par exemple), et de faire en sorte qu'elle se maintienne. Que, pour être sûr du résultat au millième près, on pousse un peu trop loin l'approximation dans les calculs intermédiaires (surtout s'ils sont nombreux), c'est une précaution à quoi je ne vois rien à blâmer. Elle vaut beaucoup mieux que de discutailler sur le point exact auquel il faut s'arrêter; dans une question pratique, c'est l'économie de temps qu'il faut chercher; on l'obtient plus sûrement par un excès de précision que par des discussions oiseuses.

On exigera donc quatre chiffres significatifs, *rarement plus*, simplement parce que les expériences *précises* sont au millième; en conservant quatre chiffres, on est sûr d'être au delà de la précision requise.

Le 0 a une importance que les étudiants admettent difficilement. Il ne revient pas au même d'écrire 25,00, ou d'écrire 25. Tous les Physiciens et Ingénieurs comprennent que, dans le premier cas, on affirme une approximation de 1 : 2500; dans le second, une approximation de 1 : 25.

Une autre erreur consiste à donner de l'importance, non pas au nombre des chiffres significatifs, mais au nombre des chiffres qui suivent la virgule. Il est pourtant manifeste que l'erreur *relative*, la seule qui nous intéresse, ne dépend pas de la place de la virgule.

519. Calcul au trait.

1°. — Le *calcul au trait* est l'ensemble des procédés qui permettent de résoudre des équations au moyen d'intersections de courbes.

Un exemple simple est fourni par l'équation du troisième degré (§ 226 et 371) : $x^3+px+q=0.$ (1)

Écrivons : $x^4+px^2+qx=0.$ Posons : $y=x^2.$ (2)

Les racines de l'équation (1) sont données par l'intersection de la parabole (2) [qu'on peut construire une fois pour toutes] avec le cercle :

$$x^2+y^2+(p-1)y+qx=0.$$

Ce cercle passe par l'origine; les coordonnées du centre sont :

$$\xi=-q:2, \qquad \eta=(1-p):2;$$

il est donc complètement déterminé.

Il coupe la parabole en quatre points ou en deux.

Il passe par l'origine qui appartient à la parabole; mais la racine $x=0$ a été introduite au cours du calcul.

Nous conseillons au lecteur de discuter cet exemple simple dans son détail (réalité des trois racines, signes, ...).

La même parabole permet de résoudre à vue l'équation du second degré. Soit : $x^2+px+q=0.$ (3)

Les racines de (3) sont données par l'intersection de la parabole et de la droite :

$$y=x^2, \qquad y+px+q=0.$$

La droite coupe les axes aux points :

$$\xi=-q:p, \qquad \eta=-q.$$

On trouvera aisément une série d'exemples analogues portant en eux-mêmes leur vérification.

2°. — Il est extrêmement utile d'obliger les étudiants à représenter par des courbes les problèmes les plus simples, par exemple d'arithmétique. Si étrange que cela paraisse, nous éprouvons la plus grande difficulté à faire comprendre à nos étudiants *de licence* l'emploi de la représentation graphique pour la loi d'Ohm (*qui est linéaire*), tant est insuffisante l'éducation reçue.

Au lycée, on se préoccupe du bachot; loin de comprendre ce qu'on fait, on cherche à tout réduire à une routine qui supplée à l'intelligence. Par exemple, on conseille aux élèves, *pour ne pas se tromper,* de toujours réduire les données en CGS, les hectares en centimètres carrés, les tonnes-poids en dynes, ... De pareilles méthodes sont admissibles pour un enseignement dont le but unique est de seriner des perroquets; un enseignement utilitaire ne peut admettre de telles fantaisies : *à l'inverse des enseignements philosophiques, il est nécessaire qu'il soit intelligent.*

Voici deux exemples pour fixer les idées.

3°. — Prenons d'abord le problème classique : *Un fils a* 5 *ans, son père en a* 25; *quand l'âge du père sera-t-il triple, double, ... de celui du fils?*

Portons en abscisses les temps mesurés en années, en ordonnées

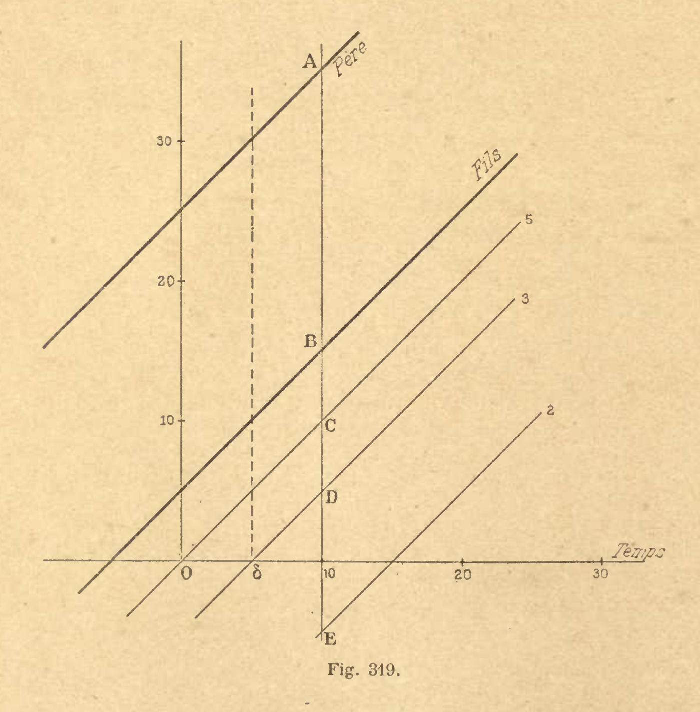


Fig. 319.

les âges également mesurés en années. Les âges du père et du fils sont représentés par des droites parallèles à la bissectrice de l'angle des axes, puisque leur âge augmente d'une année par année écoulée. Menons une ordonnée quelconque ABCD... Déterminons le point D par la condition :

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=3, \qquad \frac{\overline{DA}-\overline{DB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{DB}}=2.$$

Par le point D menons une parallèle Dδ à la bissectrice des axes. Le point δ donne le temps (5 ans) qui doit s'écouler jusqu'à ce que l'âge du fils soit le tiers de celui du père.

Cette solution graphique, d'une précision limitée, ne supplée pas au calcul; mais elle éclaire remarquablement les conditions du problème. Elle montre qu'à mesure que le temps s'écoule, le rapport des âges tend vers l'unité; elle éclaire la loi de variation et le sens des solutions négatives (dans combien de temps l'âge du père sera-t-il décuple de celui du fils?), elle remplace une solution numérique unique par l'étude d'une fonction,...

4°. — Autre exemple : *Quel nombre faut-il ajouter à chacun des termes de la fraction* 1 : 5 *pour en obtenir une égale à* 9 : 13?

La solution est immédiate :

$$\frac{1+x}{5+x}=\frac{9}{13}, \qquad x=8.$$

Mais ce problème ultra élémentaire devient intéressant si l'on pose : $$y=(1+x):(5+x),$$
et si l'on étudie la manière dont y varie quand x varie. Sous une autre forme, c'est le problème traité au *3°*. On obtient une hyperbole, asymptote à des parallèles aux axes, sur laquelle on fait aisément la discussion.

5°. — Il faut trouver une solution numérique exacte; mais cela n'empêche pas l'intelligence des opérations qu'on exécute. Disons mieux : *on est bien plus sûr de l'exactitude de la solution quand on l'obtient intelligemment.* C'est à quoi la représentation graphique aide remarquablement. Malheureusement la discussion intelligemment conduite du moindre problème est très longue; si on s'en préoccupait au Lycée ou à la Faculté, on ne trouverait plus le temps de dicter les cours : évidemment ce serait un désastre!

520. Abaques, tableaux graphiques, papier quadrillé logarithmique.

Aux §§ 368 et sq. je parle des abaques construits au moyen de *points alignés.* On peut en construire d'espèces très différentes et donnant lieu à d'intéressants exercices.

1°. — Les tables *à double entrée,* c'est-à-dire où le nombre qu'elles font connaître dépend de deux variables, se divisent en colonnes longitudinales et en colonnes transversales qui répondent respectivement aux grandeurs des deux variables ou, comme on dit, des deux *arguments.* La Table de Pythagore est le type du genre.

Une remarque est ici nécessaire. Il ne faut pas prendre toute table contenant des lignes et des colonnes comme représentative d'une fonction de deux variables. Les tables de logarithmes donnent la fonction d'une variable : $y=\log x$; malgré leur disposition typo-

graphique, ce sont des tables à *simple entrée*. De toutes les tables numériques contenues dans le présent ouvrage, seules les tables des §§ 188 et 189, donnant les intégrales elliptiques, sont *à double entrée*.

De même qu'une table à simple entrée est représentée par une courbe $y = f(x)$, une table à double entrée est représentée par une surface $z = f(x, y)$.

On a pour la Table de Pythagore : $z = xy$; c'est un paraboloïde.

La représentation plane de la surface se fait au moyen de ses courbes de niveau. Par exemple, pour le paraboloïde de la table de Pythagore, ce sont des hyperboles équilatères. On en trace un

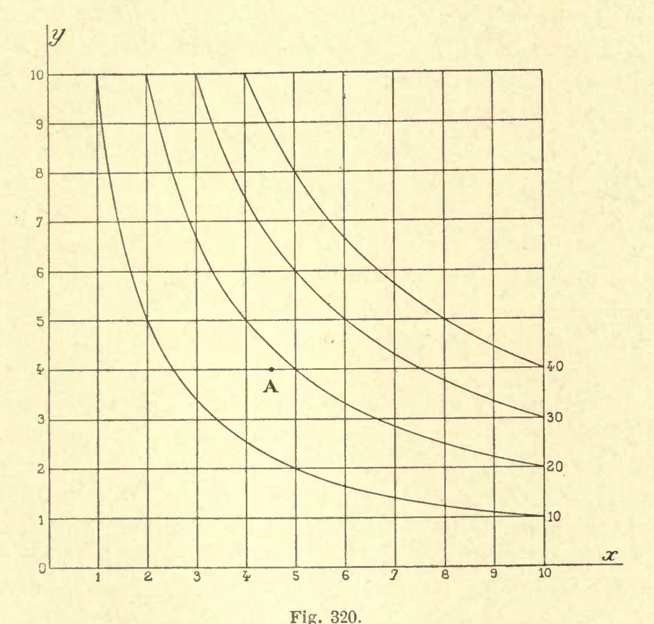


Fig. 320.

nombre suffisant et on écrit à côté d'elles leur cote. La figure 320 donne les lignes de niveau 10, 20, 30, 40. Chacun de leurs points correspond à une abscisse et à une ordonnée telles que leur produit soit constant et égal à la cote.

La difficulté d'emploi de tels abaques est dans l'*interpolation à vue*. Par exemple, le point A de coordonnées 4,5 et 4 se trouve quelque part entre les courbes de niveau 10 et 20. Avec les courbes de niveau aussi espacées que je les ai faites, on ne peut obtenir à vue une grande approximation : nous disons que le produit est *au voisinage* de 18. Dans l'espèce, le calcul direct est beaucoup plus rapide que l'emploi de l'abaque : nous savons qu'il donne 18.

2°. — Anamorphose géométrique.

On facilite singulièrement la construction des abaques par un changement de variables.

Posons par exemple : $x' = \log x$, $y' = \log y$.

La surface $z = xy$ devient :

$$\log z = x' + y'.$$

C'est un cylindre dont les lignes de niveau sont des droites horizontales, parallèles entre elles et perpendiculaires à la bissectrice des axes. Nous avons maintenant pour coordonnées $\log x$ et $\log y$; mais rien ne nous empêche d'écrire sur les axes les nombres x et y eux-mêmes et de donner comme cotes aux lignes de niveau non $\log z$, mais z. La complication du problème est reportée sur la graduation des axes ; une fois construites ces graduations, le travail ultérieur devient très simple, puisqu'il se réduit à tracer des droites.

On trouvera dans la construction des abaques un nombre considérable d'exemples intéressants qui apprendront à l'étudiant tout le parti qu'on peut tirer d'un changement de variables (*anamorphose*).

3°. — Papier quadrillé logarithmique.

On facilitera la construction de bon nombre d'abaques au moyen du papier quadrillé logarithmique (Morin, Paris, les 100 feuilles 26 francs). Les échelles de chaque côté sont logarithmiques au lieu d'être uniformes.

521. Procédés pour représenter une relation entre des droites, situées dans un plan et fonctions d'un paramètre, qui se correspondent une à une.

1°. — Les droites conjuguées sont l'une et l'autre données en position.

Elles sont alors représentées par les équations :

$$y = a(t).x + b(t),$$
$$Y = \alpha(t).X + \beta(t). \quad (1)$$

A chaque valeur du paramètre variable t correspondent une droite de l'un des systèmes et une droite de l'autre.

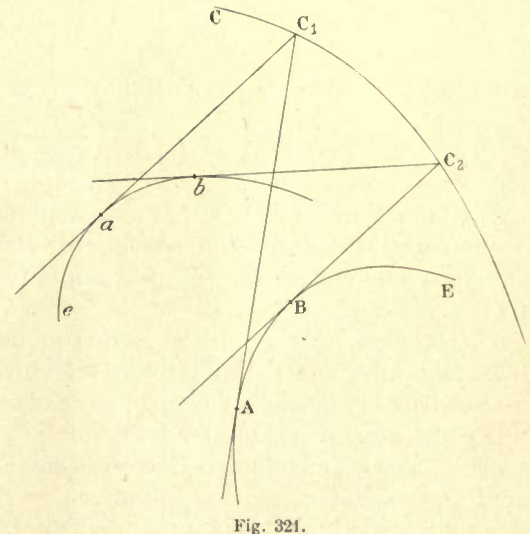


Fig. 321.

Elles enveloppent généralement deux courbes e et E que l'on obtient (§ 129) en éliminant la variable t respectivement entre les équations :

$$y = a(t).x + b(t), \qquad a'(t).x + b'(t) = 0; \qquad (2)$$

et :

$$Y = \alpha(t).X + \beta(t), \qquad \alpha'(t).X + \beta'(t) = 0. \qquad (3)$$

Chaque droite y coupe sa conjuguée Y sur une courbe C :

$$y = f(x), \qquad (4)$$

qu'on obtient en éliminant t entre les équations (1).

De ce qui précède résulte la construction suivante. Soient données les enveloppes e et E. Par le point a de e, menons la tangente aC_1; puis de C_1 menons à E la tangente C_1A. Les droites conjuguées sont aC_1 et AC_1 (fig. 321).

2°. — Une des droites est donnée en position ; l'autre n'est donnée qu'en direction.

C'est généralement ainsi que le problème se pose. Les équations (1) représentent encore les droites conjuguées; mais la fonction $\beta(t)$ est arbitraire, puisqu'on peut mener chaque droite Y par un point quelconque. Nous profiterons de cette circonstance pour choisir la courbe E ou la courbe C.

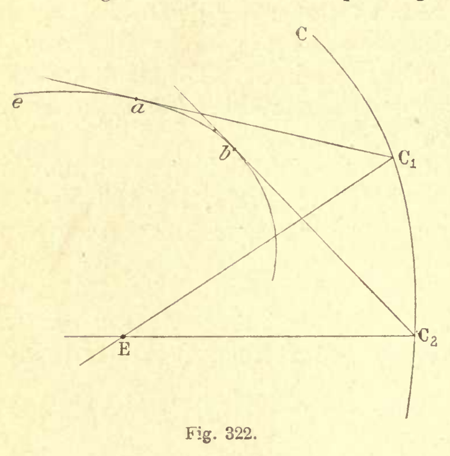


Fig. 322.

Dans la première hypothèse, nous prendrons $\beta(t)$ telle que le résultat de l'élimination de t entre les équations (3) soit l'enveloppe E choisie.

Par exemple, posons identiquement $\beta(t) = 0$; la droite Y est assujettie à passer par l'origine des coordonnées : elle enveloppe un point.

Posons : $\beta(t) = Y_0 - \alpha(t) . X_0$, la droite est assujettie à passer par le point de coordonnées X_0, Y_0.

L'élimination de t entre les équations (1) donne la courbe d'intersection $y = f(x)$, qui permet d'achever la construction. La figure 322 suppose que la droite Y est assujettie à passer par le point fixe E.

Dans la seconde hypothèse, nous prendrons la fonction $\beta(t)$ telle que le résultat de l'élimination de t entre les équations (1) donne une courbe C choisie à l'avance, par exemple une droite, un cercle,... une courbe de forme simple. L'élimination de t entre les équations (3) fournit alors l'enveloppe E correspondante. C'est ainsi qu'on a coutume d'opérer pour représenter les résistances à la translation dans un fluide (voir Mécanique physique).

Comme cas particulier de la première hypothèse, on peut citer la relation qui existe entre le rayon vecteur à une courbe donnée en coordonnées polaires, et la tangente à cette courbe. L'enveloppe E des rayons vecteurs est l'origine des coordonnées, l'enveloppe e est

la courbe elle-même; enfin la courbe C se confond avec l'enveloppe *e*.

On trouvera un grand nombre d'exercices intéressants en prenant pour point de départ les considérations précédentes.

522. Problème nécessitant l'emploi de tables numériques.

Il y a quelques années, le problème proposé aux candidats à l'Agrégation de physique conduisait à une équation transcendante; une table jointe au texte permettait la solution. L'ahurissement fut général; personne ne vint à bout de cette difficulté prodigieuse.

Un pareil état d'esprit est lamentable; il faut persuader aux étudiants qu'il existe autre chose que des sinus, des cosinus, des logarithmes, que cette peur des fonctions *non usuelles* est saugrenue. Je ne pense pas sans pitié au temps gâché uniquement pour éviter les Intégrales de Fresnel ; on déverse sur la tête des étudiants un tas de petits raisonnements aussi mauvais les uns que les autres, qu'ils assimilent plutôt mal que bien. Ils auraient dix fois moins de mal à utiliser les tables numériques. Leur « culture générale » y gagnerait; car l'apprentissage serait fait pour l'emploi d'autres fonctions.

C'est un délice d'entendre un étudiant parler d'une *intégrale elliptique;* on croirait que ce mot recouvre un mystère impénétrable sauf pour quelques Œdipes! Qu'on lui donne des exercices utilisant les tables de ces fonctions (§§ 188 et 189) : il se familiarisera rapidement avec elles. De même, pourquoi tous ces développements en série à propos des fonctions hyperboliques? La manière la plus simple, la plus intelligente d'étudier une *chaînette* et de résoudre les problèmes usuels où elle intervient, est encore de se servir de la table des cosinus hyperboliques; qui en doute?

L'utilisation des tables que renferme ce Cours, étend considérablement le champ où l'on peut choisir les exercices.

523. Règles et cercles à calcul.

On préconise l'emploi *des règles ou des cercles à calculs.* Ils sont évidemment commodes sur le terrain pour une approximation *inférieure au millième :* on doit familiariser l'étudiant avec leur emploi. Mais je me refuse à les recommander dans le calcul des courbes et pour les exercices numériques; leur précision est insuffisante (inférieure au millième), leur lecture pénible à la longue (sauf peut-être dans certains modèles perfectionnés et coûteux). Ce qui est plus grave, on n'est jamais sûr de l'approximation, puisqu'elle dépend de la réussite d'une véritable expérience; or il est mauvais de présenter aux élèves une multiplication comme une opération aléatoire.

Au surplus, ne remplaçons pas un idéal de mandarin par un idéal de contremaître. Que chacun se serve des outils qui lui plaisent le mieux, pourvu qu'il parvienne au résultat; je préfère les deux pages

d'une table de logarithmes de 1 à 1000 à la règle à calcul; j'admets volontiers la préférence inverse. Ce que je n'admets pas, c'est qu'on prétende obtenir d'un instrument ce qu'il ne peut raisonnablement pas donner; scier avec un rabot, c'est saboter l'ouvrage et l'outil. Pour fixer les idées par un exemple, calculer des exponentielles et des logarithmes népériens avec une règle à calcul me semble une mauvaise plaisanterie, ou l'erreur d'un théoricien qui, pressé d'obéir à l'opinion publique, verse brusquement dans la technique; il est gêné par sa routine, qu'il a négligé de laisser au vestiaire. L'épreuve *spéciale* de règle à calcul pour l'examen de l'École Polytechnique est d'une drôlerie souveraine; pourquoi pas une séance de multiplication et d'extraction de racines? pourquoi pas une séance pour vérifier si les candidats savent tremper leur plume dans l'encre ou tailler un crayon?

524. Machines à calcul.

Je décrirai sommairement *l'arithmomètre de Thomas; sommairement* signifie non pas la boîte et la manivelle, selon le sens habituel à ceux qui décrivent les appareils, mais les organes essentiels. Puisque l'occasion s'en présente, j'en profite pour rappeler une vérité élémentaire; donner la photographie d'un appareil est un procédé commode pour la paresse, mais stupide. Dans une description schématique, il importe fort peu que les organes soient *fidèlement* représentés, c'est-à-dire avec leur forme industrielle; il importe beaucoup que le schéma rende clair le fonctionnement.

C'est toujours la même opposition de l'expérience et de la technique.

1°. — Les pièces essentielles sont représentées dans la figure 323.

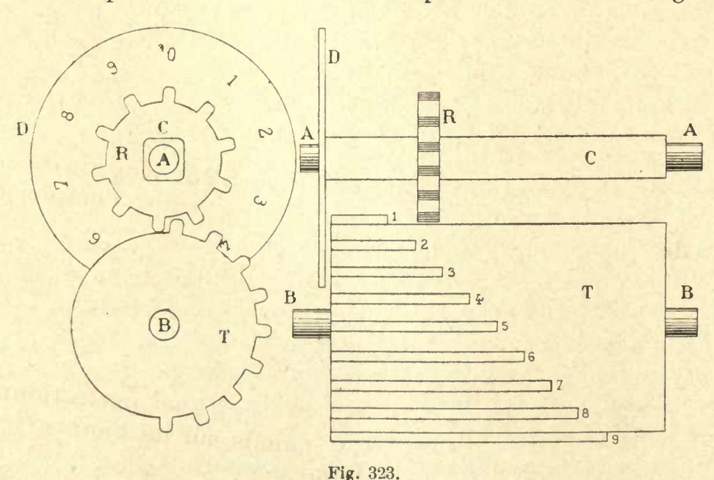


Fig. 323.

Un arbre AA est maintenu carré sur presque toute sa longueur. Une roue d'engrenage se déplace sur le carré : elle porte 10 dents. Sur un disque D solidaire de l'arbre sont tracés les chiffres 0, 1, 2,... 9.

Un tambour T porte neuf dents d'inégales longueurs et qui n'intéressent que la moitié de son pourtour (comme le montre la figure, puisque toutes les dents sont visibles).

Elles engrènent avec la roue R. Donc, pour un tour du tambour T, le disque D tournera de 0, 1, ..., 9 dixièmes, suivant que la roue R sera placée tout à fait à droite (elle n'engrène pas), ou plus ou moins près de la gauche; à gauche toutes les dents engrènent.

Pour un peu plus de la moitié du tour, les deux axes ne sont pas solidaires.

2°. — Imaginons 12 appareils semblables montés les uns à côté des autres et numérotés de 1 à 12 de la droite vers la gauche; leurs arbres sont parallèles.

Supposons tous les tambours liés à une même manivelle, de sorte qu'un tour de manivelle les fasse simultanément tourner d'un tour. Enfin disposons au-dessus des disques une plaque percée de lucarnes L, de manière qu'un seul chiffre soit apparent.

A travers ces lucarnes nous lisons donc un nombre de 12 chiffres, dont par exemple les 4 derniers sont 5 329.

Soit à ajouter le nombre 4 387.

Nous disposons la roue R_1 sur son arbre, de manière qu'elle engrène avec 7 dents du tambour T_1; la roue R_2, de manière qu'elle engrène avec 8 dents du tambour T_2,... Nous donnons un tour de manivelle. Si l'appareil se réduisait aux pièces décrites, nous verrions apparaître aux lucarnes le nombre : 5 606, au lieu du nombre 5 716 qui est la somme exacte.

En effet, nous n'avons pas effectué les retenues.

Si la manivelle tourne lentement, nous apercevons d'abord le nombre 5 606, aussitôt après le nombre 5 616, enfin un peu après le nombre exact 5 716. Expliquons comment la chose est possible.

3°. — Le principe est le suivant : *lorsque le neuf d'un disque quitte la lucarne et est remplacé par le zéro, il se prépare une retenue qui sera effectuée ultérieurement.*

L'arbre B_n porte une grande dent Δ_n, fixée dessus en azimut relatif, mais non en position : elle peut se déplacer *parallèlement* à l'arbre qui la porte, et non tourner *autour*. La dent Δ_n engrène ou n'engrène pas avec une roue ρ_{n+1} (dentée de 10 dents et solidaire de l'arbre A_{n+1}) suivant qu'elle occupe une position P' ou une position P sur son arbre. Imaginons que le passage du 9 au 0 pour le disque D_n mette la dent de l'arbre B_n dans la position P' pour laquelle elle engrène avec la roue ρ_{n+1}; elle la fera *ultérieurement* tourner d'un dixième de tour. Admettons enfin qu'elle soit automatiquement ramenée à la position P, lorsque le tour de manivelle s'achève.

Insistons : le passage du 9 au 0 met la dent Δ_n dans la position *qui lui permettra d'engrener, lorsque l'azimut de l'arbre* B_n *sera*

convenable; la retenue est donc préparée ; elle sera accomplie après le demi-tour, mais avant l'achèvement du tour.

4°. — Il est évident que les retenues doivent être effectuées lorsque les roues R_n sont devenues indépendantes des tambours T_n ; ensuite qu'elles doivent l'être en commençant par la droite, car une retenue provenant, par exemple, des unités et reportée au chiffre des dizaines qui est 9, entraîne un report sur le disque des centaines.

Pour réaliser la première condition, les tambours T sont lisses sur au moins la moitié de leur pourtour. Pour réaliser la seconde, les dents Δ sont calées sur leur arbre dans des azimuts tels que (supposées toutes dans les positions P′ le long de cet arbre) elles engrènent les unes après les autres en commençant par Δ_1.

5°. — Reprenons notre exemple. Les sommes $7+9$, $2+8$ égalant ou dépassant 10, les dents Δ_1 et Δ_2 sont placées dans leurs positions P′, après un demi-tour de manivelle ; les retenues ne sont que préparées ; on lit 5 606. Continuons à tourner : Δ_1 engrène avec ρ_2 qui avance d'un dixième ; on lit 5 616. Puis Δ_2 engrène avec ρ_3 qui avance d'un dixième ; on lit enfin 5 716.

Supposons que les chiffres sous les lucarnes ne soient que des 9. Ajoutons 1 : plaçons donc R_1 de manière qu'elle tourne d'un dixième, les autres roues R n'engrénant pas. Dans le demi-tour de manivelle, le 9 de la lucarne L_1 est remplacé par un 0 ; donc la dent Δ_1 est mise dans la position P′. Aussitôt le demi-tour achevé, les roues R étant devenues toutes libres, Δ_1 engrène avec ρ_2 ; le disque D_2 passe du 9 au 0. Donc Δ_2 est placée dans sa position P′ ; elle engrène avec ρ_3,... et ainsi de suite. Il y a, comme on dit, *feu de file*.

6°. — Multiplication. Soit à multiplier 563 par 5. Toutes les lucarnes montrant 0, nous plaçons les roues R_1, R_2, R_3 de manière qu'elles engrènent respectivement avec 3, 6 et 5 dents des tambours T_1, T_2, T_3. Nous donnons un tour de manivelle : 563 apparaît aux lucarnes. Un second tour ajoute 563 et donne $563 \times 2 = 1\,126$; le produit par 5 s'obtient donc par cinq tours de manivelle.

Soit à multiplier par 57. Imaginons que nous puissions déplacer vers la gauche tous les disques et le mécanisme qui en est solidaire. Au lieu de lire $563 \times 5 = 2\,815$, nous lisons 28 150. Sept tours de manivelle ajouteront $563 \times 7 = 3\,231$. Et ainsi de suite.

Nous ne pouvons insister.

Nous laissons aux lecteurs le soin de chercher comment on opère pour la soustraction et par suite pour la division ; il partira de ce principe qu'on renverse le sens des mouvements des disques.

525. — Équations des courbes. Papiers quadrillés.

On peut proposer aux étudiants deux espèces d'exercices.

1°. — On leur donne une équation : il s'agit de déterminer la courbe correspondante.

Pour tirer de cet exercice les avantages qu'il comporte, il faut proposer non pas une courbe, mais un faisceau de courbes ; c'est dire que l'équation ne doit contenir que des coefficients numériques, *à l'exception d'un paramètre* dont la variation amènera les modifications de la forme. Du reste, c'est ainsi que les courbes se présentent ordinairement dans les applications (courbes de niveau, projection des lignes de plus grande pente, de courbure,...). On habitue ainsi l'étudiant aux déformations continues ; les courbes obtenues pour diverses valeurs du paramètre se contrôlent les unes les autres ; les erreurs grossières sont automatiquement évitées.

Il n'est pas nécessaire que l'étudiant construise un très grand nombre de faisceaux ; il est infiniment plus utile de l'obliger à rester sur quelques exercices complets et bien choisis le temps nécessaire ; trois ou quatre jours de travail peuvent être considérés comme un minimum.

La construction d'un tel faisceau montrera à l'étudiant le parti qu'on peut tirer d'une table des carrés, cubes,...

2°. — Les courbes une fois calculées et tracées à mesure, sans grande précision, et uniquement pour ordonner et faciliter les discussions, il ne faut pas s'en tenir là. On doit exiger un dessin correct et *propre* de l'ensemble du faisceau. Ceux qui ont l'habitude des copies du baccalauréat savent que la propreté n'est pas une qualité dominante des élèves de nos lycées : on imagine difficilement les gribouillages ignobles que les candidats osent remettre ; de telles copies ne seraient pas tolérées dans une école primaire supérieure, encore moins dans un bureau d'études industrielles.

Que les dessins soient *à main levée* ou exécutés avec le secours des *pistolets*, on utilisera du papier quadrillé, car il est bien inutile de compliquer artificiellement les constructions. On emploiera soit le papier blanc de commerce quadrillé au demi-centimètre, soit le papier quadrillé au millimètre. Ce dernier coûte environ 4 francs le rouleau (40^{cm} ou 70^{cm} de largeur sur 10 mètres de longueur, bistre ou bleu). Il existe même pour le prix double du papier quadrillé calque. Pour les courbes à construire une fois pour toutes et à conserver, on emploiera le papier quadrillé collé sur toile, dont le prix (16 fr. le rouleau de $0^m,75 \times 10^m$, Morin, Paris) mettra chaque courbe à moins de deux francs.

2°. — Il est intéressant de tracer (mécaniquement ou autrement) une courbe dont on connaît la forme d'équation, de faire des mesures sur le dessin obtenu, d'utiliser les nombres, quelques-uns pour calculer les coefficients numériques de l'équation, les autres pour vérifier leur exactitude.

On construira *mécaniquement* des ellipses ou des hyperboles en utilisant les propriétés des foyers, ou à l'aide d'*ellipsographes* (voir catalogue de Morin). On mesurera les abscisses et les ordonnées,

soit avec un décimètre (au dixième de millimètre), soit directement sur le papier quadrillé. On vérifiera ainsi les équations.

Toute courbe de définition géométrique simple peut servir à cet exercice (par exemple, le limaçon de Pascal). Les cycloïdes, épicycloïdes,... se présentent aussi naturellement. Elles ont même l'avantage d'exiger des calculs de lignes trigonométriques. Pour celles-ci on se servira des tables de sinus,... *naturels*.

526. Racines des équations, points remarquables des courbes.

1°. — Comme cas particuliers de la construction des courbes, on cherchera les racines des équations algébriques ou transcendantes, avec application des méthodes d'interpolation soit linéaire (§ 38, *2°*), soit de Newton (§ 38, *3°*).

On résoudra les équations transcendantes par des intersections de courbes. Le professeur trouvera aisément des exemples dans lesquels le choix est arbitraire (j'entends *pratiquement* arbitraire, *théoriquement* il l'est toujours); ce qui donne lieu à d'intéressantes vérifications, toutes les courbes devant passer par le même point.

2°. — Comme autre cas particulier, on étudiera *numériquement* les courbes au voisinage de leurs points singuliers. C'est la meilleure méthode pour que l'étudiant comprenne de quoi il s'agit. On sera souvent amené à pousser les calculs plus loin que le quatrième chiffre significatif, pour obtenir un résultat sûr. C'est à ces cas que je pensais au § 518, *4°*, quand je donnais quatre chiffres comme limite *inférieure rarement dépassée*.

527. Intégration.

Pour les professeurs de mathématiques, *intégrer* c'est chercher une fonction primitive ; pour nous, *intégrer* c'est calculer une aire : ce n'est pas tout à fait la même chose.

Il importe donc peu qu'une fonction soit intégrable ou non ; il s'agira toujours de construire une courbe et de déterminer son aire.

On utilisera les formules de Poncelet ou de Simpson (§§ 165 et 166).

Le calcul effectué, on a trois espèces de contrôle.

1°. — *D'abord le contrôle par pesée.* On construit la courbe sur du papier fort, on la découpe, on pèse la surface obtenue. On pèse un carré dont on connaît le côté ; le rapport des poids donne l'aire. Comme exercices élémentaires, on déterminera π par cette méthode ; on démontrera que pour des figures semblables les aires sont proportionnelles aux carrés de dimensions homologues ; on déterminera les aires d'ellipses construites mécaniquement d'après leurs foyers. Il est évidemment nécessaire de posséder une balance : un trébuchet de pharmacien suffira pour un laboratoire d'enseignement ; ce n'est pas une dépense à considérer (100 francs au maximum).

2°. — *Le second contrôle est fourni par le planimètre.*

Le planimètre d'Amsler coûte 50 francs ; un laboratoire d'enseignement peut donc en posséder plusieurs. C'est un instrument fondamental avec lequel il faut familiariser les étudiants.

3°. — Si la fonction qu'on donne à intégrer est effectivement intégrable au moyen des symboles usuels de l'analyse, on trouvera un intéressant contrôle dans le calcul direct de l'aire.

C'est un cas exceptionnel ; si donc on utilise cette heureuse circonstance comme contrôle, on se gardera de laisser croire aux étudiants qu'il en est généralement ainsi.

Au surplus, on ne doit pas exiger d'eux de posséder en tête des collections de fonctions primitives. *Il y a des tables pour cela, tables qui ne s'envoleront pas et qu'il est fort inutile d'imprimer sur les cervelles.* On doit exiger qu'ils sachent différentier une fonction, si compliquée qu'elle soit, parce que la mémoire n'a aucun rôle dans l'opération. Mais l'intégration est purement et simplement une affaire de mémoire dont on doit les dispenser. Même pour la différentiation des fonctions simples, il est inutile qu'ils sachent les résultats *s'ils sont capables de les retrouver.* Les Physiciens et Ingénieurs ont d'autres ambitions que d'être des aide-mémoire ambulants.

4°. — Étude d'un triangle.

Un triangle scalène étant tracé, on mènera ses hauteurs, ses médianes. On déterminera les longueurs de toutes ces lignes, on mesurera les angles (au rapporteur). On vérifiera ensuite toutes les formules usuelles. Il va de soi qu'on n'exigera pas de l'étudiant la connaissance de toutes les transformations trigonométriques qu'il trouvera au besoin dans les traités de Topographie.

L'aire sera calculée à partir des hauteurs et des bases, à partir des côtés, de toutes les manières possibles ; les contrôles auront lieu par les méthodes indiquées.

5°. — Emploi du curvimètre.

Le curvimètre jouera dans les exercices un rôle analogue à celui du planimètre. Il donnera de très utiles vérifications.

528. Salle de mathématiques ; chef de travaux.

1°. — Il existe à l'École normale des préparateurs de Mathématiques dont la fonction a toujours été l'objet de lazzi. *Préparer les Mathématiques,* quelle singulière occupation ! Le ministre ayant réclamé de nos étudiants *des frais* de travaux pratiques pour les Mathématiques elles-mêmes, on a vu les mathématiciens lever les bras au ciel et se demander ce que cette exigence signifiait. Leurs gestes, d'une ironie désespérée, prouvaient seulement qu'ils retardaient.

Il faut que cela change. Les Mathématiques fournissent matière à des travaux pratiques de plus d'un genre, je crois l'avoir démontré.

Il devrait exister dans toutes les Facultés une salle suffisamment spacieuse et contenant, outre une dizaine de tables à dessiner per-

fectionnées (à 200 francs l'une, ces frais de premier établissement ne ruineraient pas l'État), des tables commodes avec bibliothèques particulières. La mesquinerie de nos installations pour le travail de nos élèves est une honte, comme trop de choses en France à l'heure actuelle.

Naturellement nos élèves se fourniraient des outils usuels, tels que les compas. Mais on doit mettre à leur disposition le matériel qu'ils emploieront moins fréquemment : *jeux complets d'équerres, de pistolets, de courbes régulières* (*gabarits et lattes*); *rapporteurs de précision, à alidades, d'angles; compas à verge et à vis de rappel, compas de réduction, ellipsographes, pantographes, curvimètres; etc.* (*voir catalogue de Morin*).

Des armoires renfermeraient les modèles de surface dont ils pourraient se servir à leur gré ; aux murs, les graphiques des fonctions importantes.

On tiendrait à honneur d'avoir les machines indispensables : deux ou trois modèles (les plus différents possibles) de machines à calculer (dont un modèle de caisse imprimeur), des planimètres simples, des planimètres pour moments statiques et d'inertie; si possible, un intégraphe genre Boys et un modèle d'analyseur harmonique.

Enfin on donnerait aux étudiants les moyens de reproduire leurs dessins sur papiers au ferroprussiate ou de toute autre composition. Le matériel consiste en un châssis pour l'exposition, en deux ou trois cuvettes et en quelques produits peu coûteux; cent francs suffisent amplement pour l'avoir complet.

Cette salle de Mathématiques ressemblerait à s'y méprendre à un Bureau d'études pour entreprise de Travaux publics : ce qui consternera bon nombre de mes collègues et me remplit d'allégresse. Que prétendons-nous faire de nos étudiants?

Je voudrais seulement notre salle de Mathématiques mieux outillée que la plupart des bureaux d'étude, puisqu'il s'agit d'une installation scientifique modèle.

Il va de soi qu'elle serait constamment à la disposition des étudiants, qui y pourraient passer la journée si bon leur semble, chauffés et éclairés. Que l'État exige une rétribution élevée, mais qu'en échange il donne quelque chose !

On conçoit maintenant le rôle important du *Chef de travaux de Mathématiques*. Sur lui retomberait la tâche de diriger le travail des élèves, de leur apprendre l'emploi des outils mis à leur disposition, de corriger les problèmes et les dessins.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

But et procédés du calcul différentiel.

CHAPITRE II

Fonctions algébriques de la forme : $y = ax^m + bx^n + \ldots$

Fonction linéaire; droite.

Paraboles et hyperbole.

Fonction entière : $y = ax^m + bx^n + \ldots$

Racines réelles des équations algébriques.

CHAPITRE III

Fonctions circulaires.

Sinus, cosinus.

Tangente, cotangente.

Sécante, cosécante.

Fonctions usuelles construites avec les fonctions circulaires fondamentales.

CHAPITRE IV

Applications des lignes trigonométriques.

Trigonométrie plane.

Trigonométrie sphérique.

Angle d'une courbe avec les axes ou avec d'autres courbes.

Coordonnées polaires.

CHAPITRE V

Cercle. Développées et développantes. Cycloïdes et épicycloïdes.

Cercle.

Cercle osculateur; rayon de courbure.

Développée, développantes.

Cycloïdes et épicycloïdes.

CHAPITRE VI

Sections coniques.

Réduction de l'équation générale du second degré.

Ellipse.

Hyperbole.

Parabole.

CHAPITRE VII

Généralités sur les courbes.

Enveloppe et enveloppées.

Déplacement d'une figure invariable.

Podaires.

CHAPITRE VIII

Fonctions définies par leurs dérivées.

Planimètres.
Détermination des aires. Intégrales.

CHAPITRE IX

Fonctions définies par leurs dérivées (suite).

Intégrales de Fresnel.

Aires en coordonnées polaires; loi des aires.

Équations naturelles et intrinsèques des courbes planes.

Rectification des courbes planes.
Intégrales elliptiques.

CHAPITRE X

Fonction logarithmique et fonction exponentielle.

Intégration des fonctions rationnelles et irrationnelles du second degré.

Fonctions hyperboliques.

CHAPITRE XI

Théorie des quantités complexes.

Représentation conforme.

Analyse vectorielle.

CHAPITRE XII

Développements en série.

Notions sur la convergence des séries infinies.

Développements suivant les puissances de la variable.

Formule d'approximation.

Série de Fourrier.

CHAPITRE XIII

Fonctions définies par une équation différentielle.

Équations différentielles du premier ordre.

Facteur intégrant.

Équations différentielles linéaires.

Intégration par les séries.

Équations différentielles simultanées.

CHAPITRE XIV

Intégrales définies. Intégrales doubles.

Intégrales doubles et triples.

Fonction Gamma.

CHAPITRE XV

Plan, ligne droite. Changements de coordonnées.

CHAPITRE XVI

Surfaces du second degré.

Invariants et formes quadratiques.

Classification des quadriques.

Ellipsoïde.

Quadriques homofocales.

CHAPITRE XVII

Correspondance point par point.

Homographie linéaire et involution.

Homographie dans le plan, homologie.

Homographie dans l'espace.

Abaques.

CHAPITRE XVIII

Surfaces. Courbes tracées sur les surfaces.

Surfaces de révolution.

Représentation des surfaces plane et en vraie grandeur.

Courbes orthogonales sur une surface.

Représentation conforme des surfaces.

Surfaces topographiques.

Surfaces enveloppes.

CHAPITRE XIX

Courbes à double courbure. Surfaces développables.

Courbes à double courbure.

Hélice. Hélicoïde développable.

Surfaces développables.

CHAPITRE XX

Surfaces réglées non développables.

Étude générale des systèmes de droites.

Conoïdes.

Surfaces gauches générales.

CHAPITRE XXI

Courbures des surfaces.

Surfaces de révolution.

Pinceaux de normales.

Lignes géodésiques.

Surfaces applicables.

CHAPITRE XXII

Flux et circulation des vecteurs.

Existence d'un potentiel.

CHAPITRE XXIII

Équations aux dérivées partielles.

Équations du second ordre à coefficients constants.

Équation de la Conductibilité calorifique ou électrique.

Équations aux dérivées partielles de l'Optique.

CHAPITRE XXIV

Exercices pratiques et manipulations.

Paris. — Impr. Charles Delagrave. — 3-11.

